

系统与amp;控制丛书 C4

陈本美 席斌 著

H_{∞} 控制及应用



科学出版社
www.sciencep.com

《系统与amp;控制丛书》编委会

主 编:

郭 雷 院 士 中国科学院数学与amp;系统科学研究院

副 主 编:

程代展 研究员 中国科学院数学与amp;系统科学研究院

林宗利 教 授 University of Virginia, USA

编 委:

黄 捷 教 授 香港中文大学

谈自忠 教 授 Washington University, USA

陈 杰 教 授 北京理工大学

Prof. Hassan K. Khalil Michigan State University, USA

Prof. Frank Lewis University of Texas at Arlington, USA

系统与amp;控制丛书

H_{∞} 控制及应用

陈本美 席斌 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书的重点放在解决一般化 H_∞ 控制问题。众所周知,一般化 H_∞ 控制问题是无法通过解 Riccati 方程来得到反馈控制律的。本书的结果建立在对被控系统结构特性的充分理解和分析的基础之上,通过将被控的系统分解成各种具有不同物理性质的子系统,这些子系统可以清晰地显示被控系统的结构特性,使我们能够深入地了解反馈控制对整体系统所产生的作用,从而构造出满足设计目标的控制器。本书系统地概述了第一作者和他的合作者多年来在 H_∞ 和鲁棒控制方面的理论研究及其在实际系统中应用的成果。

本书可作为高等院校航天航空、应用数学、化学工程、电气工程、机械工程和自动化等相关专业研究生教材或参考书,在实际工业应用中也具有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

H_∞ 控制及应用/陈本美,席斌著. —北京:科学出版社,2010

(系统与控制丛书)

ISBN 978-7-03-028742-7

I. H_∞ … II. ①陈… ②席… III. 自动控制理论 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 163432 号

责任编辑:王志欣 汤 枫/责任校对:刘小梅

责任印制:赵 博/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第一版 开本:B5(720×1000)

2010年8月第一次印刷 印张:23

印数:1—3 000 字数:435 000

定价:68.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

献给我的中学数学老师

福建福清江镜中学陈台栋先生和何天雄先生

——陈本美

献给我的家人程瑶及夏菲

——席 斌

英文版原著献词

献 给

我的叔公陈之禄神父、我的祖母、我的父母，
以及枫、李闽、李融和李文

Ben M. Chen

编者的话

我们生活在一个科学技术飞速发展的信息时代，诸如宇宙飞船、机器人、因特网、智能机器及汽车制造等高新技术对自动化提出了更高的要求。系统与控制理论也因此面临着更大的挑战。它必须要能够为设计高水平的物理或信息系统提供原理和方法，使得设计出的系统能感知并自动适应快速变化的环境。

为帮助系统与控制专业的专家、工程师以及青年学生迎接这些挑战，科学出版社和中国自动化学会控制理论专业委员会合作，设立了《系统与控制丛书》的出版项目。丛书分中、英文两个系列，目的是出版一些具有创新思想的高质量著作，内容既可以是新的研究方向，也可以是至今仍然活跃的传统方向。研究生是本丛书的主要读者群，因此，我们强调内容的可读性和表述的清晰。我们希望丛书能达到这些目的，为此，期盼着大学的支持和奉献！

《系统与控制丛书》编委会

2007年4月1日

前 言

所谓控制系统，就是包括一个被控对象和一个控制该对象的控制器或补偿器的系统。要设计一个好的控制系统，设计者首先得弄清楚被控系统的一些基本性质或确定可以用来描述被控系统的一些数学表达式，如系统的动态方程，这就是建模问题。在确定被控制系统的数学模型之后，设计者可以根据系统的性质以及整体控制系统所要求的性能指标来设计一个相应的控制器，这便是控制问题。多少年来，众多从事系统和控制研究及设计的科研人员和工程师都是围绕这两大方向不断地探寻着新的方法来解决新的问题。

在实际应用中，由于现实的环境可能随时发生变化，被控的系统也可能随着时间而改变。一个实用的控制系统不但需要能够应付这些环境的变化，而且必须同时应付被控系统中的不确定性、非线性、噪声以及高频动态等。我们通常把控制系统在实际环境中能够正常工作的特性叫做鲁棒性。如何设计一个能够保证整个系统的稳定性并同时满足性能指标的控制器，就是所谓的鲁棒控制。 H_∞ 控制设计方法通常被广泛用来解决鲁棒控制问题。本书系统地概述了第一作者和他的合作者多年来在 H_∞ 和鲁棒控制方面的理论研究及其在实际系统中应用的成果。

本书的重点放在解决 H_∞ 控制中所谓的一般化问题 (singular case)，而不是常见的规范化问题 (regular case)。众所周知，一般化问题是无法通过解 Riccati 方程来得到反馈控制律的。书中的结果建立在对被控系统结构特性的充分理解和分析的基础之上，通过将受控的系统分解成各种具有不同物理性质的子系统，这些子系统可以清晰地显示被控系统的结构特性，使我们能够深入地了解反馈控制对整体系统所产生的作用，从而构造出满足设计目标的控制器。书中的内容大部分编译自第一作者的两本英文专著，即 1998 年由 Springer 出版的 H_∞ Control and Its Applications^[1] 和 2000 年出版的改进版 Robust and H_∞ Control^[2]。不过，本书增加了不少基础知识方面的内容。

本书中所使用的方法有它独特之处。荷兰 Delft 科技大学 Carsten Scherer 教授 2000 年在 Automatica (第 36 卷, 1247—1248 页) 中发表本著英文初版的书评中，对我们所使用的方法曾经作了很好的总结：“We summarize that this book is an excellent research reference for insights and proofs pertaining to the geometric approach in H_∞ control. The careful and detailed exposition illustrates the far-reaching potentials of these techniques for a variety of other control problems beyond H_∞ theory. Throughout the book the author chooses an algorithmic

style of presenting the sometimes rather intricate constructions in favor of their numerical implementation. Moreover, by splitting the subjects into sub-optimality tests, computation of optimal values, controller construction, and almost disturbance decoupling, he renders all these themes accessible for independent investigation... We therefore believe that this book closes a gap in the literature by providing a thorough basis for entering the rich field of applying geometric techniques in H_∞ control.”我们也深信书中所介绍的方法同样可以用来解决其他控制方面的问题，这也是作者将英文原稿编译成中文的宗旨之一。

本书面向的读者包括从事控制工程应用的工程师和相关控制工程领域的研究人员。阅读所需的背景知识是研究生课程中的线性系统和多变量控制理论。其中，2008年清华大学出版社出版的由陈本美、林宗利、雅科夫·司马诺合著的《线性系统理论：结构分解法》（席斌译）^[3]一书对理解本书中所使用的方法极有帮助。

本书的第一作者要感谢 Springer 出版社无偿地将中文的版权归还给作者，也感谢他们多年来对作者的支持；作者也要特别感谢中国科学院系统科学研究所的程代展教授，是他把这本著作介绍给科学出版社《系统与控制丛书》系列；最后，第一作者要把本书献给他的中学数学老师，福建福清江镜中学陈台栋先生和何天雄先生，是他们无价的教诲、无私的奉献和无数的习题伴随着作者度过那无知的年代，让他忘却了生活上食不果腹的悲凉，知遇之恩，没齿不忘。

本书的第二作者十分有幸受第一作者之邀，先后两次赴新加坡国立大学访问。那里丰富的研究资源和活跃的研究气氛使作者受益匪浅。希望本书所体现的完整理论体系能够在国内的年轻学者中激励出更丰富的控制系统设计方法，以及向其他新兴的研究领域渗透。

最后，感谢新加坡国立大学电气与电脑工程系的王彪博士和博士研究生赵世钰，他们在书稿校正方面提供了不少帮助。

陈本美、席斌

2010年4月

英文版前言

优化方法的运用无疑是现代控制理论的标志之一。控制系统典型的解析设计方法是首先把给定的约束转变成性能指标，然后寻找可以极小化这一性能指标的控制律。对于给定的线性时不变系统，两个极其重要的指标是从外部扰动到相关被控输出传递函数的 H_2 范数和 H_∞ 范数。本书研究的是 H_∞ 控制问题，在合适的反馈控制律下，把控制器设计转化成极小化某些闭环传递矩阵的 H_∞ 范数问题，从线性系统结构化特性的角度来探讨 H_∞ 控制的理论和应用问题。我们的目标是对一系列问题的解给出构造性算法，这些问题是一般化 H_∞ 控制问题、 H_∞ 几乎干扰解耦问题，还有最近才提出的鲁棒和完全跟踪问题，以及应用这些技术解决几个实际问题。

本书的前身名为 *H_∞ Control and Its Applications*，是 Springer 系列丛书 *Lecture Notes in Control and Information Science* 的第 235 卷。非常感谢 Springer 出版社工程系列编辑 Nicholas Pinfield 鼓励我更新这个版本以及他的热心帮助，使我得以借此机会全面提升专著的内容，并且包括了一些新近得到的理论和应用成果，即第 9 章、第 13 章和第 14 章，我们在这里研究了鲁棒和完全跟踪问题及其在硬盘伺服驱动器设计中的应用。

本书面向的读者包括从事控制工程应用的工程师和相关控制工程领域的研究人员。阅读所需的背景知识是低年级研究生课程中的线性系统和多变量控制理论。初步的线性系统几何理论无疑是有帮助的。

我非常荣幸能从和几位学者的合作中获益。首先，我要感谢弗吉尼亚大学的林宗利教授，本书的许多部分都出自于我们长期合作研究的成果和在过去几年里的许多次讨论。接下来要感谢美国华盛顿州立大学的 Ali Saberi 教授、美国纽约州立大学石溪分校的 Yacov Shamash 教授、新加坡国立大学的康长杰教授和李崇兴教授、美国华盛顿大学的 Uy-Loi Ly 教授、厦门大学的陈亚陵教授、荷兰 Eindhoven 技术大学的 Anton Stoorvogel 教授和澳大利亚 Newcastle 大学的 Steve Weller 教授，书中的一些结果是由他们贡献的。同时要感谢美国 Rutgers 大学的 Pedda Sannuti 教授、清华大学的郑大钟教授、澳大利亚墨尔本大学的张慈深教授，我们在近些年来进行过许多有益的讨论。还有来自新加坡数据存储研究中心的 Teck-Seng Low 博士、Tow-Chong Chong 博士和 Guoxiao Guo 博士，他们对于我的硬盘驱动的双执行器研究课题给予了无私的帮助。

我还要对许多现在和以前的研究生表示感谢，特别是 Boon-Choy Siew、Yi

Guo、Jun He、Kexiu Liu、Zhongming Li 和 Teck-Beng Goh 对本书的贡献以及他们用实际问题对书中的部分结果进行了检验，如陀螺稳定镜像平台、压电执行器和硬盘驱动双执行器系统。我还要感谢我的好朋友和英文老师，新加坡国立大学的 Andra Leo，她在文稿的撰写阶段热心帮助我纠正了英文错误。

这本书主要是利用我的“业余”时间完成的，也就是晚上、周末和假期的时间。所以我要对我的父母，妻子枫，孩子李闽、李融和李文所做的牺牲、理解和鼓励表示我最深的谢意。最后，也是我最想表达的是对我的叔公陈之禄神父以及他领导的纽约中美友谊会和中国天主教信息中心最真切的感谢。没有他们所给予的精神和物质上的支持，我不可能有今天的学术生涯，也不可能完成在 Gonzaga 大学和华盛顿州立大学的学业。这本专著理应献给所有支持我的人。

Ben M. Chen

新加坡 2000 年

目 录

前言

英文版前言

第 1 章 导论	1
1.1 背景	1
1.2 各章预览	2
1.3 符号和术语	3
第 2 章 数学基础	5
2.1 导论	5
2.2 向量空间和子空间	5
2.3 矩阵代数和特性	7
2.3.1 行列式, 逆和求导	7
2.3.2 秩, 特征值和 Jordan 型	9
2.3.3 特殊矩阵	12
2.3.4 奇异值分解	15
2.4 范数	16
2.4.1 向量范数	16
2.4.2 矩阵范数	17
2.4.3 连续时间信号的范数	17
2.4.4 离散时间信号的范数	18
2.4.5 连续时间系统的范数	18
2.4.6 离散时间系统的范数	19
第 3 章 线性系统基础理论	20
3.1 导论	20
3.2 动态响应	21
3.3 系统稳定性	22
3.4 可控性和可观性	24
3.5 系统可逆性	27
3.6 常态秩, 有限零点和无限零点	27
3.7 几何子空间	31
3.8 状态反馈和输出馈入的特性	33

第 4 章 系统结构分解工具	35
4.1 导论	35
4.2 Jordan 和实 Jordan 规范型	36
4.3 矩阵对的结构分解	37
4.4 特殊坐标基	38
4.5 结构映射和双线性变换	46
4.5.1 连续时间到离散时间的映射	46
4.5.2 离散时间到连续时间的映射	50
第 5 章 H_∞ 控制基本理论	53
5.1 导论	53
5.2 H_∞ 控制问题	53
5.3 有界实引理	57
5.4 连续时间系统规范化 H_∞ 控制	59
5.5 连续时间系统一般化 H_∞ 控制	63
5.6 离散时间系统	65
5.7 常见的鲁棒控制问题	69
5.7.1 混合灵敏度问题	69
5.7.2 最大化复值稳定半径	71
5.7.3 加性摄动下的鲁棒镇定	72
5.7.4 乘性摄动下的鲁棒镇定	73
第 6 章 离散时间 Riccati 方程的解	74
6.1 导论	74
6.2 一般 DARE 的解	74
6.3 H_∞ -DARE 的解	75
6.4 主要结果的证明	80
6.4.1 定理 6.1 的证明	80
6.4.2 定理 6.2 的证明	83
第 7 章 连续时间 H_∞ 优化问题的极小值	86
7.1 导论	86
7.2 全信息反馈	86
7.3 输出反馈	95
7.4 具有虚轴零点的对象	103
第 8 章 连续时间 H_∞ 问题的解	112
8.1 导论	112
8.2 全状态反馈	112

8.3	全阶输出反馈	118
8.4	降阶输出反馈	124
8.5	主要结果的证明	130
8.5.1	定理 8.1 的证明	130
8.5.2	定理 8.2 的证明	133
8.5.3	定理 8.3 的证明	133
8.5.4	定理 8.4 的证明	137
8.5.5	定理 8.5 的证明	138
第 9 章	连续时间 H_∞ 几乎干扰解耦	139
9.1	导论	139
9.2	可解性条件	141
9.3	全状态反馈的解	144
9.4	输出反馈的解	151
9.4.1	全阶输出反馈	151
9.4.2	降阶输出反馈	153
9.5	主要结果的证明	157
9.5.1	定理 9.2 的证明	157
9.5.2	定理 9.3 的证明	164
9.5.3	定理 9.4 的证明	169
第 10 章	连续时间系统的鲁棒和完全跟踪	170
10.1	导论	170
10.2	可解性条件和解	171
10.2.1	状态反馈下的解	175
10.2.2	测量输出反馈下的解	178
10.3	其他参考信号的鲁棒和完全跟踪	182
10.4	主要结果的证明	187
10.4.1	定理 10.2 的证明	187
10.4.2	定理 10.3 的证明	192
10.4.3	定理 10.4 的证明	196
第 11 章	离散时间 H_∞ 优化极小值	198
11.1	导论	198
11.2	全信息反馈	198
11.3	输出反馈	208
11.4	在单位圆上有零点的对象	212

第 12 章	离散时间 H_∞ 问题的解	214
12.1	导论	214
12.2	全信息和状态反馈	214
12.3	全阶输出反馈	219
12.4	降阶输出反馈	223
第 13 章	离散时间 H_∞ 几乎干扰解耦	228
13.1	导论	228
13.2	可解性条件	229
13.3	状态和全信息反馈的解	232
13.4	测量反馈的解	238
13.4.1	全阶输出反馈	239
13.4.2	降阶输出反馈	242
13.5	主要结果的证明	245
13.5.1	定理 13.1 的证明	245
13.5.2	定理 13.2 的证明	252
13.5.3	定理 13.4 的证明	253
13.5.4	定理 13.5 的证明	260
13.5.5	定理 13.3 和定理 13.6 的证明	261
13.5.6	定理 13.7 的证明	268
第 14 章	离散时间系统的鲁棒和完全跟踪	270
14.1	导论	270
14.2	可解性条件和解	271
14.2.1	状态反馈下的解	273
14.2.2	测量反馈下的解	274
14.3	几乎完全跟踪问题	278
第 15 章	硬盘驱动伺服系统的设计	289
15.1	导论	289
15.2	VCM 执行器模型	290
15.3	伺服系统设计和仿真结果	294
15.4	实现结果	298
第 16 章	压电执行器系统的设计	304
16.1	导论	304
16.2	非线性磁滞动态的线性化	306
16.3	几乎干扰解耦问题	308
16.4	最终控制器和仿真结果	314

第 17 章 陀螺稳定镜像定位系统的设计	321
17.1 导论	321
17.2 自由陀螺稳定镜像系统	322
17.3 利用 RPT 方法设计控制器	325
17.4 仿真和实现结果	329
参考文献	337

第 1 章 导 论

1.1 背 景

控制系统设计者的最终目的是要建立一个能在现实环境中工作的系统。由于现实环境可能发生变化,系统运行条件也可能随着时间而改变,控制系统就必须能够应付这些变化。即使环境没有变化,模型不确定性和噪声也是存在的。系统的任何数学描述都免不了包含或多或少简化的假设,系统中的非线性部分或是未知的,因此不被包含在模型中,即使建立了非线性部分的模型,也往往由于为了简化分析和设计而被忽略了。在设计阶段,高频动态也同样会先被搁在一边。因此,在简化模型的基础上设计出来的控制系统对实际工作条件下的对象可能无法工作。通常把控制系统在实际环境中能够正常工作的特性叫做鲁棒性。一个所谓的鲁棒控制器不仅仅是对一个对象,而是要对一组对象都能够有效地工作。当系统参数在一定范围内发生变化时,如果所设计的控制器能够保证整个系统的稳定性,我们则称系统具有鲁棒稳定性。除此以外,如果另一些性能指标还能得到满足,如稳态跟踪、干扰抑制和响应速度,则称系统具有鲁棒性能。同时满足鲁棒稳定和鲁棒性能的控制设计问题就是鲁棒控制。众所周知,优化理论可以说是现代控制理论的基石之一,并在解决此类问题中得到发展。在典型的控制系统设计中,给定的约束首先转化成某种性能指标,然后寻找可以极小化性能指标某种范数的控制律,如 H_2 或 H_∞ 范数。本书所关注的是 H_∞ 控制理论、 H_∞ 几乎干扰解耦问题以及鲁棒和完全跟踪问题。

自 Zames^[4] 首次提出 H_∞ 优化控制以来,在过去的数十年中,该主题的研究文献不断涌现。其研究工作的焦点是鲁棒多变量控制问题的形成以及求解。在 Zames 原 H_∞ 问题的基础上,大量的研究工作集中在问题的解法上。早期的研究成果大多采用的是时间域和频率域混合技术,其中包括以下方法:①插值方法(参见文献[5]);②频域方法(参见文献[6]~[8]);③多项式方法(参见文献[9]);④ J -谱分解方法(参见文献[10])。最近以来,在代数 Riccati 方程(ARE)基础上的纯时间域方法成为主流(参见文献[11]~[26])。其中有的也同时把 H_∞ 最优控制和微分对策联系在一起(参见文献[27]和[28])。

文献中的大部分结果都局限在所谓的规范化的 H_∞ 控制问题(regular case)。然而不幸的是现实中许多问题并不满足这些条件。为了应用面向规范化问题的理论,往往要增加一些人为的被控输出或扰动以形成虚拟的规范化问题。本书要处

理的问题具有一般性,即并不一定要满足所谓的规范化问题的假设。这类问题也称为一般化问题(singular case),其 H_∞ 次优控制器的存在条件已经在文献[21]和[22]中得到了很好的研究。然而本书的出发点却是截然不同的,我们主要关注的是:① H_∞ 优化问题极小值的计算;②一般化 H_∞ 优化问题的解;③一般化 H_∞ 干扰解耦问题的解,这个问题本身就是一个很重要的课题;④鲁棒和完全跟踪问题的解;以及⑤这些理论的实际应用。

书中的大部分结果都是第一作者及合作者在过去十年中的研究所得。本书将它们集中在一起进行相关主题各个方面的讨论。

1.2 各章预览

本书可自然地分成四个部分。下面是各章的预览。

第一部分由第2章~第4章组成,包括一些预备知识和背景材料。第2章是数学基础,主要是线性代数和矩阵理论的一些基础知识,以及与 H_∞ 控制相关的一些信号和系统范数的定义和性质。第3章简单介绍线性系统理论的基本结论,如线性时不变系统的动态响应、系统稳定性、可控性和可观性、可逆性及其结构、系统有限零点和无限零点结构、几何子空间,以及系统状态反馈和输出反馈的特性。第4章着重介绍一些线性系统工具,如 Jordan 和实 Jordan 规范型,以及线性系统的几个结构分解,如可控结构分解和特殊坐标基。后者在揭示系统的有限和无限零点结构方面有其独特的优势,并在全书的理论推导中发挥了决定性的作用。在第4章中还全面探讨了双线性和逆双线性变换下的连续时间系统和离散时间系统之间结构映射。

第二部分包含第5章和第6章。其中第5章着重介绍基本的 H_∞ 控制理论,主要阐述了 H_∞ 控制的基本思想和状态反馈以及输出反馈下的 H_∞ 控制问题解的存在条件。第6章的重点是建立离散时间代数 Riccati 方程和连续时间代数 Riccati 方程之间的内在关系。从数学上严格证明了离散时间代数 Riccati 方程可以通过一个双线性变换转化成一个连续时间代数 Riccati 方程,这个结果表明文献中许多关于求离散时间代数 Riccati 方程之解的迭代算法是多余的。在这一章的证明中,同时也建立了离散时间 H_∞ 控制和连续时间 H_∞ 控制之间在双线性变换之下的内在关系。这个结果的建立使得离散时间系统的 H_∞ 控制问题变得相当的直观和简单。

第三部分由第7章~第14章所组成,也是全书的核心。第7章涉及连续时间 H_∞ 优化问题最小值的计算。对于相当一大类的一般化 H_∞ 控制问题,其中的系统满足某些几何条件,我们给出了可精确计算最小值的非迭代方法(最小值的确切定义,可参见第5章定义5.2)。对于不满足这些几何条件的系统,我们则给出动态

阶次通常比原系统低许多的辅助降阶规范化系统,在此基础上修正我们的算法以得到近似最小值的迭代算法。第8章是对连续系统在状态反馈情况、全阶和降阶测量输出反馈情况下寻找一般化 H_∞ 控制的 γ 次优控制器(参见第5章定义5.1)。对于满足上述几何条件的一类一般化系统,我们给出其 γ 次优控制问题的闭式解。所谓闭式解是指以 γ 为参数的显式解,无需预先指定 γ 数值。因此我们可以方便地选择参数 γ 值,以达到期望的干扰抑制性能。对于更一般的系统,可适当调整该方法来寻找 γ 次最优控制律。第9章给出在状态反馈或测量反馈情况下一般连续系统 H_∞ 几乎干扰解耦问题的解,这一部分是有关连续系统 H_∞ 几乎干扰解耦问题最完善的结果。所谓鲁棒和完全跟踪问题的一些新近研究成果放在第10章中,其中所要处理的问题是对给定对象和参考输入设计一组合适的控制律,使得闭环系统是渐近稳定的,并在有外部干扰的情况下,对象的被控输出可以从任意的初始条件开始以任意快的速度跟踪参考输入。我们将首次导出给定连续时间系统可实现的鲁棒和完全跟踪性能的一组充分和必要条件,并给出构造性的算法来实现满足要求的控制器。与此类似,第11章~第14章研究的是离散时间系统问题并分别与第7章~第10章相对应。

本书的最后一部分关注的是一些实际应用问题。第15章研究了用于计算机硬盘驱动的音圈电机(voice-coil-motor)执行器的伺服系统设计,目的是把新近研究的鲁棒和完全跟踪方法与广泛应用的PID结构作比较,结果是具有动态阶次为1的鲁棒和完全跟踪控制器在每个检验项目上(无论是仿真和实际实验)都优于传统的PID控制器。第16章是利用 H_∞ 几乎干扰解耦方法设计压电(piezoelectric)执行器控制系统的实例,由这样的压电执行器所构成的双执行器系统在下一代硬盘驱动中具有应用前景。本书的最后一章,即第17章,用鲁棒和完全跟踪技术设计了一个高精度和快速的陀螺稳定镜像定位系统,这种系统在军事,如稳定飞机和坦克上的平台传感的定向线有其实用价值。

1.3 符号和术语

在全书中采用下面的符号:

\mathbb{R} : = 实数集合;

\mathbb{R}_+ : = 非负实数的集合;

\mathbb{N} : = 自然数的集合,即 $0, 1, 2, \dots$;

\mathbb{C} : = 整个复平面;

\mathbb{C}° : = 单位圆内复数集合;

\mathbb{C}^∞ : = 单位圆外复数集合;

\mathbb{C}^0 : = 复平面上单位圆;

C^- : = 开左半复平面;

C^+ : = 开右半复平面;

C^0 : = 复平面上的虚轴;

I : = 单位矩阵;

I_k : = $k \times k$ 维单位矩阵;

X^T : = X 的转置;

X^H : = X 的复共轭转置;

$\det(X)$: = X 的行列式;

$\text{rank}(X)$: = X 的秩;

$\text{Im}(X)$: = X 的值域空间;

$\text{Ker}(X)$: = X 的零空间;

X^\dagger : = X 的 Moore-Penrose(伪)逆;

$\lambda(X)$: = X 的特征值集合;

$\lambda_{\max}(X)$: = X 的最大特征值, 其中 $\lambda(X) \subset \mathbb{R}$;

$\sigma_{\max}(X)$: = X 的最大奇异值;

$\rho(X)$: = X 的谱半径, 等于 $\max_i |\lambda_i(X)|$;

$|X|$: = 矩阵 X 的常规 2-范数;

$|x|$: = 矢量 x 的欧几里得范数;

$\|G\|_2$: = 稳定系统 $G(s)$ 或 $G(z)$ 的 H_2 范数;

$\|g\|_2$: = 信号 $g(t)$ 或 $g(k)$ 的 l_2 范数;

L_2 : = l_2 范数有限的函数集合;

$\|g\|_p$: = 信号 $g(t)$ 或 $g(k)$ 的 l_p 范数;

L_p : = l_p 范数有限的函数集合;

$\|G\|_{L_\infty}$: = $G(s)$ 或 $G(z)$ 的 L_∞ 范数;

$\dim \mathcal{X}$: = 子空间 \mathcal{X} 的维数;

\mathcal{X}^\perp : = \mathbb{R}^n 中子空间 \mathcal{X} 的正交补;

$C^{-1}\{\mathcal{X}\}$: = $\{x | Cx \in \mathcal{X}\}$, 其中 \mathcal{X} 是子空间, C 是矩阵;

Σ_* : = 由 (A_*, B_*, C_*, D_*) 所表示的线性系统;

Σ'_* : = 由 $(A_*^T, C_*^T, B_*^T, D_*^T)$ 所表示的 Σ_* 的对偶系统。

最后, 用 $\text{normrank}\{X(\zeta)\}$ 表示 $X(\zeta)$ 的常态秩, 其中 $X(\zeta)$ 的元素是 ζ 的有理函数域。

第2章 数学基础

2.1 导 论

本章主要回顾一些必要的数学背景知识,包括矢量空间和矩阵理论的一些基本内容以及矢量、矩阵、信号和有理传递函数的各种范数的定义和性质。这些内容对后面章节的研究学习都十分有用。这些方面更加详细的论述可以在专门的数学教科书或其他线性系统和控制理论教科书中找到(可参见文献[18]、[29]~[39])。

另外要说明的是,本章的内容基本上是由 Chen 等所著的线性系统理论一书^[3,40]中的第2章编辑而成,不过删去了其中的一些证明,其中的背景知识对研究系统理论和控制理论都有很大的帮助。

2.2 矢量空间和子空间

我们假设读者对标量域和矢量空间的基本定义已有所了解。

令 \mathcal{X} 为一个标量域 K 上的矢量空间。若 \mathcal{S} 是 \mathcal{X} 的子集合并且本身是在域 K 上的矢量空间,则称 \mathcal{S} 是 \mathcal{X} 的子空间。子空间 \mathcal{S} 的维数用 $\dim \mathcal{S}$ 表示,即 \mathcal{S} 中可能的最大线性独立的矢量个数。

矢量 $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathcal{S}, k = \dim \mathcal{S}$, 如果它们是线性独立的,即只有在 $\alpha_i = 0$ 时有 $\sum_{i=1}^k \alpha_i s_i = 0$ 成立,则称该组矢量形成 \mathcal{S} 的一个基。如果 $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{0\}$, 则称两个子空间 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 是独立的。

本书中只用到两个常用的矢量空间,即 \mathbb{R}^n (标量域 $K = \mathbb{R}$) 和 \mathbb{C}^n (标量域 $K = \mathbb{C}$), 以及它们的子空间。所以,两个矢量的内积,比如 x 和 y , 既可以在 \mathbb{R}^n 中,也可以在 \mathbb{C}^n 中,定义为

$$\langle x, y \rangle = x^H y = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \dots + x_n^* y_n \quad (2.1)$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 分别为 x 和 y 中的分量; x^H 是 x 的复共轭转置; x_i^* 是 x_i 的复共轭。如果 $\langle x, y \rangle = 0$, 则矢量 x 和 y 是正交的。

下面我们回顾矢量空间和子空间中的一些常用概念和性质。

定义 2.1 (子空间的和) 令 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 为矢量空间 \mathcal{X} 的子空间, 则子空间 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 的和定义为

$$\mathcal{S} = \mathcal{V} + \mathcal{W} := \{v + w \mid v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}\} \quad (2.2)$$

如果 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 是独立的, \mathcal{S} 也称为 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 的直和, 用 $\mathcal{S} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ 来表示, 显然在两种情况下, \mathcal{S} 都是 \mathcal{X} 的子空间. ♣

定义 2.2 (正交补子空间) 令 \mathcal{V} 是向量空间 \mathcal{X} 的一个子空间, 则 \mathcal{V} 的正交补定义为

$$\mathcal{V}^\perp := \{x \in \mathcal{X} \mid \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in \mathcal{V}\} \quad (2.3)$$

\mathcal{V}^\perp 同样是 \mathcal{X} 的一个子空间. ♣

定义 2.3 (商空间和余维) 令 \mathcal{V} 是向量空间 \mathcal{X} 的一个子空间, $x + \mathcal{V}$ 表示一个元素 $x \in \mathcal{X}$ 关于 \mathcal{V} 的陪集 (coset), 它的定义为

$$x + \mathcal{V} := \{w \mid w = x + v, v \in \mathcal{V}\} \quad (2.4)$$

它的代数运算定义为

$$(w + \mathcal{V}) + (x + \mathcal{V}) = (w + x) + \mathcal{V} \quad (2.5)$$

和

$$\alpha(w + \mathcal{V}) = \alpha w + \mathcal{V} \quad (2.6)$$

可以证明陪集构成了向量空间的元素, 所产生的空间称为 \mathcal{X} 关于 \mathcal{V} (或对 \mathcal{V} 取模) 的商空间 (quotient space) 或因素空间 (factor space), 用 \mathcal{X}/\mathcal{V} 来表示. 它的维数称为 \mathcal{V} 的余维 (codimension), 用 $\text{codim } \mathcal{V}$ 来表示, 即

$$\text{codim } \mathcal{V} = \dim \mathcal{X}/\mathcal{V} = \dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{V} \quad (2.7)$$

注意 \mathcal{X}/\mathcal{V} 并不是 \mathcal{X} 的子空间, 除非 $\mathcal{V} = \{0\}$. ♣

定义 2.4 (矩阵的核和像) 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (或 $\mathbb{R}^{m \times n}$), 即一个从 $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$ (或 \mathbb{R}^n) 到 $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^m$ (或 \mathbb{R}^m) 的线性映射, 则 A 的核或零空间定义为

$$\text{Ker}(A) := \{x \in \mathcal{X} \mid Ax = 0\} \quad (2.8)$$

A 的像空间或值域空间定义为

$$\text{Im}(A) = A\mathcal{X} := \{Ax \mid x \in \mathcal{X}\} \quad (2.9)$$

显然 $\text{Ker}(A)$ 是 \mathcal{X} 的子空间, $\text{Im}(A)$ 是 \mathcal{Y} 的子空间. ♣

定义 2.5 (一个子空间的逆像) 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (或 $\mathbb{R}^{m \times n}$), 即一个从 $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$ (或 \mathbb{R}^n) 到 $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^m$ (或 \mathbb{R}^m) 的线性映射, 和一个 \mathcal{Y} 的子空间 \mathcal{V} , 则在该线性映射下 \mathcal{V} 的逆像定义为

$$A^{-1}\{\mathcal{V}\} := \{x \in \mathcal{X} \mid Ax \in \mathcal{V}\} \quad (2.10)$$

显然这是 \mathcal{X} 的一个子空间. ♣

定义 2.6 (不变子空间) 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (或 $\mathbb{R}^{n \times n}$), 即一个从 $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$ (或 \mathbb{R}^n) 到 \mathcal{X} 的线性映射, \mathcal{V} 是 \mathcal{X} 的一个子空间, 如果

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} \quad (2.11)$$

则称 \mathcal{V} 是 A 不变的, 也叫做 A 的不变子空间. ♣

下面是在子空间运算中的一些有用性质, 令 \mathcal{L}, \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 是向量空间的子空间,

则有

$$(\mathcal{S}^\perp)^\perp = \mathcal{S} \quad (2.12)$$

$$(\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp \quad (2.13)$$

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp \quad (2.14)$$

$$\mathcal{S} + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subset (\mathcal{S} + \mathcal{V}) \cap (\mathcal{S} + \mathcal{W}) \quad (2.15)$$

$$\mathcal{S} \cap (\mathcal{V} + \mathcal{W}) \supset (\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) + (\mathcal{S} \cap \mathcal{W}) \quad (2.16)$$

如果 $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$, 则

$$\mathcal{S} \cap (\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \mathcal{V} + (\mathcal{S} \cap \mathcal{W}) \quad (2.17)$$

对一个线性映射 A 和具有适当维数的子空间 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} , 有

$$A(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subset A\mathcal{V} \cap A\mathcal{W} \quad (2.18)$$

$$A(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = A\mathcal{V} + A\mathcal{W} \quad (2.19)$$

$$A^{-1}\{\mathcal{V} \cap \mathcal{W}\} = A^{-1}\{\mathcal{V}\} \cap A^{-1}\{\mathcal{W}\} \quad (2.20)$$

$$A^{-1}\{\mathcal{V} + \mathcal{W}\} \supset A^{-1}\{\mathcal{V}\} + A^{-1}\{\mathcal{W}\} \quad (2.21)$$

$$(A^{-1}\{\mathcal{V}\})^\perp = A^H \mathcal{V}^\perp \quad (2.22)$$

$$\text{Ker}(A^H) = \{\text{Im}(A)\}^\perp \quad (2.23)$$

其中 A^H 是 A 的复共轭转置。最后, 有下面的等价关系:

$$A\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \Leftrightarrow A^H \mathcal{V} \subset \mathcal{S}^\perp \quad (2.24)$$

2.3 矩阵代数和特性

本节简要回顾一些基本的矩阵代数和一些常用的矩阵性质。为了便于引用, 我们把像 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 这样的 $m \times n$ 矩阵记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (2.25)$$

即如果一个大写字母表示一个矩阵的话, 相应的小写字母和下标 ij 就表示它的第 (i, j) 分量。 A 的转置定义为

$$A^T := C = [c_{ij} := a_{ji}] \quad (2.26)$$

它的共轭转置定义为

$$A^H := C = [c_{ij} := a_{ji}^*] \quad (2.27)$$

其中 a_{ji}^* 是 a_{ji} 的复共轭。

2.3.1 行列式, 逆和求导

对于一个方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 它的行列式 $\det(A)$ 可表示为

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

其中 A_{ij} 是去掉 A 的第 i 行和第 j 列后的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵。对于 $A(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, 如果所有的元素都对 t 可导, 那么它的导数定义为

$$\frac{d}{dt} A(t) := \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right] = [\dot{a}_{ij}(t)] \quad (2.29)$$

如果两个方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $AB = BA = I$, 则称 B 为 A 的逆, 用 A^{-1} 来表示。如果 A 逆存在, 则称 A 是非奇异的, 否则就是奇异的。注意 A 是非奇异, 当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 。

下面是行列式、逆矩阵和求导的一些有用性质和等式。给定 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$, 有

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (2.30)$$

$$\det(A^T) = \det(A) \quad (2.31)$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \quad (2.32)$$

假设 A 和 B 是具有适当维数的方阵, 如果 A 是非奇异的, 则有

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(B - CA^{-1}D) \quad (2.33)$$

或者, 如果 B 是非奇异的, 则有

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det(B) \cdot \det(A - DB^{-1}C) \quad (2.34)$$

给定 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 由式(2.33)和式(2.34)可得

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA) \quad (2.35)$$

给定一个非奇异的 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 和满足 $v^H A^{-1} u \neq -1$ 的 $u, v \in \mathbb{C}^n$, 有

$$(A + uv^H)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^H A^{-1}}{1 + v^H A^{-1}u} \quad (2.36)$$

这就是 Sherman-Morrison 公式(见文献[32]), 它的推广形式对导出系统和控制理论中的许多有趣结果是非常有用的。下面的 Sherman-Morrison-Woodbury 公式或简称 Woodbury 公式就是它的推广之一:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1} \quad (2.37)$$

其中 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是非奇异的, B 和 D 都具有适当的维数, $DA^{-1}B + C^{-1}$ 是非奇异的。下面的等式特别有用:

$$(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1} \quad (2.38)$$

$$[I + C(sI - A)^{-1}B]^{-1} = I - C(sI - A + BC)^{-1}B \quad (2.39)$$

和

$$(I - BD)^{-1} = I + B(I - DB)^{-1}D \quad (2.40)$$

对于矩阵块的求逆(见文献[34]),下面的等式也是非常有用的,如果 A 和 B 是非奇异的,则有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

和

$$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

如果 A 是非奇异的,则

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}D\Delta^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}D\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

其中 $\Delta := B - CA^{-1}D$. 若 B 也是非奇异的,根据式(2.37)可得

$$A^{-1} + A^{-1}D(B - CA^{-1}D)^{-1}CA^{-1} = (A - DB^{-1}C)^{-1}$$

这样就可以把式(2.43)写成

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - DB^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}D\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

同样,如果 B 是非奇异的,则

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \nabla^{-1} & -\nabla^{-1}DB^{-1} \\ -B^{-1}C\nabla^{-1} & B^{-1} + B^{-1}C\nabla^{-1}DB^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

其中 $\nabla := A - DB^{-1}C$. 除此以外,如果 A 也是非奇异的,则

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \nabla^{-1} & -\nabla^{-1}DB^{-1} \\ -B^{-1}C\nabla^{-1} & (B - CA^{-1}D)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

下面给定 $A(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times p}$, 它们的元素关于 t 是可导的,则

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] = \left[\frac{d}{dt}A(t)\right]B(t) + A(t)\left[\frac{d}{dt}B(t)\right] \quad (2.47)$$

给定 $A(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, 如果 $A(t)$ 对所有 t 都是非奇异的,它的元素关于 t 可以求导,则

$$\frac{d}{dt}[A(t)^{-1}] = -A(t)^{-1}\left[\frac{d}{dt}A(t)\right]A(t)^{-1} \quad (2.48)$$

2.3.2 秩,特征值和 Jordan 型

现在把矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 改写为

$$A = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

其中 $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ 和 $r_i (i=1, 2, \dots, m)$ 分别是 A 的列和行。定义 A 的秩为 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 中的最大线性独立矢量的个数, 或等价地为 $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 中最大线性独立矢量的个数, 用 $\text{rank}(A)$ 来表示, 显然有

$$\text{rank}(A) = \dim\{\text{Im}(A)\} = n - \dim\{\text{Ker}(A)\} \quad (2.50)$$

以下是关于矩阵秩的一些有用性质。令 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$, 则

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \quad (2.51)$$

这就是 Sylvester 不等式。如果 A 是方的非奇异矩阵, 则

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) \quad (2.52)$$

一般来说, 如果 A 和 B 有相同的维数, 则

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \quad (2.53)$$

矩阵秩的计算在书中的各种线性系统结构分解中起到了十分关键的作用, 利用在 2.3.4 节中的奇异值分解就可以有效地计算出矩阵的秩。

对于一个方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和一个标量 $\lambda \in \mathbb{C}$, 如果

$$Ax = \lambda x \quad (\Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0) \quad (2.54)$$

对某非零矢量 $x \in \mathbb{C}^n$ 成立, 则称 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 A 的一个特征值。这样的 x 叫做和特征值 λ 相关联的(右)特征矢量。

现在从式(2.54)就可以知道, 对一个特征值 λ , 有

$$\text{rank}(\lambda I - A) < n \quad (\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0) \quad (2.55)$$

所以 A 的特征值就是它的特征多项式

$$\chi(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (2.56)$$

的根, 总共有 n 个根。这些根或 A 的特征值的整体用集合 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 来表示。下面的性质是 Cayley-Hamilton 定理:

$$\chi(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0 \quad (2.57)$$

定义 A 的谱半径为

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \lambda(A)\} \quad (2.58)$$

和 A 的迹为

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (2.59)$$

它和 A 的特征值的关系是

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (2.60)$$

假设一个方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有 n 个线性独立的特征矢量 x_1, x_2, \dots, x_n , 分别和特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (不一定要相异) 相关联, 令

$$T := [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (2.61)$$

这就是 A 的特征矢量矩阵, 则有

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

对一个方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 通常存在一个非奇异变换 $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和一个整数 k , 使得

$$T^{-1}AT = J_i = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

其中 $J_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是一些下面形式的 Jordan 块:

$$J_i := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

显然有 $\lambda_i \in \lambda(A) (i = 1, 2, \dots, k)$ 和 $\sum_{i=1}^k n_i = n$ 。式(2.63)中 J 的特殊结构被称为 A 的 Jordan 规范型。众所周知, 在计算 Jordan 型的时候有很大的数值计算困难 (见文献[34])。但如果能够精确地算出, 就可以在后面章节中有效地揭示线性系统的有限零点结构和其他特性。需要进一步指出的是, 尽管 Jordan 型是分析系统特性的有效工具, 在实际中却是很少使用的。

下面是关于一般方形矩阵特征值的一些非常有用的不等式。2.3.3 节将给出特殊矩阵的更多结果。对于任意一个矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 有

$$\lambda_{\min} \left(\frac{A + A^H}{2} \right) \leq \operatorname{Re} \lambda_i(A) \leq \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^H}{2} \right) \quad (2.65)$$

和

$$\lambda_{\min} \left(\frac{A - A^H}{2j} \right) \leq \operatorname{Im} \lambda_i(A) \leq \lambda_{\max} \left(\frac{A - A^H}{2j} \right) \quad (2.66)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ 。

对于 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 有以下关于 $A + B$ 的特征值不等式:

$$\max_i |\lambda_i(A + B)| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} + \sqrt{\lambda_{\max}(B^H B)} \quad (2.67)$$

和

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \left(\frac{A^H + A}{2} \right) + \lambda_{\min} \left(\frac{B^H + B}{2} \right) &\leq \operatorname{Re} \lambda_i(A + B) \\ &\leq \lambda_{\max} \left(\frac{A^H + A}{2} \right) + \lambda_{\max} \left(\frac{B^H + B}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

对于具有相同维数的方阵 A 和 B , 有以下关于 AB 特征值的性质:

$$\lambda(AB) = \lambda(BA) \quad (2.69)$$

和

$$\max_i |\lambda_i(AB)| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}(B^H B)} \quad (2.70)$$

对于 $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 并且 $n > m$, 有

$$\lambda(AB) = \lambda(BA) \cup \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{n-m} \Rightarrow \text{trace}(AB) = \text{trace}(BA) \quad (2.71)$$

特别的, 对 $x, z \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\lambda(xz^H) = \underbrace{\{z^H x, 0, 0, \dots, 0\}}_{n-1} \Rightarrow z^H x = \text{trace}(xz^H) \quad (2.72)$$

2.3.3 特殊矩阵

本节里将要讨论一些常用的特殊矩阵。这里特别强调正定和半正定矩阵, 因为它们解许多系统和控制问题时起到重要作用, 尤其是和系统稳定性相关的问题。给定一个 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果当 $i \neq j$ 时有 $a_{ij} = 0$, 则称 A 是对角矩阵, 有时这样来表示:

$$A = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad (2.73)$$

即 $a_{ii} = \alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。同样的, 把分块对角矩阵写成

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = \text{blkdiag}\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \quad (2.74)$$

下面是几类重要的方形矩阵。称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是

- (1) 对称的, 如果 $A^T = A$ (这样矩阵的所有特征值都在实轴上);
- (2) 旋转对称的, 如果 $A^T = -A$ (这样矩阵的所有特征值都在虚轴上);
- (3) 正交的, 如果 $A^T A = A A^T = I$ (这样矩阵的所有特征值在单位圆上);
- (4) 幂零, 如果对整数 k 有 $A^k = 0$ (这样矩阵的所有特征值都在原点);
- (5) 幂等, 如果 $A^2 = A$ (这样矩阵的特征值都是 1 或 0);
- (6) 置换矩阵, 如果 A 是非奇异的, 它的每一列(或行)只有一个等于 1 的非零元素。

称矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是

- (1) Hermitian, 如果 $A^H = A$ (这样矩阵的特征值都在实轴上);
- (2) 酉阵, 如果 $A^H A = A A^H = I$ (这样矩阵的特征值都在单位圆上);
- (3) 正定, 如果对每个非零矢量 $x \in \mathbb{C}^n$ 有 $x^H A x > 0$;
- (4) 半正定, 如果对每个矢量 $x \in \mathbb{C}^n$ 有 $x^H A x \geq 0$;

(5) 负定, 如果对每个非零矢量 $x \in \mathbb{C}^n$ 有 $x^H A x < 0$;

(6) 半负定, 如果对每个矢量 $x \in \mathbb{C}^n$ 有 $x^H A x \leq 0$;

(7) 不定, 如果 A 既不是半正定也不是半负定的。

如果 A 是正定(半正定), 则记 $A > 0$ ($A \geq 0$); 如果 A 是负定(半负定), 则记 $A < 0$ ($A \leq 0$)。给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 如果 $A - B \geq 0$, 则记 $A \geq B$; 如果 $A - B > 0$, 则记 $A > B$ 。

在系统和控制应用中, 对称或 Hermitian 矩阵的正定性和半正定性相关的结果特别让我们感兴趣。下面就给出关于对称或 Hermitian 矩阵, 以及正定矩阵的一些有用结果。

给定一个 Hermitian 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其特征值 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, 即它的所有特征值都是实的。令

$$\lambda_{\min}(A) := \min\{\lambda(A)\}, \quad \lambda_{\max}(A) := \max\{\lambda(A)\} \quad (2.75)$$

则有

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x} \quad (2.76)$$

和

$$-\max_i |\lambda_i(A)| \leq \lambda_{\min}(A) \leq \lambda_i(A) \leq \lambda_{\max}(A) \leq \max_i |\lambda_i(A)| \quad (2.77)$$

假设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 Hermitian 的, 则关于 $A + B$ 的特征值有以下不等式:

$$\max_i |\lambda_i(A + B)| \leq \max_i |\lambda_i(A)| + \max_i |\lambda_i(B)| \quad (2.78)$$

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_i(A + B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B) \quad (2.79)$$

$$\lambda_{\min}(A + B) \leq \min\{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(B), \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(B)\} \quad (2.80)$$

$$\lambda_{\max}(A + B) \geq \max\{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(B), \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(B)\} \quad (2.81)$$

关于 AB 的特征值也有以下不等式:

$$\max_i |\lambda_i(AB)| \leq \max_i |\lambda_i(A)| \cdot \max_i |\lambda_i(B)| \quad (2.82)$$

和

$$\lambda_{\min}(B)\lambda_i(A^2) \leq \lambda_i(ABA) \leq \lambda_{\max}(B)\lambda_i(A^2), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.83)$$

其中 $\lambda_i(\cdot)$ 的排序是 $\lambda_1(\cdot) \geq \lambda_2(\cdot) \geq \dots \geq \lambda_n(\cdot)$ 。

我们知道一个 Hermitian 矩阵是正定的(半正定的), 当且仅当它的所有特征值是正的(非负的); 是负定的(半负定), 当且仅当它的所有特征值都是负的(非正的)。把一个 Hermitian 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 划分为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^H & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

其中 A_{11} 和 A_{22} 是方阵。则 A 是正定的, 当且仅当下面两个条件之一成立:

$$A_{11} > 0, \quad A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} > 0 \quad (2.85)$$

或

$$A_{22} > 0, \quad A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^H > 0 \quad (2.86)$$

连续地使用这个结论,可以证明 A 是正定的,当且仅当它的所有主子式都是正的; A 是半正定的,当且仅当它的所有主子式都是非负的。对负定和半负定矩阵也可以得到相似的结论。

给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 有

$$A \geq B > 0 \Leftrightarrow B^{-1} \geq A^{-1} > 0 \quad (2.87)$$

如果 A 和 B 是可交换的,即 $AB = BA$, 则

$$A > B > 0 \Rightarrow A^k > B^k > 0 \quad (2.88)$$

给定 Hermitian 矩阵 $A, B, S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 并且 $A > 0, B > 0$ 和 $S > 0$, 则

$$ASA > BSB \Rightarrow A > B \quad (2.89)$$

式(2.89)在相反方向一般并不成立,但可以有

$$A > B \Rightarrow \text{存在一个 } S = S^H > 0 \text{ 使得 } ASA > BSB \quad (2.90)$$

在推导线性系统和控制理论的许多结果中,下面几个有关 $A + B$ 和 AB 的特性也是很有用的。给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 假设 A 和 $A + B$ 的特征值以下面的方式排序:

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A) \quad (2.91)$$

和

$$\lambda_1(A + B) \geq \lambda_2(A + B) \geq \dots \geq \lambda_n(A + B) \quad (2.92)$$

如果 $B > 0$, 则有

$$\lambda_i(A + B) > \lambda_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.93)$$

如果 $B \geq 0$, 则有

$$\lambda_i(A + B) \geq \lambda_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.94)$$

给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其中 $B > 0$, 有

$$\lambda(AB) \subset \mathbb{R} \quad \text{和} \quad \lambda(AB^{-1}) \subset \mathbb{R} \quad (2.95)$$

即 AB 和 AB^{-1} 的特征值都是实的, 特别有

$$\lambda_{\min}(AB^{-1}) = \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H B x} \quad (2.96)$$

和

$$\lambda_{\max}(AB^{-1}) = \max_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H B x} \quad (2.97)$$

显然, 如果 A 还是正定的(半正定), 则 AB 和 AB^{-1} 的所有特征值都是正的(非负)。

给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 并且 $A > 0$ 和 $B \geq 0$, 有

$$\lambda_{\min}(B)\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B)\text{trace}(A) \leq \text{trace}(AB) \leq \lambda_{\max}(B)\text{trace}(A) \quad (2.98)$$

2.3.4 奇异值分解

给定一个矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 它的奇异值被定义为

$$\sigma_i(A) := \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^H)}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.99)$$

其中 $k := \min\{m, n\}$, 假设 $A^H A$ 和 AA^H 的特征值以降序方式排列, 显然有 $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_k(A) \geq 0$. 定义 A 的条件数为

$$\text{cond}(A) = \sigma_1(A) / \sigma_k(A) \quad (2.100)$$

令

$$\Delta_1 = \text{diag}\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_k(A)\} \quad (2.101)$$

可以证明存在两个酉矩阵, 使得 A 能够被分解为

$$A = U\Delta V^H \quad (2.102)$$

其中

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{当 } m \geq n \quad (2.103)$$

或

$$\Delta = [\Delta_1 \quad 0], \quad \text{当 } m \leq n \quad (2.104)$$

式(2.102)的分解就是 A 的奇异值分解。我们现在回顾奇异值的一些有用性质。

性质 2.1 给定 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 有

$$\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B) \quad (2.105)$$

如果 A 和 B 都是方阵, 则有

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A)\sigma_{\min}(B) &\leq \sigma_{\min}(AB) \\ &\leq \min\{\sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B), \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B)\} \\ &\leq \max\{\sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B), \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B)\} \\ &\leq \sigma_{\max}(AB) \\ &\leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B) \end{aligned} \quad (2.106)$$

对任意的 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 通过仔细比较 m, n 和 p 值, 可以导出关于 AB 的更有趣结果:

(1) 如果 $n \leq p$, 则

$$\sigma_{\max}(AB) \geq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B) \quad (2.107)$$

(2) 如果 $n \leq m$, 则

$$\sigma_{\max}(AB) \geq \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B) \quad (2.108)$$

(3) 如果 $\min\{m, n\} \leq \min\{m, p\}$, 则

$$\sigma_{\min}(AB) \leq \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B) \quad (2.109)$$

(4) 如果 $\min\{n, p\} \leq \min\{m, p\}$, 则

$$\sigma_{\min}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B) \quad (2.110)$$

(5) 如果 $p \leq n \leq m$ 或 $m \leq n \leq p$, 则

$$\sigma_{\min}(AB) \geq \sigma_{\min}(A)\sigma_{\min}(B) \quad (2.111)$$



可以验证下面的关于矩阵 $A + B$ 的奇异值不等式成立:

$$\sigma_{\max}(A + B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B) \quad (2.112)$$

从式(2.102)的分解中就可以清楚地看出, 矩阵 A 的秩就是 A 的非零奇异值的个数。由于奇异值的分解只需要用到酉变换, 它的条件数为 1, 所以它的数值稳定性良好, 可以精确地确定出矩阵的秩。奇异值分解也可用于计算非奇异矩阵的逆。例如, 如果 A 是非奇异的方阵, 则它的逆为

$$A^{-1} = V\Delta^{-1}U^H \quad (2.113)$$

注意在求 Δ^{-1} 时只需要对标量求逆。奇异值分解的另一个应用就是计算矩阵的伪逆。给定一个矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 它的伪逆(也常称为 Moore-Penrose 逆)的定义是一个唯一的矩阵 $A^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

- (1) $AA^+A = A$;
- (2) $A^+AA^+ = A^+$;
- (3) $AA^+ = (AA^+)^H$;
- (4) $A^+A = (A^+A)^H$ 。

令 q 为 A 的非零奇异值的个数, 则式(2.102)中 A 的奇异值分解可以重新写为

$$A = U\Delta V^H = U \begin{bmatrix} \Delta_* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H \quad (2.114)$$

其中 $\Delta_* = \text{diag}\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_q(A)\}$ 。可以直接证明 A 的伪逆为

$$A^+ = V \begin{bmatrix} \Delta_*^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H \quad (2.115)$$

2.4 范 数

范数用来度量一个矢量或矩阵的长度或大小。范数也可以对信号和有限传递函数来定义。

给定一个在标量域 K 上的线性空间 \mathcal{X} , 任何一个关于 $x \in \mathcal{X}$ 的实值标量函数(通常用 $\|x\|$ 来表示)在满足下面性质的情况下都是在 \mathcal{X} 上的一个范数:

- (1) $\|x\| > 0$, 当 $x \neq 0$ 和 $\|x\| = 0$, 当 $x = 0$;
- (2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in K, \forall x \in \mathcal{X}$;
- (3) $\|x + z\| \leq \|x\| + \|z\|$, $\forall x, z \in \mathcal{X}$ 。

2.4.1 矢量范数

下面的 p 范数是在矢量空间 \mathbb{C}^n 上最常用的范数:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.116)$$

和

$$\|x\|_\infty := \max_i |x_i| \quad (2.117)$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 是 $x \in \mathbb{C}^n$ 的分量。 $\|x\|_2$ 也叫做 x 的 Euclidean 范数, 用 $|x|$ 来简化表示。

2.4.2 矩阵范数

给定一个矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 它的 Frobenius 范数定义为

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i(A) \right)^{1/2} \quad (2.118)$$

A 的 p 范数从矢量的 p 范数诱导而来, 即

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \quad (2.119)$$

具体地说, 对于 $p=[1, \infty)$, 有

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (2.120)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} = \sigma_{\max}(A) \quad (2.121)$$

这也被称为 A 的谱范数, 另有

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.122)$$

可以证明

$$\|A\| \geq \rho(A) \quad (2.123)$$

其中 $\|A\|$ 是 A 的任何范数, $\rho(A)$ 是 A 的谱半径。注意所有这些矩阵范数在酉变换下是不变的。

2.4.3 连续时间信号的范数

对任何 $p \in [1, \infty)$, 令 L_p^m 表示所有满足以下性质的可测信号 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ 所形成的线性空间:

$$\int_0^\infty |g(t)|^p dt < \infty$$

对于任何一个 $g \in L_p^m$, $p \in [1, \infty)$, 其 L_p 范数定义为

$$\|g\|_p := \left(\int_0^\infty |g(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.124)$$

令 L_∞^m 表示所有满足以下性质的信号 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ 所形成的线性空间:

$$|g(t)| < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

对于任何一个 $g \in L^\infty$, 其 l_∞ 范数定义为

$$\|g\|_\infty := \sup_{t \geq 0} |g(t)| \quad (2.125)$$

下面是很有用的信号范数的 Holder 不等式:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (2.126)$$

其中 $1 < p < \infty$ 和 $1/p + 1/q = 1$ 。也可以证明如果 $g(t) \in L_1 \cap L_\infty$, 则 $g(t) \in L_2$ 。

2.4.4 离散时间信号的范数

对任何 $p \in [1, \infty)$, 令 l_p^m 表示所有满足以下性质的离散时间信号 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 所组成的线性空间:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|^p < \infty$$

对任意 $g \in l_p^m, p \in [1, \infty)$, 其 l_p 范数定义为

$$\|g\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.127)$$

令 l_∞^m 表示所有满足以下性质的信号 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 所组成的线性空间:

$$|g(k)| < \infty, \quad \forall k \geq 0$$

对于任意 $g \in l_\infty^m$, 其 l_∞ 范数定义为

$$\|g\|_\infty := \sup_{k \geq 0} |g(k)| \quad (2.128)$$

如果 $g(k) \in l^m$, 则可以证明 $\|g\|_p \leq \|g\|_1 < \infty, p \in [1, \infty)$, 这意味着 $l_1 \subset l_p, p \in [1, \infty)$ 。一般来说, $l^m \subset l_p^m \subset l_\infty^m, p \in (1, \infty)$ 。

2.4.5 连续时间系统的范数

给定一个传递函数为 $G(s)$ 的稳定、正则连续时间系统, 其 H_2 范数定义为

$$\|G\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \text{trace} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)G(j\omega)^H d\omega \right] \right)^{1/2} \quad (2.129)$$

其 H_∞ 范数为

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in [0, \infty)} \sigma_{\max} [G(j\omega)] = \sup_{\|w\|_2=1} \frac{\|h\|_2}{\|w\|_2} \quad (2.130)$$

其中 $w(t)$ 和 $h(t)$ 分别是 $G(s)$ 的输入和输出。

令 (A, B, C, D) 是稳定传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个状态空间实现, 即 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 。可以直接证明当且仅当 $D=0$ 时 $\|G\|_2 < \infty$ 。在 $D=0$ 的情况下, 可以通过解以下两个 Lyapunov 方程之一的唯一解 $P > 0$ 或 $Q > 0$ 来准确地计算 $\|G\|_2$:

$$A^T P + PA = -C^T C, \quad AQ + QA^T = -BB^T \quad (2.131)$$

这时有

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{trace}(B^T P B)} = \sqrt{\text{trace}(C Q C^T)} \quad (2.132)$$

$\|G\|_\infty$ 的计算比较繁琐,可以通过找一个标量 $\gamma > \sigma_{\max}(D)$,使得

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A + B R^{-1} D^T C & \gamma^{-2} B R^{-1} B^T \\ -C^T (I + D R^{-1} D^T) C & -(A + B R^{-1} D^T C)^T \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

在虚轴上至少有一个特征值,其中 $R := \gamma^2 I - D^T D$ 。如果这样的 γ 存在,比如 $\gamma = \gamma^*$,则 $\|G\|_\infty = \gamma^*$; 否则 $\|G\|_\infty = \sigma_{\max}(D)$ 。

另一比较常用的函数范数是 L_∞ 范数。与 H_∞ 范数不同的是, L_∞ 范数不要求给定的传递函数是稳定的。给定一个连续时间系统 $G(s)$, 其 L_∞ 范数定义为

$$\|G\|_{L_\infty} := \sup_{\omega \in [0, \infty)} \sigma_{\max}[G(j\omega)] \quad (2.134)$$

如果 $G(s)$ 是稳定的,则它的 L_∞ 范数与 H_∞ 范数是等价的。

2.4.6 离散时间系统的范数

给定一个稳定、正则的离散时间系统传递函数矩阵 $G(z)$, 其 H_2 范数定义为

$$\|G\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \text{trace} \left[\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) G(e^{j\omega})^H d\omega \right] \right)^{1/2} \quad (2.135)$$

其 H_∞ 范数定义为

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma_{\max}[G(e^{j\omega})] = \sup_{\|w\|_2=1} \frac{\|h\|_2}{\|w\|_2} \quad (2.136)$$

其中 $w(k)$ 和 $h(k)$ 分别是 $G(z)$ 的输入和输出。

假设 (A, B, C, D) 是 $G(z)$ 的一个状态空间实现。在 $D=0$ 的情况下,只要把下面两个 Lyapunov 方程

$$A^T P A - P = -C^T C, \quad A Q A^T - Q = -B B^T \quad (2.137)$$

中的一个 $P > 0$ 或 $Q > 0$ 给解出来就可以计算出 $\|G\|_2$, 即

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{trace}(B^T P B)} = \sqrt{\text{trace}(C Q C^T)} \quad (2.138)$$

$\|G\|_\infty$ 的计算同样是繁琐的,可以利用双线性变换把 $G(z)$ 等价成一个连续时间系统。可以证明在双线性变换下, $G(z)$ 的 H_∞ 范数等于它的连续时间等价系统的 H_∞ 范数。要指明的是,不论是连续时间系统还是离散时间系统,都有

$$\|G_1 G_2\|_\infty \leq \|G_1\|_\infty \cdot \|G_2\|_\infty \quad (2.139)$$

这个特性是不等式(2.105)的一个简单推论。

最后,介绍离散时间系统的 L_∞ 范数。给定一个离散时间系统 $G(z)$, 其 L_∞ 范数定义为

$$\|G\|_{L_\infty} := \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma_{\max}[G(e^{j\omega})] \quad (2.140)$$

同样,如果 $G(z)$ 是稳定的,则它的 L_∞ 范数与 H_∞ 范数是等价的。

第3章 线性系统基础理论

3.1 导 论

本章主要回顾多变量线性时不变系统的一些基本概念。系统响应和稳定性,以及可控性和可观性这些概念已经在文献中被广泛讨论过,读者可以在大多数的线性系统理论入门教科书中找到这方面的介绍(参见文献[30]、[34]、[41]~[45])。在这里,我们将采用文献[30]和[45]中的一些优美的推导。另一方面,有的内容对有些读者或低年级研究生可能比较抽象,如线性系统的不变零点结构(也叫做有限零点结构)和无限零点结构、可逆性结构以及几何子空间。这些将在后面的章节中进行详细讨论。读者也可以在一些关于线性系统的著作和研究论文中找到相关介绍,如文献[37]、[39]、[46]和[47];还有一些研究文献,如文献[48]~[54]。本章将通过众所周知的 Kronecker 规范型来引入有限和无限零点结构,以及可逆性结构的概念,关于几何子空间的内容则大部分取自文献[37]。这些基本概念和结果是本书的主要立足点,对后面章节内容的理解也是很有帮助的。

同样要说明的是,本章的内容基本上是由 Chen 等最近所著的线性系统理论一书^[3,40]中的第3章编辑而成,但删去了其中的所有具体证明。本章对接下来的有关研究一般化的 H_∞ 控制问题求解相当有用,特别是几何子空间的概念是解决 H_∞ 几乎干扰解耦问题的关键所在。

我们主要考虑连续时间线性时不变系统,由下面的状态和输出方程来描述:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是系统输入, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 是系统输出, A 、 B 、 C 和 D 是具有适当维数的常数矩阵。注意 Σ 有一个传递函数(频域表示):

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.2)$$

类似的,离散时间系统的表示为

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (3.3)$$

同样, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是系统输入, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ 是系统输出。相应的结果将会和连续时间系统同步地给出。离散时间系统(3.3)的传递函数为

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (3.4)$$

以下几点是本章要回顾的线性系统的基本概念:

- (1) 线性时不变系统的动态响应;
- (2) 系统稳定性;
- (3) 可控性和可观性;
- (4) 系统可逆性及其结构;
- (5) 有限零点和无限零点结构;
- (6) 几何子空间;
- (7) 系统状态反馈和输出反馈的特性。

3.2 动态响应

本节里要导出线性时不变系统的状态和输出响应的解。首先考虑式(3.1)所示的连续时间系统 Σ 。对于初始条件 $x(0)=x_0$, Σ 的状态变量 $x(t)$ 的解或状态响应可以唯一地表示为

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

其中第一项是由于初始条件 x_0 引起的响应,第二项是外部控制 $u(t)$ 所引起的响应。系统(3.1)对应的输出响应为

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

术语零输入响应指的是在没有输入信号的情况下,由初始状态所引起的响应。对连续时间系统(3.1)来说,术语单位阶跃响应和单位脉冲响应是指在零初始条件下,系统分别对输入信号

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (3.7)$$

所产生的响应,其中 $\delta(t)$ 是单位脉冲函数。

离散时间系统(3.3)的动态响应可以通过一些简单的处理来计算。在初始条件为 $x(0) = x_0$ 时,可以直接把系统(3.3)的状态响应表示为

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i), \quad k \geq 0 \quad (3.8)$$

相应的输出响应为

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i) + Du(k), \quad k \geq 0 \quad (3.9)$$

类似的,术语零输入响应指的是在没有输入信号的情况下,由初始条件所引起的输出响应。术语单位阶跃响应和单位脉冲响应分别指的是式(3.9)在零初始条

件下对输入信号

$$u(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad u(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \delta(k) \quad (3.10)$$

的响应,其中

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

3.3 系统稳定性

系统稳定性,特别是系统的内部稳定性,总是设计有意义控制系统的主题。对于线性系统,不论是连续时间系统(3.1)还是离散时间系统(3.3),系统内部稳定的概念所针对的都是没有外部输入 u 时的状态轨迹。所以对连续时间系统(3.1)来说,内部稳定就是

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.12)$$

的轨迹;对离散时间系统(3.3)就是

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0 \quad (3.13)$$

的轨迹。具体地说,如果连续时间系统(3.1)的状态轨迹对每个有界的初始条件 x_0 都是有界的,则称该系统是临界(marginally)稳定的或在 Lyapunov 意义下稳定的,或者简单地说是稳定的。如果系统(3.12)是稳定的,并对任意初始条件其状态轨迹都满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0 \quad (3.14)$$

则称该系统是渐近稳定的。可以证明连续时间线性系统(3.1)或系统(3.12)是稳定的,当且仅当 A 的特征值在闭左半复平面,并且虚轴上的特征值所对应的 Jordan 块大小均为 1;给定系统是渐近稳定的,当且仅当 A 的特征值在开左半平面,即 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ 。证明这些结论时可以首先把 A 变换成 Jordan 规范型,即

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_q \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

其中 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是一个非奇异的矩阵,这里

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.16)$$

然后有

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & e^{J_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{J_q t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (3.17)$$

其中

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \cdots & t^{n_i-1} e^{\lambda_i t} / (n_i-1)! \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & t^{n_i-2} e^{\lambda_i t} / (n_i-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.18)$$

很显然当 $t \rightarrow \infty$ 时 $e^{J_i t} \rightarrow 0$, 当且仅当 $\lambda_i \in \mathbb{C}^-$, 这样一来对任何 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = P \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{J_1 t} & & \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{J_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{J_q t} \end{bmatrix} P^{-1} x_0 = 0 \quad (3.19)$$

当且仅当 $\lambda_i \in \mathbb{C}^- (i=1, 2, \dots, q)$, 或 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$. 另外, 如果对所有初始条件解都保持有界, 当且仅当 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^0$ 和对 $\lambda_i(A) \in \mathbb{C}^0$ 有 $n_i=1$.

下面的结果对采用 Lyapunov 方法进行稳定性分析至关重要。

定理 3.1 连续时间系统(3.12)是渐近稳定的, 当且仅当对任何给定的正定矩阵 $Q=Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Lyapunov 方程

$$A^T P + PA = -Q \quad (3.20)$$

有一个唯一的正定解 $P=P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. \clubsuit

现在回到式(3.1)所示的系统 Σ . 下面的系统输入和输出特性来自 Desoer 和 Vidyasagar^[31]. 它适用于渐近稳定的系统。

定理 3.2 考虑式(3.1)所示的连续时间系统 Σ , 其中 A 是渐近稳定的. 在 $D=0$ 时, 即 Σ 是严格正则的, 有

- (1) 如果 $u \in L_1^m$, 则 $y \in L_1^p \cap L_\infty^p, \dot{y} \in L_1^p, y$ 绝对连续, 和当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $y(t) \rightarrow 0$;
- (2) 如果 $u \in L_2^m$, 则 $y \in L_2^p \cap L_\infty^p, \dot{y} \in L_2^p, y$ 连续, 和当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $y(t) \rightarrow 0$;
- (3) 如果 $u \in L_\infty^m$, 则 $y \in L_\infty^p, \dot{y} \in L_\infty^p, y$ 是一致连续的;

(4) 如果 $u \in L^\infty$, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时 $u(t) \rightarrow u_\infty \in \mathbb{R}^m$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $y_\infty \in \mathbb{R}^p$, 并且是指数收敛;

(5) 如果 $u \in L^m_q, 1 < q < \infty$, 则 $y \in L^p_q$ 和 $\dot{y} \in L^p_q$ 。

当 $D \neq 0$ 时, 只有这样的结果: 如果 $u \in L^m_q, 1 \leq q < \infty$, 则 $y \in L^p_q$ 。♣

注意式(3.17)和式(3.18), 对于稳定的系统, 可以直接证明存在正的标量 $h_m > 0$ 和 $\alpha > 0$, 使得

$$\|e^{At}\| \leq h_m e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.21)$$

下面讨论离散时间系统的稳定性问题。如果对每个有界的初始条件 x_0 , 系统相应的状态轨迹都是有界的, 则称离散时间系统(3.13)是临界稳定, 或在 Lyapunov 意义下稳定, 或简单地说是稳定的。如果系统是稳定的, 并且对任何初始条件 x_0 , 其相应的状态轨迹 $x(k)$ 都满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0 = 0 \quad (3.22)$$

则称为渐近稳定的。类似地可以证明, 如果 A 的所有特征值在单位圆内, 在单位圆上特征值的 Jordan 块大小为 1, 则离散时间系统(3.13)是稳定的。给定的系统是渐近稳定的当且仅当下面的条件之一成立:

(1) A 的特征值都在单位圆内, 即 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^\circ$;

(2) 对给定的任何正定矩阵 $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 离散时间 Lyapunov 方程

$$A^T P A - P = -Q \quad (3.23)$$

有唯一和正定的解 $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

3.4 可控性和可观性

首先考虑可控性。可控性的概念涉及通过输入来控制一个给定系统的状态轨迹。简单地讲, 如果在有限的时间内, 通过选择合适的控制输入, 系统的状态在状态空间里可以从任何一点转移到其他任何一点, 则称系统是可控的。对于一个线性时不变系统, 这个性质等价于把状态轨迹从任意一点控制到状态空间的原点。具体地说, 考虑以下连续时间系统:

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (3.24)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。

定义 3.1 如果对于任何初始条件 x_0 和任何 $x_1 \in \mathbb{R}^n$, 存在一个时间 $t_1 > 0$ 和控制信号 $u(t), t \in [0, t_1]$, 使得状态轨迹满足 $x(t_1) = x_1$, 则称式(3.24)所示的系统 Σ 是可控的。否则就是不可控的。♣

我们有下面的结论。

定理 3.3 由式(3.24)给定的系统 Σ 是可控的, 当且仅当矩阵

$$W_c(t) := \int_0^t e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau \quad (3.25)$$

对所有 $t > 0$ 是非奇异的。 $W_c(t)$ 被称为 Σ 的 grammian 矩阵。♣

定理 3.4 由式(3.24)给定的系统 Σ 是可控的, 当且仅当

$$\text{rank}(Q_c) = n \quad (3.26)$$

其中

$$Q_c := [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] \quad (3.27)$$

被称为 Σ 的可控矩阵。♣

定理 3.5 由式(3.24)给定的系统 Σ 是可控的, 当且仅当对 A 的每个特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 都满足

$$\text{rank}[\lambda_i I - A \ B] = n \quad (3.28)$$

这个定理就是著名的 PBH (Popov-Belevitch-Hautus) 检验, 是由 Popov^[55]、Belevitch^[56] 和 Hautus^[57] 发现的。♣

我们注意到定理 3.5 建立了系统可控性和系统矩阵 A 的特征结构之间的联系。如果 A 的特征值都满足式(3.28)的条件, 系统就是可控的。另外, 如果 A 有一个或更多的特征值不满足式(3.28)的条件, 系统就是不可控的。因此称 A 中满足式(3.28)的特征值为可控模态, 否则就是不可控模态。在许多控制系统设计方法中, 并不一定需要给定系统是可控的。如果系统所有的不可控模态是稳定的, 也可以很好地控制它。可以通过合适的状态反馈控制使它稳定, 这样的系统就称为可镇定的。为了在后面参考方便, 下面正式定义可镇定的概念。

定义 3.2 如果所有不可控模态是渐近稳定的, 则由式(3.24)给定的系统 Σ 是可镇定的, 否则就称 Σ 是不可镇定的。♣

我们有以下的定理。

定理 3.6 对式(3.1)给定的系统 Σ , 下面两点是等价的:

- (1) 矩阵对 (A, B) 是可镇定的;
- (2) 存在一个 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 所形成的状态反馈律

$$u = Fx \quad (3.29)$$

可使闭环系统渐近稳定, 即 $A + BF$ 的所有特征值都在 C^- 中。♣

类似的, 对下面的无驱动系统 Σ , 我们引入可观(测)性和可检测性的概念:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx \quad (3.30)$$

其中, $y \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, A 和 C 是具有适当维数的定常矩阵。原则上, 如果只利用测量输出 y 就可以重构(或观测)状态变量 x , 就称系统(3.30)是可观(测)的。我们有以下更确切的定义。

定义 3.3 如果存在一个时间 $t_1 > 0$, 使得任何初始状态 $x(0) = x_0$ 都可以从测量输出 $y(t), t \in [0, t_1]$ 中唯一地确定, 则称式(3.30)给定的系统 Σ 是可观的; 否

则就称 Σ 是不可观的。 ♣

我们有下面的结果。

定理 3.7 由式(3.30)给定的系统 Σ 是可观的, 当且仅当矩阵

$$W_o(t) := \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (3.31)$$

对所有 $t > 0$ 是非奇异的。 $W_o(t)$ 被称为 Σ 的可观测 grammian 矩阵。 ♣

下面检验式(3.25)的 $W_c(t)$ 和式(3.31)的 $W_o(t)$ 以及定理 3.3 和定理 3.7 之间的对偶性。很显然, 式(3.30)所示的系统 Σ 是可观的, 当且仅当辅助(对偶)系统

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{A}\hat{x} + \tilde{B}\hat{u}, \quad \hat{x} = A^T \hat{x} + C^T \hat{u} \quad (3.32)$$

是可控的。利用定理 3.4 和定理 3.5 有下面的结果。

定理 3.8 式(3.30)给定的系统是可控的, 当且仅当下面两点之一成立:

(1) Σ 的可观矩阵

$$Q_o := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

是满秩的, 即 $\text{rank}(Q_o) = n$ 。

(2) 对于 A 的每个特征值 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$, 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (3.34)$$

类似的, A 的满足式(3.34)和那些不满足式(3.34)的特征值分别叫做 Σ 的可观模态和不可观模态。下面是系统可检测的定义。 ♣

定义 3.4 如果所有的不可观模态是稳定的, 则称式(3.30)给定的系统 Σ 是可检测的; 否则就是不可检测的。 ♣

可镇定和可检测的概念是很重要的, 因为这是用测量反馈控制律来稳定给定系统的必要和充分条件。我们有下面的结果(见文献[58])。

定理 3.9 对于式(3.1)给定的系统 Σ , 下面的叙述是等价的:

- (1) 矩阵对 (A, C) 是可检测的;
- (2) 存在一个 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 使得 $A + KC$ 的所有特征值都在 C^- 中。

除此以外, 下面的动态系统方程:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - K(y - C\hat{x} - Du), \quad \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.35)$$

在不知道初始条件 x_0 的情况下, 只需要利用系统输出和控制输入就可以渐近估计系统的状态轨迹 $x(t)$, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $e(t) := x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ 。动态方程(3.35)通常被称为 Σ 的状态观测器或估计器。 ♣

最后以对离散时间系统(3.3)的可控性(可镇定性)和可观性(可检测性)概念的一些说明来结束这一节。这些概念都是和连续时间系统相对应的,特别是定理3.4、定理3.5和定理3.8的结果都可以直接应用到离散时间系统中。

3.5 系统可逆性

系统可逆性的问题在许多常见的线性系统理论教科书中并没有涉及,尽管它对几乎每个控制问题都是至关重要的。事实上,对线性时不变系统可以很自然地引出系统可逆性的概念。回顾式(3.1)所示的通常的非严格正则连续时间系统 Σ ,它有式(3.2)所给出的传递函数,即

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.36)$$

不失一般性,假设 $[B^T \ D^T]$ 和 $[C \ D]$ 都是满秩的。定义 Σ 的可逆性如下。

定义 3.5 考虑式(3.1)所示的连续时间系统 Σ ,则

(1) 如果存在一个 s 的有理矩阵函数,比如 $L(s)$,使得

$$L(s)H(s) = I_m \quad (3.37)$$

则称 Σ 是左可逆的。

(2) 如果存在一个 s 的有理矩阵函数,比如 $R(s)$,使得

$$H(s)R(s) = I_p \quad (3.38)$$

则称 Σ 是右可逆的。

(3) 如果它既是左可逆又是右可逆,则称 Σ 是可逆的。

(4) 如果它既不是左可逆又不是右可逆,则称 Σ 是退化(degenerate)的。♣

根据定义可得一个可逆系统必须是一个方的系统,即系统输入数 m 和系统输出数 p 是相等的。然而一个方的系统并不一定是可逆的。遗憾的是文献中通常混淆了可逆性和方的系统。许多人认为方的系统就是可逆的。

在时间域中对左可逆和右可逆的解释如下(见文献[51]和[59])。对于左可逆系统 Σ ,在初始条件 x_0 下,根据 Σ 所产生的输出 y 就可以解出唯一的可产生给定输出 y 的控制信号 u 。对于右可逆系统 Σ ,给定任何信号 $y_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^p$,都可以对 Σ 确定一个控制输入 u 和一个初始条件 x_0 ,使得输出 $y = y_{\text{ref}}$ 。

进一步可注意到存在一些和线性系统左和右可逆相关联的结构,也就是一些整数指数。然而不利用系统的特殊结构型就没有办法引入这些概念。下一节介绍 Σ 的系统矩阵的Kronecker规范型时再讨论这个问题。

最后,离散时间系统可逆性的概念和连续时间系统是完全相同的。

3.6 常态秩,有限零点和无限零点

线性系统的有限零点(也称为不变零点或传输零点)和无限零点(也称为相对

阶)结构在现代控制理论中发挥了重要的作用。众所周知,闭环系统的极点位置决定了控制系统的主要性能,如瞬态响应和调整时间。所幸的是只要开环系统是可控和可观的,闭环系统极点在复平面上的位置就可以随意地配置。另一方面,有限零点的位置对闭环系统的整体性能也有重要的影响。例如,一个非最小相位零点(或不稳定的不变零点)对许多控制系统的性能带来约束。不幸的是有限零点或不变零点在任何状态反馈下都是不变的,所以不好的零点在闭环系统中仍然保留着。因此,正确地理解零点结构对设计控制系统是非常关键的。

不变零点和无限零点(相对阶)的概念对单输入和单输出(SISO)系统来说比较简单。例如,对于具有下面传递函数的 SISO 系统:

$$H(s) = \frac{s(s+1)}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4} \quad (3.39)$$

很容易发现系统在 $s=0$ 和 $s=-1$ 分别有两个有限零点,相对阶为 1。对一般的多输入和多输出(MIMO)系统,有限和无限零点的概念可以非常复杂。文献中对这些零点的定义存在错误。在正式定义 MIMO 系统不变零点之前需要引入系统常态秩(normal rank)的概念。

定义 3.6 考虑式(3.1)给定的系统 Σ 。定义它的传递函数 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 的常态秩,或简记为 $\text{normrank}[H(s)]$,即

$$\text{normrank}[H(s)] = \max\{\text{rank}[H(\lambda)] \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \quad (3.40)$$

♣

在第 4 章中可以看到,只要掌握了系统的结构分解技术,系统常态秩的计算就很简单了。下面引入式(3.1)所示的一般系统 Σ 的不变零点的概念,系统由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征,可以通过 Kronecker 规范型定义 Σ 的(Rosenbrock)系统矩阵^[46]为

$$P_\Sigma(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

定义中没有牵涉到结构重数(见文献[50])和阻塞零点(见文献[60]),后者在多变量线性系统的强镇定方面有很重要的作用。下面给出关于不变零点的定义。

定义 3.7 考虑式(3.1)给定的系统 Σ 。如果

$$\text{rank}\{P_\Sigma(\beta)\} < n + \text{normrank}\{H(s)\} \quad (3.42)$$

则标量 $\beta \in \mathbb{C}$ 是 Σ 的不变零点。如果 $H(\beta) \equiv 0$, 则 $\beta \in \mathbb{C}$ 是 Σ 的阻塞零点。 ♣

当给定的系统是非退化时,我们注意到不变零点就等价于文献中定义的所谓传输零点(见文献[61]和[62])。

显然一个阻塞零点就是不变零点,但是对 MIMO 系统来说,一个不变零点不一定是阻塞零点,然而对 SISO 系统都是相同的。有趣的是文献中还有其他类型的零点定义,如输入解耦零点,即矩阵对 (A, B) 的不可控模态;输出解耦零点,即矩

阵对 (A, C) 的不可观模态;输入-输出解耦零点,即 A 的不可控和不可观特征值。这些零点的集合,包括不变零点和阻塞零点,统称为 Σ 的系统零点。

由定义可见,如果 β 是 Σ 的不变零点,则存在一个非零矢量 $x_R \in \mathbb{C}^n$ 和一个矢量 $w_R \in \mathbb{C}^m$,使得

$$P_{\Sigma}(\beta) \begin{bmatrix} x_R \\ w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ w_R \end{bmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

这里, x_R 和 w_R 分别称为 Σ 的与不变零点 β 相关联的右状态零点方向和右输入零点方向。下面的性质给出了不变零点和零点方向的物理意义。

性质 3.1 令 β 是 Σ 的不变零点,有相应的右状态零点方向 x_R 和右输入零点方向 w_R 。令 Σ 的初始状态为 $x_0 = x_R$,系统的输入为

$$u(t) = w_R e^{\beta t}, \quad t \geq 0 \quad (3.44)$$

则 Σ 的输出始终为零,即 $y(t) = 0, t \geq 0$,以及

$$x(t) = x_R e^{\beta t}, \quad t \geq 0 \quad (3.45)$$

这意味着在适当的初始条件下,在某适当方向和频率下的系统输入信号将完全不能在系统输出中出现。♣

Σ 的无限零点结构既可以用相关的根轨迹理论来定义(参见文献[52]),又可以用传递函数在无穷远处的 Smith-McMillan 零点来定义(参见文献[16]、[46]~[48])。为定义 $H(s)$ 在无穷远处的零点结构,我们可以利用传递函数矩阵 $H(s)$ 在有限频率处零点结构的 Smith-McMillan 描述,即如果有理传递函数 $H(s)$ 有一个 k 阶无穷零点,则 $H(1/z)$ 在 $z=0$ 有同样阶次的有限零点。在无穷远处零点的个数和阶次共同定义了无限零点的结构。

下面对系统矩阵 $P_{\Sigma}(s)$ 引入著名的 Kronecker 规范型,它可以同时显示 Σ 的不变零点结构、可逆结构和无限零点结构。尽管这并不是一件简单的事情(对高阶动态系统是非常困难的),可以证明(见文献[63])存在非奇异的变换 U 和 V ,使得 $P_{\Sigma}(s)$ 可以被分解为

$$UP_{\Sigma}(s)V = \begin{bmatrix} \text{blkdiag}\{sI - J, L_{l_1}, \dots, L_{l_{p_b}}, R_{r_1}, \dots, R_{r_{m_c}}, I - sH, I_{m_0}\} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

如果系统存在冗余的输入和输出,0就是对应的零元素矩阵, J 是 Jordan 规范型,

$sI - J$ 有以下 $\sum_{i=1}^{\delta} \tau_i$ 个矩阵束(pencil)作为对角块:

$$sI_{n_{\beta_i, j}} - J_{n_{\beta_i, j}}(\beta_i) := \begin{bmatrix} s - \beta_i & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & s - \beta_i & -1 \\ & & & & s - \beta_i \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$j=1,2,\dots,\tau_i, i=1,2,\dots,\delta, L_{l_i} (i=1,2,\dots,p_b)$ 是一个 $(l_i+1) \times l_i$ 的双对角矩阵束, 即

$$L_{l_i} := \begin{bmatrix} -1 & & & \\ s & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & & s \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$R_{r_i} (i=1,2,\dots,m_c)$ 是一个 $i \times (i+1)$ 的双对角矩阵束, 即

$$R_{r_i} := \begin{bmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

H 是幂零和 Jordan 型的, $I-sH$ 有以下 m_d 个矩阵束作为对角块:

$$I_{q_i+1} - sJ_{q_i+1}(0) := \begin{bmatrix} 1 & -s & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -s \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad q_i > 0, i = 1, 2, \dots, m_d \quad (3.50)$$

最后 I_{m_0} 中的 m_0 是 D 的秩, 即 $m_0 = \text{rank}(D)$ 。

我们有以下的定义。

定义 3.8 考虑由式(3.1)给定的系统 Σ , 它的系统矩阵 $P_\Sigma(s)$ 具有式(3.46)~式(3.50)的 Kronecker 型, 则有

(1) β_i 是 Σ 的几何重数为 τ_i 、代数重数为 $\sum_{j=1}^n n_{\beta_i, j}$ 的不变零点, 它的零点结构是

$$S_{\beta_i}^*(\Sigma) := \{n_{\beta_i, 1}, n_{\beta_i, 2}, \dots, n_{\beta_i, \tau_i}\} \quad (3.51)$$

如果 $n_{\beta_i, 1} = \dots = n_{\beta_i, \tau_i} = 1$, 则称 β_i 是一个简单不变零点。

(2) 定义 Σ 的左可逆结构为

$$S_L^*(\Sigma) := \{l_1, l_2, \dots, l_{p_b}\} \quad (3.52)$$

(3) 定义 Σ 的右可逆结构为

$$S_R^*(\Sigma) := \{r_1, r_2, \dots, r_{m_c}\} \quad (3.53)$$

(4) 最后, m_0 是 Σ 的 0 阶无限零点的个数。定义 Σ 的阶次高于 0 阶的无限零点结构为

$$S_\infty^*(\Sigma) := \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\} \quad (3.54)$$

则称 Σ 有 m_d 个阶次分别为 q_1, q_2, \dots, q_{m_d} 的无限零点。如果 $q_1 = \dots = q_{m_d}$ 和 $m_0 = 0$, 则称 Σ 有一致(uniform)的秩 q_1 。另一方面, 如果 $m_0 > 0$ 和 $S_\infty^*(\Sigma) = \emptyset$, 则称 Σ 具有一致的秩 0。♣

我们注意到所有的不变零点 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, \delta)$ 和相应的零点结构构成了 Morse \mathcal{J}_1 列^[64]。此外, S_R^* 、 S_L^* 和 S_∞^* 分别对应了 Morse \mathcal{J}_2 、 \mathcal{J}_3 和 \mathcal{J}_4 。同时注意到, 如

果 $S_R^* = \emptyset$, 则 Σ 是左可逆的, 如果 $S_L^* = \emptyset$, 则是右可逆的。

同样的, 连续时间系统结构特性, 如有限零点和无限零点结构, 以及可逆结构都可以很容易地推广到离散时间系统。

3.7 几何子空间

线性系统和控制理论的几何方法在过去的几十年中得到了很多的关注。它始于 20 世纪 70 年代, 并在 80 年代很快发展成熟, 当时人们试图解决干扰解耦问题和几乎干扰解耦问题, 即需要设计适当的控制律以使外部的干扰对被控输出的影响等于零或接近于零(见文献[39]、[65]~[69])。实际上, 线性系统理论中的大部分概念都可以很完美地在几何框架下给出(可以参考 Wonham 的经典著作^[39]和最近的 Trentelman 等的著作^[37])。用几何方法可以很简洁地表示线性系统中的抽象概念。但是理论体系中的各种子空间却很难显式地计算出来。

本节着重介绍文献中常见的一些几何子空间的基本概念, 如弱不可观子空间和强可控子空间。这些几何子空间在解许多控制问题时都起重要作用, 如干扰解耦、 H_2 和 H_∞ 控制。

考虑由式(3.1)给定的连续时间系统 Σ , 并首先关注弱不可观子空间。根据性质 3.1, 存在一个 Σ 的初始状态, 即右状态零点方向, 和相应的控制信号使系统输出始终为零。 Σ 的不变零点的右状态零点方向集合没有覆盖所有这样的初始状态。而 Σ 的弱不可观子空间却满足这一点。

下面是来自 Trentelman 等^[37]的弱不可观子空间的定义和性质。

定义 3.9 考虑由式(3.1)给定的连续时间系统 Σ 。对 Σ 的一个初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 如果存在一个输入信号 $u(t)$, 使得相应的系统输出对所有 $t \geq 0$ 有 $y(t) = 0$, 则称该初始状态是弱不可观的。 Σ 的所有弱不可观测点的集合所形成的子空间称为 Σ 的弱不可观子空间, 用 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 来表示。 ♣

下面的引理将证明从位于 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 内的初始条件出发, 在使得输出 $y(t) = 0$ ($t \geq 0$) 的控制输入作用下, Σ 的状态轨迹始终处在弱不可观子空间 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 内。

引理 3.1 令 x_0 是 Σ 的初始状态, 并且 $x_0 \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$, u 是使得对所有 $t \geq 0$ 有系统输出 $y(t) = 0$ 所对应的输入, 则对所有 $t \geq 0$, 状态轨迹 $x(t) \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 。 ♣

以下来自文献[37]的定理表明弱不可观子空间可以用另一种方式来定义。

定理 3.10 Σ 的弱不可观子空间 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 等价于满足下面条件的最大子空间 \mathcal{V} :

$$(1) \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \mathcal{V} \subset (\mathcal{V} \times 0) + \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \right\}.$$

(2) 存在一个 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 使得 $(A+BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ 和 $(C+DF)\mathcal{V} = 0$. ♣

利用定理 3.10 的结果, 可以进一步定义 Σ 的稳定和不稳定弱不可观子空间。

定义 3.10 考虑由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的系统 Σ , 定义 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 为最大的子空间 \mathcal{V} , 使得

$$(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}, \quad (C + DF)\mathcal{V} = 0 \quad (3.55)$$

并且对 $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $(A + BF)|_{\mathcal{V}}$ 的特征值在 $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ 中。显然, 如果 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$, 则 $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*$ 。进一步定义如果 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^0$, 则 $\mathcal{V}^- := \mathcal{V}^*$; 如果 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^+$, 则 $\mathcal{V}^+ := \mathcal{V}^*$ 。♣

下面的定义描述了一个子空间, 任何从这个子空间内开始的状态轨迹在有限时间内发展到零, 相应的系统输出可以始终为零。这样的子空间叫做 Σ 的可控的弱不可观子空间, 用 $\mathcal{R}^*(\Sigma)$ 表示。

定义 3.11 考虑由式(3.1)给定的连续时间系统 Σ , $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的一个初始状态, 如果存在一个输入信号 $u(t)$ 和 $t_1 > 0$, 使得对所有 $t \in [0, t_1]$, 有系统输出 $y(t) = 0$ 和状态轨迹在 $t = t_1$ 衰减到 $x(t_1) = 0$, 则称该初始状态为可控弱不可观。 Σ 的所有可控弱不可观的点集合所形成的子空间被称为 Σ 的可控弱不可观子空间, 用 $\mathcal{R}^*(\Sigma)$ 表示。♣

显然, 根据定义 3.9 和定义 3.11 可得 $\mathcal{R}^*(\Sigma) \subset \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 。下面引入 Σ 的强可控子空间 $\mathcal{S}(\Sigma)$ 。 \mathcal{S} 和 \mathcal{V} 在 $\mathcal{V}^*(\Sigma') \subset \mathcal{S}^*(\Sigma)^\perp$ 的意义上是对偶的, 其中 Σ' 由矩阵四元组 (A^T, C^T, B^T, D^T) 来表征。 \mathcal{S} 的物理解释非常抽象, 可以参考 Trentelman 等的书^[37]。

定义 3.12 考虑由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的系统 Σ , 定义 Σ 的强可控子空间 $\mathcal{S}^*(\Sigma)$ 为满足

$$(A + KC)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}, \quad \text{Im}(B + KD) \subset \mathcal{S} \quad (3.56)$$

的最小子空间 \mathcal{S} 。对某 $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 由映射 $A + KC$ 在商空间 $\mathbb{R}^n / \mathcal{S}$ 所诱导的特征值包含在 $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ 中。如果 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$, 则令 $\mathcal{S}^* := \mathcal{S}^*$; 如果 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \mathbb{C}^0$, 则令 $\mathcal{S}^- := \mathcal{S}^*$; 如果 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^+$, 则令 $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S}^*$ 。♣

从定义可以非常直观地看出, 可控弱不可观子空间是弱不可观子空间在强可控子空间的部分, 即

$$\mathcal{R}^*(\Sigma) = \mathcal{V}^*(\Sigma) \cap \mathcal{S}^*(\Sigma) \quad (3.57)$$

这的确是正确的(详细证明可参见 Trentelman 等^[37])。另一个常用的子空间(和 \mathcal{R}^* 配对)是分布弱不可观子空间(用 \mathcal{N}^* 表示), 等价于弱不可观子空间和强可控子空间之和, 即

$$\mathcal{N}^*(\Sigma) = \mathcal{V}^*(\Sigma) + \mathcal{S}^*(\Sigma) \quad (3.58)$$

最后, 再定义两个 Σ 的子空间, 这是 Scherer^[20,21] 在处理 H_∞ 几乎干扰解耦问题时最先引入的。

定义 3.13 对于由式(3.1)给定的系统 Σ 和任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 定义

$$\mathcal{V}_\lambda(\Sigma) := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid \exists \omega \in \mathbb{C}^m : 0 = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \omega \end{bmatrix} \right\} \quad (3.59)$$

$$\mathcal{S}_\lambda(\Sigma) := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid \exists \omega \in \mathbb{C}^{n+m} : \begin{bmatrix} \zeta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} \omega \right\} \quad (3.60)$$

如果 λ 是 Σ 的一个不变零点, $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ 就是 Σ 相应的状态零点方向。显然 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma) = \mathcal{V}_\lambda(\Sigma')^\perp$ 。♣

另外需要强调的是, 本节对连续时间定义的所有几何子空间都可以用于离散时间系统。但是 \mathcal{V}^- 、 \mathcal{S}^- 、 \mathcal{V}^+ 和 \mathcal{S}^+ 除外, 对于这些要把相关联的 \mathbb{C}^* 改为 $\mathbb{C}^\circ \cup \mathbb{C}^\circ$ (对前两个子空间) 和 \mathbb{C}^\otimes (对后两个子空间)。

3.8 状态反馈和输出馈入的特性

可以很容易地证明在非奇异状态、输入和输出变换下, 线性时不变系统的稳定性、可控性、可观测性、可逆性, 以及有限和无限零点结构都是不变的。实际上, 这个性质可以使我们在后面的章节中研究出结构分解技术, 这就是对给定的系统构造出非奇异的状态、输入和输出变换, 使得所有的这些结构特性都可以明晰地显现出来。尤其是系统的传递函数在任何非奇异的状态变换下保持不变, 这导致了系统从频域(传递函数)到时域(状态空间表示)的实现非唯一。

本节将研究前面所提到的系统结构特性在两种操作下的表现, 即状态反馈和输出馈入, 这在系统和控制理论中是经常用到的。考虑式(3.1)所示的连续时间系统 Σ , 实施状态反馈就是引入控制律

$$u = Fx + v \quad (3.61)$$

施加到 Σ 上。所产生的闭环系统可表示为

$$\Sigma_F: \begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + Bv \\ y = (C + DF)x + Dv \end{cases} \quad (3.62)$$

即它由一个新的矩阵四元组 $(A + BF, B, C + DF, D)$ 来表征。输出馈入和状态反馈的概念是对偶的。但是很难像式(3.61)那样显式地表示输出馈入的形式。对于给定的 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 我们直接把输出馈入的实施当做产生了一个新的系统 Σ_K , 即由 $(A + KC, B + KD, C, D)$ 矩阵四元组构成的系统。

下面的两个定理表明了 Σ 的结构特性在状态反馈和输出馈入下保持不变, 包括几何子空间。

定理 3.11 考虑由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的系统 Σ , 同时考虑一个状态反馈增益矩阵 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。则由矩阵四元组 $(A + BF, B, C + DF, D)$ 所表征的系统 Σ_F 具有以下特性:

- (1) Σ_F 是可控(可镇定)的系统, 当且仅当 Σ 是可控(可镇定)的系统;

- (2) Σ_F 的常态秩和 Σ 的相同;
- (3) Σ_F 的不变零点结构和 Σ 的相同;
- (4) Σ_F 的无限零点结构和 Σ 的相同;
- (5) Σ_F 是(左或右)可逆或退化,当且仅当 Σ 是(左或右)可逆或退化;
- (6) $\mathcal{V}^*(\Sigma_F) = \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}^*(\Sigma_F) = \mathcal{S}^*(\Sigma)$;
- (7) $\mathcal{R}^*(\Sigma_F) = \mathcal{R}^*(\Sigma)$ 和 $\mathcal{N}^*(\Sigma_F) = \mathcal{N}^*(\Sigma)$;
- (8) $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_F) = \mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma_F) = \mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ 。 ♣

定理 3.12 考虑一个由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的给定系统 Σ , 同时考虑一个输出馈入矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 。则 Σ_K 的矩阵四元组 $(A + KC, B + KD, C, D)$ 有以下性质:

- (1) Σ_K 是可观(可检测)的系统,当且仅当 Σ 是可观(可检测)的系统;
- (2) Σ_K 的常态秩和 Σ 的相同;
- (3) Σ_K 的不变零点结构和 Σ 的相同;
- (4) Σ_K 的无限零点结构和 Σ 的相同;
- (5) Σ_K 是(左或右)可逆或退化,当且仅当 Σ 是(左或右)可逆或退化;
- (6) $\mathcal{V}^*(\Sigma_K) = \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}^*(\Sigma_K) = \mathcal{S}^*(\Sigma)$;
- (7) $\mathcal{R}^*(\Sigma_K) = \mathcal{R}^*(\Sigma)$ 和 $\mathcal{N}^*(\Sigma_K) = \mathcal{N}^*(\Sigma)$;
- (8) $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_K) = \mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma_K) = \mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ 。 ♣

第4章 系统结构分解工具

4.1 导 论

在后续章节中会发现不论是在连续时间系统还是在离散时间系统的 H_∞ 优化问题中,系统的有限和无限零点结构,以及可逆结构在极小值和解的计算中都起着重要作用。所以正确地理解线性系统结构对我们的研究至关重要。

最好的揭示线性系统结构特性的方法是把它们变换到所谓的特殊坐标基中(SCB),这是由 Sannuti 和 Saberi (1987)^[59]、Saberi 和 Sannuti (1990)^[70] 利用 Silverman^[71] 的结构算法研发出来的。虽然,在他们之前 Schumacher(1980)^[66] 也得出一些非常相似的结果。然而在很多情况下 Sannuti 和 Saberi 的原始特殊坐标基不足以描述线性系统的所有细节,特别要指出的是,所有有关特殊坐标基的性质在 Sannuti 和 Saberi 原文献中都没有严格的证明。这些性质的严格数学证明是由 Chen(1998)^[72] 给出的。为了更透彻地考查所给系统,Chen 等^[3,40] 应用一些规范型(如 Jordan 规范型、可控结构规范型,以及稳定/不稳定空间分解^[73])将特殊坐标基进一步细分,从而得到更加完善的系统结构性质。在这一思想指导下,本章中将要复习下面的结果:

(1) 定常方阵的 Jordan 和实 Jordan 规范型,可认为这是自治系统的动态矩阵;

(2) 定常矩阵对的可控结构分解和块对角控制规范型;

(3) 用矩阵三元组或四元组所表示的线性时不变系统的特殊坐标基;

(4) 双线性变换下的连续时间系统和离散时间系统之间结构映射。

这些规范型和特殊坐标基是线性系统的转换器,一旦对一个系统应用该转换器,所有的结构特性都变得清晰和显而易见。

同样略去所有的具体证明。感兴趣的读者可参阅 Chen 等^[3,40] 来了解更完整的线性系统结构分解技术。同时,要特别指出所有这些系统结构分解工具的软件实现都可以在 Lin 等^[74] 的“线性系统工具箱”中找到,有兴趣的读者可以通过以下网站 <http://uav.ece.nus.edu.sg/~bmchen>(或 www.linearsystemskit.net) 免费下载。

最后指出线性系统的特殊坐标基、Jordan 规范型和可控结构分解等技术在文献中被用来解决许多系统和控制问题,如线性系统的方约化(squaring down)和解耦(见文献^[59])、线性系统分解(见文献^[75]和^[76])、阻塞零点和强镇定(见文献

[77])、零点结构配置(见文献[78])、回路传递函数恢复(见文献[79]~[81])、 H_2 最优控制(见文献[82]~[84])、静态测量反馈下的干扰解耦(见文献[85])和带有输入饱和系统的控制(见文献[86]和[87])。这些工具将在本书中解有关 H_∞ 控制问题中得到深入应用。

4.2 Jordan 和实 Jordan 规范型

本节复习定常方阵的 Jordan 规范型和实 Jordan 规范型。首先有下面的定理。

定理 4.1 考虑定常矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。存在一个非奇异变换 $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和整数 k ，使得

$$T^{-1}AT = \text{blkdiag}\{J_1, J_2, \dots, J_k\} \quad (4.1)$$

其中 $J_i (i=1, 2, \dots, k)$ 是一些 $n_i \times n_i$ 的 Jordan 块, 即

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

显然有 $\lambda_i \in \lambda(A) (i=1, 2, \dots, k)$, $\sum_{i=1}^k n_i = n$. ♣

上述定理的结果是众所周知的。该 Jordan 规范型的 Matlab 实现方法可以从 Chen^[88] 和 Lin 等^[74] 中找到。下面的定理可找到实 Jordan 规范型。

定理 4.2 考虑定常矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。存在一个非奇异变换 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和整数 k ，使得

$$P^{-1}AP = \text{blkdiag}\{J_1, J_2, \dots, J_k\} \quad (4.3)$$

其中每个块 $J_i (i=1, 2, \dots, k)$ 有下面的形式: 如果 $\lambda_i \in \lambda(A)$ 是实数, 则

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

如果 $\lambda_i = \mu_i + j\omega_i \in \lambda(A)$ 和 $\bar{\lambda}_i = \mu_i - j\omega_i \in \lambda(A)$; 其中 $\omega_i \neq 0$, 则

$$J_i = \begin{bmatrix} \Lambda_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_i & I_2 \\ & & & \Lambda_i \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} \mu_i & \omega_i \\ -\omega_i & \mu_i \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

上面 $P^{-1}AP$ 的结构就称为实 Jordan 规范型。 ♣

上面定理的证明可以在很多文献中找到(如文献[39]和[89])。

4.3 矩阵对的结构分解

本节首先复习以矩阵对 (A, B) 所表示的线性系统的可控结构分解(controllability structural decomposition, CSD),许多研究工作者在文献中也称其为Brunovsky规范型(参见文献[34],以及本书的英文初版^[1]);但是该分解实际上是Luenberger于1967年发现的^[90],比1970年的Brunovsky结果^[91]早三年发表。由于它和 (A, B) 的可控结构有直接关系,所以我们重新以可控结构分解(CSD)来命名该规范型。接下来对可控矩阵对 (A, B) 引入所谓的块对角控制规范型(block diagonal control canonical form, BDCCF)。CSD和BDCCF在后面一些结果的推导中起关键作用。读者可以在文献[3]和[40]中找到实现这些规范型的具体算法,也可在文献[74]和[88]中找到它们的程序实现。这样特殊形式的 A 和 B 在后面的一般 H_∞ 几乎干扰解耦问题解的构造中起重要作用。

对于一给定矩阵对的可控结构分解和块对角控制规范型,有下面的定理。

定理 4.3(CSD) 对于一定常矩阵对 (A, B) ,其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, B 满秩。存在非奇异的状态和输入变换 T_s 和 T_i ,使得 $(\tilde{A}, \tilde{B}) := (T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i)$ 具有下面的形式:

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{k_m-1} \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

其中 $k_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$, A_0 的维数是 $n_0 := n - \sum_{i=1}^m k_i$,它的特征值是 (A, B) 的不可控模态。而整数集合 $\mathcal{C} := \{n_0, k_1, \dots, k_m\}$ 是 (A, B) 的可控性指数。♣

定理 4.4(BDCCF) 考虑定常矩阵对 (A, B) ,其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, (A, B) 完全可控。则存在一整数 $k \leq m$,一组 κ 个整数 $k_1, k_2, \dots, k_\kappa$,以及非奇异变换 T_s 和 T_i ,使得

$$T_s^{-1}AT_s = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_\kappa \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

和

$$T_s^{-1}BT_i = \begin{bmatrix} B_1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & B_2 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & B_3 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_\kappa & * \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

其中 * 代表一些无关紧要的矩阵, A_i 和 B_i 有下面的控制规范型($i=1, 2, \dots, \kappa$):

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{k_i}^i & -a_{k_i-1}^i & -a_{k_i-2}^i & \cdots & -a_1^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

这里 $a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k_i}^i$ 是一些常数标量, 显然有 $\sum_{i=1}^{\kappa} k_i = n$ 。我们称以上 A 和 B 的结构为块对角控制规范型。 ♣

4.4 特殊坐标基

考虑一般的正则线性时不变系统 Σ_* , 它可以是连续时间系统也可以是离散时间系统, 以矩阵四元组 (A_*, B_*, C_*, D_*) 来表示, 或者是状态空间形式

$$\Sigma_* : \begin{cases} \delta(x) = A_* x + B_* u \\ y = C_* x + D_* u \end{cases} \quad (4.10)$$

如果 Σ_* 是连续时间系统, 则 $\delta(x) = \dot{x}(t)$; 如果 Σ_* 是离散时间系统, 则 $\delta(x) = x(k+1)$ 。同样, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 是 Σ_* 的状态、输入和输出。对于连续时间系统分别代表 $x(t), u(t)$ 和 $y(t)$; 如果 Σ_* 是离散时间系统则分别代表 $x(k), u(k)$ 和 $y(k)$ 。不失一般性, 假设 $[B_*^T \ D_*^T]$ 和 $[C_* \ D_*]$ 都是满秩的。 Σ_* 的传递函数矩阵可表示为

$$H_*(\zeta) = C_*(\zeta I - A_*)^{-1} B_* + D_* \quad (4.11)$$

如果 Σ_* 是连续时间系统, 则 $\zeta = s$ 是 Laplace 变换算子; 如果 Σ_* 是离散时间系统, 则 $\zeta = z$ 是 z 变换算子。很容易证明存在非奇异变换 U 和 V , 使得

$$UD_*V = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

其中 m_0 是矩阵 D_* 的秩。实际上可选 U 为正交矩阵, 后面将利用这一点来计算 γ^* 。因此, 不失一般性, 今后假设 D_* 具有式(4.12)右边的形式。式(4.10)所示的

系统 Σ 可重新写为

$$\begin{cases} \delta(x) = A_* x + [B_{*,0} \quad B_{*,1}] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{*,0} \\ C_{*,1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.13)$$

其中矩阵 $B_{*,0}$ 、 $B_{*,1}$ 、 $C_{*,0}$ 和 $C_{*,1}$ 具有适当的维数。下面给出有关特殊坐标基 (special coordinate basis, SCB) 的定理。

定理 4.5 (SCB) 考虑式(4.10)所示的线性系统 Σ_* , 存在

(1) 和坐标系无关的非负整数 $n_a^-, n_a^0, n_a^+, n_b, n_c, n_d, m_d \leq m - m_0$ 和 $q_i (i=1, 2, \dots, m_d)$;

(2) 非奇异状态、输出和输入变换 Γ_s, Γ_o 和 Γ_i , 使给定系统 Σ_* 在特殊坐标基下显式地展现出有限和无限零点结构。

特殊坐标基由下面的一组方程描述:

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u} \quad (4.14)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix}, \quad x_a = \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \\ x_a^+ \end{bmatrix}, \quad x_d = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m_d} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_d \\ y_b \end{bmatrix}, \quad y_d = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix}, \quad u_d = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m_d} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\delta(x_a^-) = A_{aa}^- x_a^- + B_{0a}^- y_0 + L_{ad}^- y_d + L_{ab}^- y_b \quad (4.17)$$

$$\delta(x_a^0) = A_{aa}^0 x_a^0 + B_{0a}^0 y_0 + L_{ad}^0 y_d + L_{ab}^0 y_b \quad (4.18)$$

$$\delta(x_a^+) = A_{aa}^+ x_a^+ + B_{0a}^+ y_0 + L_{ad}^+ y_d + L_{ab}^+ y_b \quad (4.19)$$

$$\delta(x_b) = A_{bb} x_b + B_{0b} y_0 + L_{bd} y_d, \quad y_b = C_b x_b \quad (4.20)$$

$$\delta(x_c) = A_{cc} x_c + B_{0c} y_0 + L_{cb} y_b + L_{cd} y_d + B_c (E_{ca}^- x_a^- + E_{ca}^0 x_a^0 + E_{ca}^+ x_a^+) + B_c u_c \quad (4.21)$$

$$y_0 = C_{0c} x_c + C_{0a}^- x_a^- + C_{0a}^0 x_a^0 + C_{0a}^+ x_a^+ + C_{0d} x_d + C_{0b} x_b + u_0 \quad (4.22)$$

对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$, 有

$$\delta(x_i) = A_{q_i} x_i + L_{i0} y_0 + L_{id} y_d + B_{q_i} (u_i + E_{ia} x_a + E_{ib} x_b + E_{ic} x_c + \sum_{j=1}^{m_d} E_{ij} x_j) \quad (4.23)$$

$$y_i = C_{q_i} x_i, \quad y_d = C_d x_d \quad (4.24)$$

其中状态 $x_a^-, x_a^0, x_a^+, x_b, x_c$ 和 x_d 的维数分别是 $n_a^-, n_a^0, n_a^+, n_b, n_c$ 和 $n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i$, 而 x_i 的维数对每个 $i = 1, 2, \dots, m_d$ 是 q_i ; 控制向量 u_0, u_d 和 u_c 的维数分别是 m_0, m_d 和 $m_c = m - m_0 - m_d$; 而输出向量 y_0, y_d 和 y_b 的维数分别是 $p_0 = m_0, p_d = m_d$ 和 $p_b = p - p_0 - p_d$; 矩阵 A_{q_i}, B_{q_i} 和 C_{q_i} 具有下面的形式:

$$A_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{q_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{q_i} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.25)$$

假设 x_i 是以 $q_i \leq q_{i+1}$ 方式排序的 ($i=1, 2, \dots, m_d$)。矩阵 L_{id} 具有特殊形式

$$L_{id} = [L_{i1} \quad L_{i2} \quad \dots \quad L_{i, i-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.26)$$

L_{id} 的最后一行全为零。而且

(1) 如果 Σ_* 是连续时间系统, 则

$$\lambda(A_{aa}^-) \subset C^-, \quad \lambda(A_{aa}^0) \subset C^0, \quad \lambda(A_{aa}^+) \subset C^+ \quad (4.27)$$

(2) 如果 Σ_* 是离散时间系统, 则

$$\lambda(A_{aa}^-) \subset C^\circ, \quad \lambda(A_{aa}^0) \subset C^0, \quad \lambda(A_{aa}^+) \subset C^\otimes \quad (4.28)$$

同时, (A_{cc}, B_c) 是可控的, (A_{bb}, C_b) 是可观的。♣

以更紧凑的形式来重写定理 4.5 中矩阵四元组 (A_*, B_*, C_*, D_*) 的特殊坐标基如下:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_* &= \Gamma_s^{-1} A_* \Gamma_s = A_{*,s} + B_{*,0} C_{*,0} \\ &= \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & 0 & L_{ad}^- C_d \\ 0 & A_{aa}^0 & 0 & L_{ab}^0 C_b & 0 & L_{ad}^0 C_d \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & 0 & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd} C_d \\ B_c E_{ca}^- & B_c E_{ca}^0 & B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d E_{da}^- & B_d E_{da}^0 & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0a}^0 \\ B_{0a}^+ \\ B_{0b} \\ B_{0c} \\ B_{0d} \end{bmatrix} [C_{0a}^- \quad C_{0a}^0 \quad C_{0a}^+ \quad C_{0d} \quad C_{0c} \quad C_{0d}] \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_* = \Gamma_s^{-1} B_* \Gamma_i = [B_{*,0} \quad B_{*,s}] = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^0 & 0 & 0 \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\tilde{C}_* = \Gamma_o^{-1} C_* \Gamma_i = \begin{bmatrix} C_{*,0} \\ C_{*,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^0 & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\tilde{D}_* = \Gamma_o^{-1} D_* \Gamma_i = D_{*,s} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

图 4.1 给出了定理 4.5 的特殊坐标基结构图。在这个图中,以双边箭头所表示的信号是一些输出信号 y_i 的线性组合 ($i=0,1,\dots,m_d$),其中双边箭头中有点所表示的信号是所有状态的一些线性组合,而单纯用双边箭头所表示的信号只是输出 y_d 的一些线性组合。矩阵 B_{0a} 、 L_{ab} 、 L_{ad} 和 E_{ca} 将在性质 4.1 中定义。如果 Σ_* 是连续时间系统,▷块表示积分器;如果 Σ_* 是离散时间系统则表示后向位移算子。

从特殊坐标基中可以直观地看出下面几点:

(1) 变量 u_i 通过 q_i 个积分器串(或后向位移算子)控制输出 y_i ,而 x_i 就是和这些在 u_i 和 y_i 之间的积分器(或后向位移算子)相关联的状态。而且 (A_{q_i}, B_{q_i}) 和 (A_{q_i}, C_{q_i}) 分别形成可控和可观测对。这表明 x_i 同时可控可观。

(2) 输出 y_b 和状态 x_b 不受任何输入的直接影响,但可通过输出 y_d 间接控制它。而且 (A_{bb}, C_b) 形成可观测对,这表明状态 x_b 是可观测的。

(3) 状态 x_c 受输入 u_c 直接控制,但没有直接影响任何输出。而且 (A_{cc}, B_c) 形成可控对,这表明状态 x_c 是可控的。

(4) 状态 x_a 既不被任何输入直接控制,也不直接影响任何输出。

下面给出上述特殊坐标基的一些重要性质,这些性质将被广泛应用并贯穿全书。

性质 4.1 系统 Σ_* 是可观测(可检测)的,当且仅当 (A_{obs}, C_{obs}) 对是可观测(可检测)的,其中

$$A_{obs} := \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ B_c E_{ca} & A_{cc} \end{bmatrix}, \quad C_{obs} := \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0c} \\ E_{da} & E_{dc} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

这里

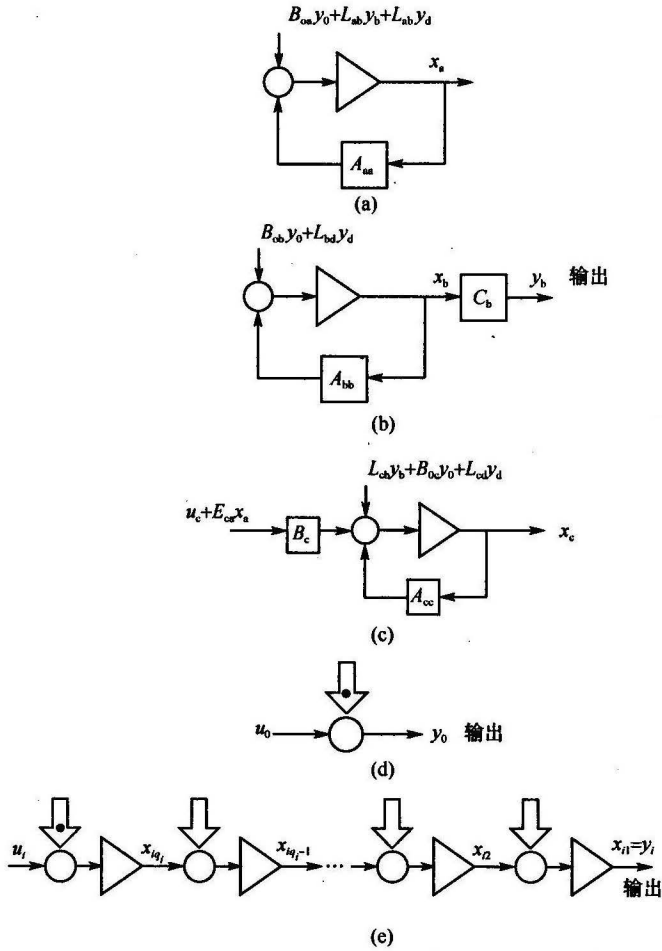


图 4.1 特殊坐标基的块结构图表示

$$A_{aa} := \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 \\ 0 & A_{aa}^0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ \end{bmatrix}, \quad C_{0a} := [C_{0a}^- \quad C_{0a}^0 \quad C_{0a}^+] \quad (4.34)$$

$$E_{da} := [E_{da}^- \quad E_{da}^0 \quad E_{da}^+], \quad E_{ca} := [E_{ca}^- \quad E_{ca}^0 \quad E_{ca}^+] \quad (4.35)$$

同时定义

$$A_{con} := \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad B_{con} := \begin{bmatrix} B_{0a} & L_{ad} \\ B_{0b} & L_{bd} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$B_{0a} := \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0a}^0 \\ B_{0a}^+ \end{bmatrix}, \quad L_{ab} := \begin{bmatrix} L_{ab}^- \\ L_{ab}^0 \\ L_{ab}^+ \end{bmatrix}, \quad L_{ad} := \begin{bmatrix} L_{ad}^- \\ L_{ad}^0 \\ L_{ad}^+ \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

与此类似, Σ_* 是可控(可镇定)的, 当且仅当 $(A_{\text{con}}, B_{\text{con}})$ 是可控(可镇定)的。♣

如第3章所指出的, 由 (A_*, B_*, C_*, D_*) 所表示系统 Σ_* 的不变零点可以用 Σ_* 的 Smith 规范型(Rosenbrock)的系统矩阵来定义, 即

$$P_{\Sigma_*}(\zeta) := \begin{bmatrix} \zeta I - A_* & -B_* \\ C_* & D_* \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

定理 4.5 显式地揭示了 Σ_* 的不变零点和常态秩, 具体地说就是有下列的性质。

性质 4.2

(1) $H_*(\zeta)$ 的常态秩等于 $m_0 + m_d$ 。

(2) Σ_* 的不变零点是 A_{aa} 的特征值, 是 A_{aa}^- , A_{aa}^0 和 A_{aa}^+ 的特征值集合。而且给定系统 Σ_* 是最小相位的, 当且仅当 A_{aa} 只有稳定的特征值; 是临界最小相位的, 当且仅当 A_{aa} 没有不稳定特征值, 但至少有一个临界稳定的特征值; 是非最小相位的, 当且仅当 A_{aa} 至少有一个不稳定的特征值。♣

为了显示各个不变零点的重数, 令 X_a 是非奇异变换矩阵, 使得 A_{aa} 被变换到 Jordan 规范型(见定理 4.1), 即

$$X_a^{-1} A_{\text{aa}} X_a = J = \text{blkdiag}\{J_1, J_2, \dots, J_k\} \quad (4.39)$$

其中 J_i 是一些 $n_i \times n_i$ 的 Jordan 块 ($i=1, 2, \dots, k$), 即

$$J_i = \text{diag}\{\alpha_i, \alpha_i, \dots, \alpha_i\} + \begin{bmatrix} 0 & I_{n_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

对任何给定的 $\alpha \in \lambda(A_{\text{aa}})$, 令 A_{aa} 有 τ_α 个和 α 相关的 Jordan 块, $n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_\alpha}$ 是相应 Jordan 块的维数。现在称 α 是 Σ_* 的不变零点, 具有重数结构 $S_\alpha^*(\Sigma_*)$ (参见文献[54]), 即

$$S_\alpha^*(\Sigma_*) = \{n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_\alpha}\} \quad (4.41)$$

α 的几何重数就是 τ_α , 代数重数是 $\sum_{i=1}^{\tau_\alpha} n_{\alpha,i}$ 。这里要指明 Σ_* 的不变零点和他们的结构就是 Morse 的不变指数列 $\mathcal{J}_1(\Sigma_*)$ [92]。

定理 4.5 特殊坐标基也可以揭示 Σ_* 的无限零点结构(定义 3.8)。

性质 4.3 Σ_* 具有 $m_0 = \text{rank}(D_*)$ 个 0 阶的无限零点。 Σ_* 的无限零点结构(阶次大于 0)为

$$S_\infty^*(\Sigma_*) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\} \quad (4.42)$$

即每个 q_i 相应于 Σ_* 的 q_i 阶无限零点。特别要指出的是, 对于单输入单输出系统 Σ_* , 有 $S_\infty^*(\Sigma_*) = \{q_1\}$, 其中 q_1 是 Σ_* 的相对阶。♣

特殊坐标基还能表现出给定系统 Σ_* 的可逆结构。在 3.5 节和 3.6 节已给出了正式的线性系统右可逆和左可逆的定义和结构。在通常情况下, 当 $[B_*^T \quad D_*^T]$ 和

[C , D ,]有最大秩时,如果存在一个有理矩阵函数 $L_*(\zeta)$,使得

$$L_*(\zeta)H_*(\zeta) = I_m \tag{4.43}$$

则系统 Σ_* 或等价的 $H_*(\zeta)$ 是左可逆的;如果存在一个有理矩阵函数 $R_*(\zeta)$,使得

$$H_*(\zeta)R_*(\zeta) = I_p \tag{4.44}$$

则 Σ_* 或 $H_*(\zeta)$ 是右可逆的;如果既是左可逆又是右可逆,则 Σ_* 是可逆的;如果既不是左可逆又不是右可逆,则 Σ_* 是退化的(degenerate)。

性质 4.4 给定系统是右可逆的,当且仅当 x_b (因此 y_b) 不存在; Σ_* 是左可逆的,当且仅当 x_c (因此 u_c) 不存在; Σ_* 是可逆的,当且仅当 x_b 和 x_c 都不存在; Σ_* 是退化的,当且仅当 x_b 和 x_c 都存在。 ♣

经过修正的特殊坐标基可用来构造给定系统 Σ_* 的 Morse 指数列 $\mathcal{J}_2(\Sigma_*)$ 和 $\mathcal{J}_3(\Sigma_*)$ 。为了显示 $\mathcal{J}_2(\Sigma_*)$,令 X_c 和 X_i 为非奇异矩阵,使得可控对 (A_{cc}, B_c) 被变换到可控结构分解(见定理 4.3),即

$$X_c^{-1}A_{cc}X_c = \begin{bmatrix} 0 & I_{l_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{l_{m_c}-1} \\ * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix}, \quad X_c^{-1}B_cX_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

其中 * 表示常数标量或行向量。然后可得

$$\mathcal{J}_2^*(\Sigma_*) = \{l_1, l_2, \dots, l_{m_c}\} \tag{4.46}$$

这也是 (A_{cc}, B_c) 的可控指数。类似的,有

$$\mathcal{J}_3^*(\Sigma_*) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p_b}\} \tag{4.47}$$

其中 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p_b}\}$ 是可控对 (A_{bb}^T, C_b^T) 的可控性指数。

现在已经很清楚地看出特殊坐标基把状态空间分解成几个不同的部分。事实上,状态空间 \mathcal{X} 被分解为

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_b \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d \tag{4.48}$$

这里 \mathcal{X}_a^- 和稳定的不变零点相关,即 A_{aa}^- 的特征值是 Σ_* 的稳定的不变零点。类似的, \mathcal{X}_a^0 和 \mathcal{X}_a^+ 分别和 Σ_* 处于临界稳定和不稳定区域的不变零点相关。另一方面, \mathcal{X}_b 和右可逆性相关,即系统是右可逆的,当且仅当 $\mathcal{X}_b = \{0\}$ 。而 \mathcal{X}_c 和左可逆性相关,即系统是左可逆的,当且仅当 $\mathcal{X}_c = \{0\}$ 。最后 \mathcal{X}_d 和 Σ_* 的无穷远处零点相关。

特殊坐标基和各种不变几何子空间存在相互关联。在 3.7 节已经给出了弱不可观子空间 \mathcal{V}^x 和强可控子空间 \mathcal{S}^x 的定义(见定义 3.10 和定义 3.12)。我们可以更进一步地对这些子空间进行细分。如果 $C^x = C^- U C^0$, 则令 $\mathcal{V}^- := \mathcal{V}^x$ 和 $\mathcal{S}^- := \mathcal{S}^x$; 如果 $C^x = C^+$, 则 $\mathcal{V}^+ := \mathcal{V}^x$ 和 $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S}^x$; 如果 $C^x = C^0 U C^0$, 则 $\mathcal{V}^0 := \mathcal{V}^x$ 和

$\mathcal{S}^\circ := \mathcal{S}^*$; 如果 $C^* = C^\otimes$, 则 $\mathcal{V}^\otimes := \mathcal{V}^*$ 和 $\mathcal{S}^\otimes := \mathcal{S}^*$; 如果 $C^* = C$, 则 $\mathcal{V}^* := \mathcal{V}^*$ 和 $\mathcal{S}^* := \mathcal{S}^*$.

特殊坐标基下状态矢量各分量的几何解释如下。

性质 4.5 如果 Σ_* 是连续时间系统, 则

- (1) $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^-(\Sigma_*)$;
- (2) $\mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^+(\Sigma_*)$;
- (3) $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^*(\Sigma_*)$;
- (4) $\mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^-(\Sigma_*)$;
- (5) $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^+(\Sigma_*)$;
- (6) $\mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^*(\Sigma_*)$ 。

如果 Σ_* 是连续时间系统, 则

- (1) $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^\circ(\Sigma_*)$;
- (2) $\mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^\otimes(\Sigma_*)$;
- (3) $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^*(\Sigma_*)$;
- (4) $\mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^\circ(\Sigma_*)$;
- (5) $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^\otimes(\Sigma_*)$;
- (6) $\mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^*(\Sigma_*)$ 。

♣

由 Scherer^[20,21] 定义的子空间 $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_*)$ 和 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma_*)$ (见定义 3.13) 也可以利用特殊坐标基很容易地得到。下面给出关于特殊坐标基的性质。

性质 4.6

$$\mathcal{S}_\lambda(\Sigma_*): = \text{Im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} \lambda I - A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{ba} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.49)$$

其中

$$\text{Im}\{Y_{ba}\} = \text{Ker}[C_b(A_{bb} + K_b C_b - \lambda I)^{-1}] \quad (4.50)$$

K_b 是具有适当维数的矩阵, 满足 $A_{bb} + K_b C_b$ 在 λ 没有特征值的约束。由于 (A_{bb}, C_b) 是完全可观的, 这样的 K_b 总是存在的。

$$\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_*): = \text{Im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} X_{a1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & X_{c1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.51)$$

其中矩阵 X_{a1} 的列是下面子空间的基:

$$\{\zeta_a \in \mathbb{C}^{n_a} \mid (\lambda I - A_{aa})\zeta_a = 0\} \quad (4.52)$$

和

$$X_{\alpha} := (A_{\alpha} + B_c F_c - \lambda I)^{-1} B_c \quad (4.53)$$

其中 F_c 是任何具有适当维数的矩阵, 满足 $A_{\alpha} + B_c F_c$ 在 λ 没有特征值的约束。同样, (A_{α}, B_c) 的可控性保证了 F_c 的存在。♣

显然, 如果 $\lambda \notin \lambda(A_{\alpha})$, 则有

$$\mathcal{V}_{\lambda}(\Sigma_*) \subseteq \mathcal{V}^x(\Sigma_*), \quad \mathcal{S}_{\lambda}(\Sigma_*) \supseteq \mathcal{S}^x(\Sigma_*) \quad (4.54)$$

注意到子空间 $\mathcal{V}^x(\Sigma_*)$ 和 $\mathcal{S}^x(\Sigma_*)$ 在 $\mathcal{V}^x(\Sigma'_*) = \mathcal{S}^x(\Sigma_*)^{\perp}$ 的意义上是对偶的, 其中 Σ'_* 由 $(A^{\top}, C^{\top}, B^{\top}, D^{\top})$ 表示, 而且 $\mathcal{S}_{\lambda}(\Sigma_*) = \mathcal{V}_{\lambda}(\Sigma'_*)^{\perp}$ 。

4.5 结构映射和双线性变换

本节给出一般的线性多变量系统在双线性变换和逆双线性变换下结构特性的映射, 并探讨在双线性(逆双线性)变换下, 一般的线性时不变多变量连续时间(离散时间)系统的有限和无限零点结构, 以及可逆性结构是如何映射到离散时间(连续时间)系统的相应结构的。本节的结果实际上是建立连接线性系统理论在连续时间域和离散时间域之间的桥梁。在本书中, 我们要应用双线性变换和它们的结构映射特性的结果来求一般的 Riccati 方程的解和离散时间 H_{∞} 控制问题。

这一节的结果最早出现在文献[93]中。双线性和逆双线性变换在数字控制和信号处理中得到广泛应用。实际上, 对连续时间到离散时间模型转换的需求出现在许多工程领域, 包括采样数字控制系统设计和数字信号处理。因此, 实际应用中有许多离散化过程, 包括输入的零阶和一阶保持器输入近似、脉冲不变变换和双线性变换(见文献[94]和[95])。尽管双线性变换得到了广泛应用, 但是文献中关于连续时间系统的关键结构特性如何过渡到离散时间系统关键特性的全面研究却比较缺乏, 如有限和无限零点结构以及可逆特性。我们知道无限和有限零点结构在控制系统设计中发挥重要作用, 正确地理解双线性变换下的零点结构有助于设计采样数字控制系统, 并且是对现有的零阶保持采样下的有限和无限零点结构映射的一种补充(参见文献[96]和[97])。

本节将全面地研究在双线性(逆双线性)变换下, 即

$$s = a \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \Leftrightarrow z = \frac{a+s}{a-s}$$

一般的连续时间(离散时间)线性时不变系统的结构是如何映射到离散时间(连续时间)系统的, 即有限和无限零点结构、可逆结构以及几何子空间。

4.5.1 连续时间到离散时间的映射

考虑连续时间线性时不变系统:

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.55)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, A, B, C$ 和 D 是适当维数的矩阵。不失一般性,假设 $[C \ D]$ 和 $[B^T \ D^T]$ 是满秩的。 Σ_c 具有传递函数

$$G_c(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.56)$$

对上面的连续时间系统应用双线性变换,替换式(4.56)中的 s 为

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = a \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (4.57)$$

其中 $T=2/a$ 是采样周期。正如式(4.57)所示,双线性变换常被称为 Tustin 近似^[94],而选择

$$a = \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T/2)} \quad (4.58)$$

会得到前曲(pre-warped)Tustin 近似,此时连续时间系统和离散时间系统的频率响应在频率 ω_1 处是重合的。这样就得到了离散时间系统

$$G_d(z) = C \left(a \frac{z-1}{z+1} I - A \right)^{-1} B + D \quad (4.59)$$

下面的引理直接给出了 $G_d(z)$ 的状态空间实现。而该结果也是很普遍的(可参见文献[95]),由于证明过程简短和相对独立,所以也包括进来了。

引理 4.1 在双线性变换(4.57)下,式(4.55)所示的连续时间系统 Σ_c 离散化后的 $G_d(z)$ 的状态空间实现为

$$\Sigma_d: \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) = \tilde{C}x(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases} \quad (4.60)$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{A} = (aI + A)(aI - A)^{-1} \\ \tilde{B} = \sqrt{2a}(aI - A)^{-1}B \\ \tilde{C} = \sqrt{2a}C(aI - A)^{-1} \\ \tilde{D} = D + C(aI - A)^{-1}B \end{cases} \quad (4.61)$$

或者

$$\begin{cases} \tilde{A} = (aI + A)(aI - A)^{-1} \\ \tilde{B} = B \\ \tilde{C} = 2aC(aI - A)^{-2} \\ \tilde{D} = D + C(aI - A)^{-1}B \end{cases} \quad (4.62)$$

这里已经假设 A 在 a 处没有特征值。♣

下面的定理建立了 Σ_c 和 Σ_d 结构特性之间的相互联系,是这一节的主要结果。

定理 4.6 考虑由四元组 (A, B, C, D) 所表征的如式(4.55)所示的连续时间

系统 Σ_c , A 在 a 处没有特征值, 在双线性变换(4.57)下, 式(4.60)所示的离散时间系统 Σ_d 由式(4.61)的四元组所表示。则有下面的性质:

(1) Σ_d 的可控(可镇定)性和可观测(可检测)性:

(1.1) (\tilde{A}, \tilde{B}) 对是可控(可镇定)的, 当且仅当 (A, B) 对是可控(可镇定)的。

(1.2) (\tilde{A}, \tilde{C}) 对是可观测(可检测)的, 当且仅当 (A, C) 对是可观测(可检测)的。

(2) 非奇异状态、输出和输入变换, 以及状态反馈和输出馈入下的性质:

(2.1) 对任何给定的非奇异状态、输出和输入变换 T_s, T_o 和 T_i , 四元组

$$(T_s^{-1}\tilde{A}T_s, T_s^{-1}\tilde{B}T_i, T_o^{-1}\tilde{C}T_s, T_o^{-1}\tilde{D}T_i) \quad (4.63)$$

是连续时间系统

$$(T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i, T_o^{-1}CT_s, T_o^{-1}DT_i) \quad (4.64)$$

在双线性变换(4.57)下的结果。

(2.2) 对任意使得 $A+BF$ 在 a 没有特征值的 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 定义一个非奇异矩阵

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i &:= I + F(aI - A - BF)^{-1}B \\ &= [I - F(aI - A)^{-1}\hat{B}]^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned} \quad (4.65)$$

和一个定常矩阵

$$\tilde{F} := \sqrt{2a}F(aI - A - BF)^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.66)$$

则在双线性变换(4.57)下, 由

$$(A + BF, B, C + DF, D) \quad (4.67)$$

所表示的连续时间系统 Σ_{cf} 被映射成由

$$(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}, \tilde{B}\tilde{T}_i, \tilde{C} + \tilde{D}\tilde{F}, \tilde{D}\tilde{T}_i) \quad (4.68)$$

所表示的离散时间系统 Σ_{df} 。注意这里的 Σ_{cf} 是由 Σ_c 和状态反馈增益矩阵 F 所形成的闭环系统, 而 Σ_{df} 是由 Σ_d 和状态反馈增益矩阵 \tilde{F} , 以及非奇异输入变换 \tilde{T}_i 所形成的闭环系统。

(2.3) 对任意使得 $A+KC$ 在 a 没有特征值的 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 定义一个非奇异矩阵

$$\tilde{T}_o := [I + C(aI - A - KC)^{-1}K]^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (4.69)$$

和一个定常矩阵

$$\tilde{K} := \sqrt{2a}(aI - A - KC)^{-1}K \quad (4.70)$$

则在双线性变换(4.57)下, 由

$$(A + KC, B + KD, C, D) \quad (4.71)$$

所表示的连续时间系统 Σ_{ck} 被映射成由

$$(\tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{K}\tilde{D}, \tilde{T}_o^{-1}\tilde{C}, \tilde{T}_o^{-1}\tilde{D}) \quad (4.72)$$

所表示的离散时间系统 Σ_{dk} 。注意这里的 Σ_{ck} 是由 Σ_c 和输出馈入增益矩阵 K 所形成的闭环系统, 而 Σ_{dk} 是由 Σ_d 和输出馈入增益矩阵 \tilde{K} , 以及非奇异输出变换 \tilde{T}_o 所

形成的闭环系统。

(3) Σ_d 的可逆性和结构不变指数列 \mathcal{J}_2 和 \mathcal{J}_3 :

(3.1) $\mathcal{J}_2(\Sigma_d) = \mathcal{J}_2(\Sigma_c)$ 和 $\mathcal{J}_3(\Sigma_d) = \mathcal{J}_3(\Sigma_c)$ 。

(3.2) Σ_d 是左(右)可逆的, 当且仅当 Σ_c 是左(右)可逆的。

(3.3) Σ_d 是可逆(退化)的, 当且仅当 Σ_c 是可逆(退化)的。

(4) Σ_d 的不变零点和相应的结构由下面两部分组成:

(4.1) 令 Σ_c 的无限零点结构(高于0阶)为 $S_\infty^*(\Sigma_c) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}$ 。则 $z = -1$ 是 Σ_d 的有限或不变零点并具有 $S_{-1}^*(\Sigma_c) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}$ 之重数结构。

(4.2) 令 $s = a \neq a$ 是 Σ_c 的一个不变零点并具有 $S_a^*(\Sigma_c) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}$ 之重数结构。则 $z = \beta = (a + \alpha)/(a - \alpha)$ 是离散时间系统 Σ_d 的一个不变零点并具有 $S_\beta^*(\Sigma_d) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}$ 之重数结构。

(5) Σ_d 的无限零点结构由下面两部分组成:

(5.1) 令 $m_0 = \text{rank}(D)$, m_d 是 Σ_c 的高于0阶的无限零点总数。同时令 τ_a 是 Σ_c 在 $s = a$ 的不变零点的几何重数。则有 $\text{rank}(\bar{D}) = m_0 + m_d - \tau_a$ 。

(5.2) 令 $s = a$ 是 Σ_c 的一个不变零点且具有 $S_a^*(\Sigma_c) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}$ 之重数结构。则 Σ_d 有一个无限零点(高于0阶)结构 $S_\infty^*(\Sigma_d) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}$ 。

(6) 几何子空间的映射为:

(6.1) $\mathcal{V}^+(\Sigma_c) = \mathcal{V}^\circ(\Sigma_d)$ 。

(6.2) $\mathcal{V}^+(\Sigma_c) = \mathcal{V}^\circ(\Sigma_d)$ 。 ♣

我们有以下两个有趣的观察。第一个是关于 Σ_d 的最小相位和非最小相位性质的, 而第二个则是在采样周期 T 趋于零时(或等价的 $a \rightarrow \infty$) Σ_d 的渐近性质。

观察 4.1 考虑一般的连续时间系统 Σ_c 和在双线性变换(4.57)下的离散时间系统 Σ_d , 则根据定理 4.6 的(4)可得

(1) Σ_d 的不变零点都在单位圆内, 当且仅当 Σ_c 的所有不变零点都在开左半平面, 并且没有高于0阶的无限零点。

(2) Σ_d 在单位圆上有不变零点, 当且仅当 Σ_c 在虚轴上有不变零点, 和 / 或 Σ_c 至少有一个高于0阶的无限零点。

(3) Σ_d 在单位圆外有不变零点, 当且仅当 Σ_c 在开右半平面有不变零点。 ♣

观察 4.2 考虑一般的连续时间系统 Σ_c 和在双线性变换(4.57)下的离散时间系统 Σ_d 。作为定理 4.6 的结果, Σ_d 在采样周期 T 趋于零时(但不等于零)具有下面的渐近性质:

(1) Σ_d 没有高于0阶的无限零点, 即从输入到输出没有延迟。

(2) 如果 Σ_c 有任意的高于0阶的无限零点, 则 Σ_d 在 $z = -1$ 有适当重数结构的不变零点。

(3) 如果 Σ_d 还有其他不变零点, 则趋向点 $z = 1$ 。更为有趣的是 Σ_d 和 Σ_c 的稳

定不变零点相对应的不变零点总是稳定的,并且从单位圆内接近点 $z = 1$ 。相反的, Σ_d 的相应于 Σ_c 的不稳定不变零点总是不稳定的,并从单位圆外接近点 $z = 1$ 。最后 Σ_c 在虚轴上的不变零点总是被映射到单位圆上并趋向点 $z = 1$ 。♣

4.5.2 离散时间到连续时间的映射

本节中给出和 4.5.1 节相似的结果,但所进行的是由离散时间系统到连续时间系统的逆双线性变换。我们从离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_d$ 开始,它的描述为

$$\tilde{\Sigma}_d: \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) = \tilde{C}x(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases} \quad (4.73)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 和 \tilde{D} 是具有适当维数的矩阵。不失一般性,假设 $[\tilde{C} \ \tilde{D}]$ 和 $[\tilde{B}^T \ \tilde{D}^T]$ 都是满秩的。 $\tilde{\Sigma}_d$ 有传递函数

$$H_d(z) = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \quad (4.74)$$

相应于式(4.57)的逆双线性变换就是把式(4.74)中的 z 替换为

$$z = \frac{\dot{a} + s}{a - s} \quad (4.75)$$

从而得到下面的连续时间系统:

$$H_c(s) = \tilde{C}\left(\frac{a+s}{a-s}I - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \quad (4.76)$$

下面的引理和引理 4.1 类似,给出了 $H_c(s)$ 的状态空间实现。

引理 4.2 式(4.73)所示的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_d$ 在逆双线性变换(4.75)下所得到的连续时间系统 $H_c(s)$ 的状态空间实现为

$$\tilde{\Sigma}_c: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.77)$$

其中

$$\begin{cases} A = a(\tilde{A} + I)^{-1}(\tilde{A} - I) \\ B = \sqrt{2a}(\tilde{A} + I)^{-1}\tilde{B} \\ C = \sqrt{2a}\tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-1} \\ D = \tilde{D} - \tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-1}\tilde{B} \end{cases} \quad (4.78)$$

或者

$$\begin{cases} A = a(\tilde{A} + I)^{-1}(\tilde{A} - I) \\ B = \tilde{B} \\ C = 2a\tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-2} \\ D = \tilde{D} - \tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-1}\tilde{B} \end{cases} \quad (4.79)$$

这里显然假设了矩阵 \tilde{A} 在 -1 没有特征值。♣

下面的定理与定理 4.6 对称。

定理 4.7 考虑由四元组 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 所表征的如式(4.73)所示的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_d$, 其中矩阵 \tilde{A} 在 -1 处没有特征值。在逆双线性变换(4.75)下所得到的式(4.77)所示的连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_c$ 。由式(4.78)的四元组 (A, B, C, D) 所表示。则有以下性质:

(1) $\tilde{\Sigma}_c$ 的可控(可镇定)和可观测(可检测)性:

(1.1) (A, B) 对是可控(可镇定的), 当且仅当 (\tilde{A}, \tilde{B}) 是可控(可镇定的)。

(1.2) (A, C) 对是可观测(可检测)的, 当且仅当 (\tilde{A}, \tilde{C}) 是可观测(可检测)的。

(2) 非奇异状态、输出和输入变换, 以及状态反馈和输出馈入下的性质:

(2.1) 对任何非奇异状态、输出和输入变换 T_s, T_o 和 T_i , 四元组

$$(T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i, T_o^{-1}CT_s, T_o^{-1}DT_i) \quad (4.80)$$

是离散时间系统

$$(T_s^{-1}\tilde{A}T_s, T_s^{-1}\tilde{B}T_i, T_o^{-1}\tilde{C}T_s, T_o^{-1}\tilde{D}T_i) \quad (4.81)$$

在逆双线性变换(4.75)下得到的连续时间系统。

(2.2) 对任意的 $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 其中 $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ 在 -1 没有特征值, 定义一个非奇异矩阵

$$T_i := I - \tilde{F}(I + \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})^{-1}\tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4.82)$$

和一个定常矩阵

$$F := \sqrt{2a}\tilde{F}(I + \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.83)$$

则在逆双线性变换(4.75)下, 由

$$(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}, \tilde{B}, \tilde{C} + \tilde{D}\tilde{F}, \tilde{D}) \quad (4.84)$$

所表示的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_{df}$ 被映射到由

$$(A + BF, BT_i, C + DF, DT_i) \quad (4.85)$$

所表示的连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_{cf}$ 。注意 $\tilde{\Sigma}_{df}$ 是由 $\tilde{\Sigma}_d$ 和状态反馈增益矩阵 \tilde{F} 所形成的闭环系统, 而 $\tilde{\Sigma}_{cf}$ 是由 $\tilde{\Sigma}_d$ 和状态反馈增益矩阵 F , 以及非奇异状态输入变换 T_i 所形成的闭环系统。

(2.3) 对任意使得 $\tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C}$ 在 -1 没有特征值的 $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 定义一个非奇异矩阵

$$T_o := [I - \tilde{C}(I + \tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C})^{-1}\tilde{K}]^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (4.86)$$

和一个定常矩阵

$$K := \sqrt{2a}(I + \tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C})^{-1}\tilde{K} \quad (4.87)$$

则在逆双线性变换(4.75)下, 由

$$(\tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{K}\tilde{D}, \tilde{C}, \tilde{D}) \quad (4.88)$$

所表示的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_{dk}$ 被映射到由

$$(A + KC, B + KD, T_o^{-1}C, T_o^{-1}D) \quad (4.89)$$

所表示的连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_{ck}$ 。注意 $\tilde{\Sigma}_{dk}$ 是由 $\tilde{\Sigma}_d$ 和输出馈入增益矩阵 \tilde{K} 所形成的闭

环系统,而 $\tilde{\Sigma}_{\alpha K}$ 是由 $\tilde{\Sigma}_c$ 和输出馈入增益矩阵 K ,以及非奇异输出变换 T 。所形成的闭环系统。

(3) $\tilde{\Sigma}_c$ 的可逆性和结构不变指数列 \mathcal{J}_2 和 \mathcal{J}_3 :

(3.1) $\mathcal{J}_2(\tilde{\Sigma}_c) = \mathcal{J}_2(\tilde{\Sigma}_d)$ 和 $\mathcal{J}_3(\tilde{\Sigma}_c) = \mathcal{J}_3(\tilde{\Sigma}_d)$ 。

(3.2) $\tilde{\Sigma}_c$ 是左(右)可逆的,当且仅当 $\tilde{\Sigma}_d$ 是左(右)可逆的。

(3.3) $\tilde{\Sigma}_c$ 是可逆(退化)的,当且仅当 $\tilde{\Sigma}_d$ 是可逆(退化)的。

(4) $\tilde{\Sigma}_c$ 的不变零点和相应的结构由下面两部分组成:

(4.1) 令 $\tilde{\Sigma}_d$ 的无限零点结构(高于 0 阶)为 $S_{\infty}^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}$ 。则 $s = a$ 是 $\tilde{\Sigma}_c$ 的一个不变零点并具有 $S_a^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}$ 之重数结构。

(4.2) 令 $z = \alpha \neq -1$ 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 的一个不变零点并具有 $S_\alpha^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_\alpha}\}$ 之重数结构。则 $s = \beta = a(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$ 是对应连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_c$ 的一个不变零点并具有 $S_\beta^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_\alpha}\}$ 之重数结构。

(5) $\tilde{\Sigma}_c$ 的无限零点结构由下面两部分组成:

(5.1) 令 $m_0 = \text{rank}(\tilde{D})$, m_d 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 的高于 0 阶的无限零点的总数, τ_{-1} 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 在 $z = -1$ 不变零点的几何重数,则可得 $\text{rank}(D) = m_0 + m_d - \tau_{-1}$ 。

(5.2) 令 $z = -1$ 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 的一个不变零点且具有 $S_{-1}^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{n_{-1,1}, n_{-1,2}, \dots, n_{-1,\tau_{-1}}\}$ 之重数结构,其对应的连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_c$ 则有一个无限零点(高于 0 阶)结构 $S_{\infty}^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{n_{-1,1}, n_{-1,2}, \dots, n_{-1,\tau_{-1}}\}$ 。

(6) 几何子空间的映射:

(6.1) $\mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_d) = \mathcal{V}^+(\tilde{\Sigma}_c)$ 。

(6.2) $\mathcal{W}^\circ(\tilde{\Sigma}_d) = \mathcal{W}^+(\tilde{\Sigma}_c)$ 。



第 5 章 H_∞ 控制基本理论

5.1 导 论

本章的主要目的是回顾 H_∞ 控制问题以及与该问题有关的一些基本理论和结果,如 H_∞ 控制问题解的存在条件等。本章将着重介绍所谓的规范化和一般化 H_∞ 控制问题在本质上的差异以及一些常见的鲁棒控制问题。对于连续时间系统,规范化的 H_∞ 控制问题(即所谓的 regular case)已经由 Doyle、Glover、Khar-gonekar 和 Francis(DGKF)在他们著名的文章中^[14]得到解决,特别要提出的是 Tadmor 几乎同时也在文献^[24]中单枪匹马解决了这个问题,还有 Zhou 等^[25]所著的书也是这方面难得的一本好参考书。至于更一般的 H_∞ 控制问题,即所谓的一般化问题(singular case),对于在虚轴上没有不变零点的连续时间系统,Stoorvogel 和 Trentelman^[98]、Stoorvogel^[22]给出了问题解的存在条件,至于系统在虚轴上有不变零点,Scherer 则在文献^{[19]~[21]}中给出了问题解存在的充分必要条件。关于离散时间系统的 H_∞ 控制问题,相应的结果在文献^[22]和^[23]中已有报道。这些结果将是本书后面章节的基础。

5.2 H_∞ 控制问题

在传统的反馈控制理论中,一般有如图 5.1 所示的系统结构图。

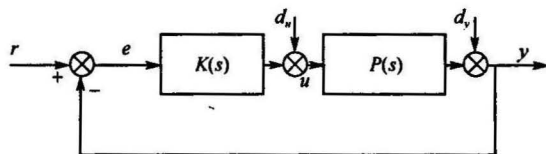


图 5.1 传统的反馈系统结构图

图中 $P(s)$ 是被控对象, $K(s)$ 是待设计的控制器, y 是测量输出, u 是控制器的输出信号。对于这样一种结构,控制器 $K(s)$ 可以基于不同的目标来进行设计。如果是跟踪性能,则需要使得参考输入信号 r 和输出信号 y 之间的误差 e 尽可能小;如果是抑制扰动对系统的影响,则需要设计控制器 $K(s)$ 使得控制信号扰动 d_u 和测量信号扰动 d_y 对系统的影响尽可能小,但是这两种扰动是从不同的点进入系统,且在大多数情况下,它们拥有不同的频域分布,一般很难设计一个控制器 $K(s)$ 同时

使得两者对系统的影响都变小;如果是鲁棒稳定问题,则控制器 $K(s)$ 要使得对象 $P(s)$ 在一定的摄动范围内都保持闭环系统的内稳定,而这一要求又和系统跟踪性能的追求相矛盾。由此可见,控制器 $K(s)$ 的设计需要根据不同的控制要求进行。那么有没有可能找到一种方法来统一进行控制器的设计呢? 观察图 5.1 的结构,我们将信号分成 4 类:一类是从外部进入的,如 r, d_u 和 d_y , 这里包括可测量到的和不可测量到的;第二类是可测量到的,如 y, r 和 u ; 第三类是控制器的输入和输出信号,如 r 和 y ; 第四类就是所谓的性能变量,如 e , 表示跟踪的性能。如果把

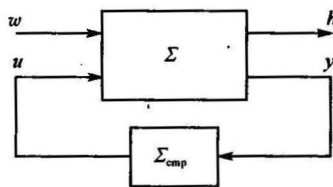


图 5.2 广义系统结构

这四类信号的关系用图 5.2 的结构来进行联系,则得到了广义系统结构,在数学上也称为线性分式变换。图 5.2 中 Σ 是广义对象; Σ_{comp} 是待设计的控制器或补偿器; w 是外来的信号,大多数情况下是扰动; h 是性能变量,代表对控制系统性能的要求,所以也称为被控输出; y 是可测量到的并且是补偿器的输入信号; u 是补偿器产生的输出信号,作用在广义对象上时,能够使性能变量 h 符合设计要求。与传统的图 5.1 结构相比较,图 5.2 结构更一般化并可以把不同的设计问题纳入到统一的框架下进行。不论是进行跟踪控制还是干扰抑制,都可以转换到图 5.2 的结构下来进行。所以只要针对广义系统结构研究出控制器的设计方法,就可以处理不同的控制问题。这就是广义系统结构的优点,也是鲁棒控制理论的主要框架。

用状态方程来研究广义系统结构是比较方便的,即

$$\Sigma: \begin{cases} \delta(x) = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1x + D_{11}u + D_{12}w \\ h = C_2x + D_{21}u + D_{22}w \end{cases} \quad (5.1)$$

如果 Σ 是连续时间系统,则 $\delta(x) = \dot{x}(t)$; 如果 Σ 是离散时间系统,则 $\delta(x) = x(k+1)$ 。状态 $x \in \mathbb{R}^n$, 控制输入 $u \in \mathbb{R}^m$, 外部扰动输入 $w \in \mathbb{R}^q$, 测量输出 $y \in \mathbb{R}^p$, Σ 的被控输出 $h \in \mathbb{R}^l$ 。如果 Σ 是连续时间系统,它们就分别代表 $x(t), u(t), w(t), y(t)$ 和 $h(t)$; 如果 Σ 是离散时间系统,就分别代表 $x(k), u(k), w(k), y(k)$ 和 $h(k)$ 。控制器或补偿器的状态方程可表示为

$$\Sigma_{\text{comp}}: \begin{cases} \delta(v) = A_{\text{comp}}v + B_{\text{comp}}y \\ u = C_{\text{comp}}v + D_{\text{comp}}y \end{cases} \quad (5.2)$$

其中 v 是补偿器的状态, $A_{\text{comp}}, B_{\text{comp}}, C_{\text{comp}}$ 和 D_{comp} 都是需要设计的补偿器参数矩阵。补偿器的阶次也是可以预先设计的,通常有全阶(和广义对象的阶次一样)和降阶(低于广义对象的阶次)和广义对象一样有连续和离散两种情况。为方便以后章节参考和引用,我们用 Σ_p 和 Σ_Q 分别表示由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 和 (A, E, C_1, D_1) 构成的子系统。

不失一般性,假设矩阵对 (A, B) 是可镇定的(stabilizable)和 (A, C_1) 是可检测的(detactable)。同样也可以假设广义系统 Σ 的 $D_{11}=0$ 。如果 $D_{11} \neq 0$,则可定义一个新的测量输出

$$y_{\text{new}} = y - D_{11}u = C_1x + D_1w \quad (5.3)$$

如果对 y_{new} 设计控制器

$$u = K(s)y_{\text{new}} \quad (5.4)$$

则可用下面的控制律来实现利用原来输出 y 的反馈:

$$u = [I + K(s)D_{11}]^{-1}K(s)y \quad (5.5)$$

故在本书后续章节中,除非特别说明,一般假设广义系统 Σ 的 D_{11} 为0。

简单地说, H_∞ 控制问题就是在图5.2结构下,设计一个控制器 Σ_{cmp} ,使得

(1)由广义对象 Σ 和 Σ_{cmp} 所形成的闭环系统是内稳定的,这是控制系统的最基本需求;

(2)从扰动 w 到被控输出 h 的传递函数的 H_∞ 范数满足预先给定的要求。

对于内稳定的要求(1),消去式(5.1)和式(5.2)中的 y 和 u ,可得闭环系统状态方程的系统矩阵为

$$A_e = \begin{bmatrix} A + BD_{\text{cmp}}C_1 & BC_{\text{cmp}} \\ B_{\text{cmp}}C_1 & A_{\text{cmp}} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

所以只要矩阵 A_e 是稳定的,则称闭环系统是内稳定的。下面来看一种特殊形式的控制器,即所谓的观测器型控制器。它是由两个增益矩阵组成的动态控制器。一个是状态增益矩阵 F ,另一个是观测器增益矩阵 L ,而控制器的形式是

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = (A + BF + LC)v - Ly \\ u = Fv \end{cases} \quad (5.7)$$

即 $A_{\text{cmp}} = A + BF + LC_1$, $B_{\text{cmp}} = -L$, $C_{\text{cmp}} = F$, $D_{\text{cmp}} = 0$ 。把这些矩阵代入式(5.6)可得

$$A_e = \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC_1 & A + BF + LC_1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

不难证明 A_e 和下面的矩阵相似:

$$\begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC_1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

可见要使闭环系统内稳定,只要 $A + BF$ 和 $A + LC_1$ 是稳定的矩阵就可以了。在后面的 H_∞ 控制器设计中,采用的就是观测器型控制器,所以内稳定问题就是要选择合适的两个增益矩阵 F 和 L 。

关于 H_∞ 范数的要求,首先不难推导从 w 到 h 的闭环传递函数矩阵为

$$T_{hw}(z) = C_e(zI - A_e)^{-1}B_e + D_e \quad (5.10)$$

其中

$$B_e := \begin{bmatrix} E + BD_{\text{cmp}}D_1 \\ B_{\text{cmp}}D_1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$C_e := [C_2 + D_2D_{\text{cmp}}C_1 \quad D_2C_{\text{cmp}}], \quad D_e := D_2D_{\text{cmp}}D_1 + D_{22} \quad (5.12)$$

不难注意到,如果 Σ_{cmp} 是一个系统状态反馈控制器,即 $u = Fx$,那么从 w 到 h 的闭环传递函数矩阵为

$$T_{hw}(\zeta) = (C_2 + D_2F)(\zeta I - A - BF)^{-1}E + D_{22} \quad (5.13)$$

如果 Σ_{cmp} 是一个系统全信息反馈控制器,即 $u = F_1x + F_2w$,那么从 w 到 h 的闭环传递函数矩阵可表示为

$$T_{hw}(\zeta) = (C_2 + D_2F)(\zeta I - A - BF)^{-1}(E + BF_2) + (D_{22} + D_2F_2) \quad (5.14)$$

为了方便后面的章节参考之需,我们罗列以下几个相关的定义。

定义 5.1 (γ 次优控制器) 考虑式(5.1)所示的系统 Σ 和式(5.2)所示的控制器 Σ_{cmp} 。如果用 Σ_{cmp} 来控制 Σ 时,所得到的闭环系统(5.10)是内稳定的,同时它的 H_∞ 范数小于 γ ,则称 Σ_{cmp} 是 Σ 的一个 $H_\infty \gamma$ 次优控制器或简称 γ 次优控制器。♣

定义 5.2 (极小值 γ^*) 考虑式(5.1)所示的系统 Σ 和式(5.2)所示的控制器 Σ_{cmp} 。在所有可以内镇定 Σ 的 Σ_{cmp} 中所得到的闭环系统 $T_{hw}(\Sigma \times \Sigma_{\text{cmp}})$,我们称其 H_∞ 范数最小的值为极小值(infimum)或 γ^* ,即

$$\gamma^* := \inf\{\|T_{hw}(\Sigma \times \Sigma_{\text{cmp}})\|_\infty \mid \Sigma_{\text{cmp}} \text{ 可内镇定 } \Sigma\} \quad (5.15)$$

很显然, $\gamma^* \geq 0$ 。当上下文都很清楚时,我们有时也称 γ^* 是 Σ 的极小值。♣

定义 5.3 (H_∞ 最优控制器) 考虑式(5.1)所示的系统 Σ 和式(5.2)所示的控制器 Σ_{cmp} 。如果用 Σ_{cmp} 来控制 Σ 时,所得到的闭环系统(5.10)是内稳定的,同时它的 H_∞ 的范数等于 γ^* ,则称 Σ_{cmp} 是 Σ 的一个 H_∞ 最优控制器。♣

定义 5.4 (全信息反馈控制) 考虑式(5.1)所示的系统 Σ 。如果系统的测量输出为

$$y = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad \text{即 } C_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

则称其相对应的 H_∞ 控制问题为全信息反馈控制问题。也称这种系统为全信息反馈系统。♣

定义 5.5 (状态反馈控制) 考虑式(5.1)所示的系统 Σ 。如果系统的测量输出为 $y = x$,即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$,则称其相对应的 H_∞ 控制问题为状态反馈控制问题。也称这种系统为状态反馈系统。♣

定义 5.6 (规范化问题) 考虑式(5.1)所示的系统 Σ 。如果 Σ 满足如下条件,则称其所对应的 H_∞ 控制问题为所谓的规范化问题(regular case)。

(1) 若 Σ 是连续时间系统,则必须满足:

(1.1) D_2 是列满秩, Σ_P 在虚轴上没有不变零点;

(1.2) D_1 是行满秩, Σ_Q 在虚轴上没有不变零点。

如果 Σ 是状态反馈系统, 则只需满足条件(1. 1)。

(2) 若 Σ 是离散时间系统, 则必须满足:

(2. 1) Σ_p 是左可逆并在单位圆上没有不变零点;

(2. 2) Σ_q 是右可逆并在单位圆上没有不变零点。

同样的, 如果 Σ 是状态反馈系统, 则只需满足条件(2. 1)。

我们也称满足以上条件的系统为规范化系统(即所谓的 regular system)。特别要指出的是, 连续时间系统的条件和离散时间系统的条件在双线性变换下是一一对应的。♣

定义 5.7(一般化问题) 考虑式(5. 1)所示的系统 Σ 。如果 Σ 不满足定义 5. 6 其中任一条件, 则称其所对应的 H_∞ 控制问题为一般化问题(即所谓的 singular case)。有时也称这种系统为一般化系统。♣

顺便指出, 对于连续时间系统, 定义 5. 6 中两个条件与一般文献中所定义的规范化问题的条件是完全等价的, 即

(1) D_1 是行满秩的, 即 $\text{rank}(D_1) = p$, 矩阵 D_2 是列满秩的, 即 $\text{rank}(D_2) = m$;

(2) 对所有的 $\omega \in \mathbb{R}$, 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} j\omega I - A & -E \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = p + n, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} j\omega I - A & -B \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = m + n \quad (5.17)$$

5.3 有界实引理

本节回顾一下在解决规范化 H_∞ 控制问题中起着至关重要的结果, 即著名的有界实引理(bounded real lemma)。读者可以在很多的文献中找到这个结果, 有兴趣的读者可以参考文献[25]。在进行 H_∞ 控制系统设计时, 传递函数的 H_∞ 范数是进行系统性能评判的指标。一般来说, 很难知道一个传递函数 $T(s)$ 的确切 H_∞ 范数。但是有界实引理却可以让我们知道是否有

$$\|T(s)\|_\infty < \gamma \quad (5.18)$$

这个结果与前面所定义的 H_∞ 次优控制问题相对应。

定理 5.1 给定一个连续时间系统的传递函数 $T(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, 其中 A 是渐近稳定的矩阵, 则 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$ 成立的充分和必要条件是:

(1) $\|D\| < \gamma$, 或 $R := \gamma^2 I - D^T D > 0$;

(2) 存在一个对称矩阵 $P = P^T \geq 0$, 满足 Riccati 方程

$$P(A + BR^{-1}D^TC) + (A + BR^{-1}D^TC)^T P + PBR^{-1}B^T P + C^T(I + DR^{-1}D^T)C = 0 \quad (5.19)$$

并且 $A + BR^{-1}(D^TC + B^TP)$ 是渐近稳定的。♣

下面对定理进行一些说明并引出和矩阵 Riccati 方程相关联的 Hamiltonian

矩阵。如第 2 章所述,线性时不变系统的传递函数矩阵的 H_∞ 范数定义为

$$\|T(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty)} \sigma_{\max}[T(j\omega)] \quad (5.20)$$

根据这个定义,我们只要研究 $T(j\omega) = D + C(j\omega I - A)^{-1}B$ 的最大奇异值对所有 ω 的变化情况。由于 $T(j\infty) = D$, 所以 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$ 成立就必须有定理 5.1 的条件(1)成立。这时如果能够证明对所有的 $\omega \in \mathbb{R}$, 有

$$\gamma^2 I - T^H(j\omega)T(j\omega) > 0 \quad (5.21)$$

就可断定 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$ 成立。而在定理 5.1 的条件(1)已经成立的条件下,式(5.21)成立等价于传递函数 $\gamma^2 I - T^H(j\omega)T(j\omega)$ 在虚轴上没有不变零点。下面就来考查该传递函数的不变零点。不难得到它的状态空间表示为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -B \\ C^T D \end{bmatrix} \bar{u}, \quad \bar{y} = [D^T C \quad B^T] \hat{x} + R \bar{u} \quad (5.22)$$

因为 A 是稳定的矩阵,系统(5.22)在虚轴上没有不可控或不可观的特征值,所以系统(5.22)在虚轴上没有不变零点就等价于它的逆系统在虚轴上没有极点。由式(5.22),可以推得其逆系统的系统矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^T C)^T \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

所以只要矩阵 $H \in \mathbb{R}^{2n}$ 在虚轴上没有特征值就可满足式(5.21),其中 n 是 A 的维数。

矩阵 H 是个 Hamiltonian 矩阵。它的特点是主对角线上的两个矩阵是负的转置关系,而反对角线上是两个对称的矩阵。矩阵 H 最让我们感兴趣的是它的特征值和特征空间。如果 H 在虚轴上没有特征值,那么它的特征值是关于虚轴对称的。这是因为

$$J^{-1}HJ = -JHJ = -H^T \quad (5.24)$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

可见 H 和 $-H^T$ 是相似的,所以有相同的特征值,因此 H 的特征值关于虚轴对称。如果 H 的稳定特征值的特征空间由向量 $[X_1^T \quad X_2^T]^T$ 所张成,即

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Delta^- \quad (5.26)$$

其中 Δ^- 是一个 $n \times n$ 的稳定矩阵。可以证明 X_1 是非奇异的矩阵^[25]。令 $P = X_2 X_1^{-1}$, 则

$$H \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} X_1 \Delta^- X_1^{-1} \quad (5.27)$$

对式(5.27)两边左乘 $[-P \ I]$,可得

$$[-P \ I]H \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = 0 \quad (5.28)$$

展开式(5.28)就得到矩阵 Riccati 方程(5.19)。取式(5.27)的第一行有

$$A + BR^{-1}D^T C + BR^{-1}B^T P = X_1 \Lambda^{-1} X_1^{-1} \quad (5.29)$$

可见 $A + BR^{-1}(D^T C + B^T P)$ 是渐近稳定的。 P 的对称性和非负定性证明也可见文献[25]。

5.4 连续时间系统规范化 H_∞ 控制

本节首先考虑连续时间系统在状态反馈下的规范化 H_∞ 控制问题。所谓状态反馈也就是状态可测量到,这是最简单的 H_∞ 控制器,所谓简单是指它不需要有如式(5.2)所示的动态方程形式,只要是静态的状态反馈即可,即 $u = Fx$,其中 F 是状态反馈增益矩阵。尽管它在形式上很简单,也很容易设计,但却是走向一般测量输出反馈的必经之路。只要状态反馈得到解决,后面的问题只要经过适当的变换就能得到解决。这时的广义对象描述为

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2 x + D_2 u + D_{22} w \end{cases} \quad (5.30)$$

若 $u = Fy = Fx$,则闭环系统成为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + Ew \\ h = (C_2 + D_2 F)x + D_{22} w \end{cases} \quad (5.31)$$

可见从扰动 w 到被控输出 h 的传递函数矩阵为

$$T_{hw}(s) = (C_2 + D_2 F)(sI - A - BF)^{-1}E + D_{22} \quad (5.32)$$

给定一个 γ , 状态反馈 H_∞ 控制的目标是设计一个状态反馈增益矩阵 F , 使得

- (1) 闭环系统是内稳定的, 即 $A + BF$ 是稳定的矩阵;
- (2) $\|T_{hw}(s)\|_\infty < \gamma$ 。

根据定理 5.1, $\|T_{hw}(s)\|_\infty < \gamma$ 的充分和必要条件是:

- (1) $R = \gamma^2 I - D_{22}^T D_{22} > 0$;
- (2) 存在一个 $P = P^T \geq 0$, 使得

$$P[A + BF + ER^{-1}D_{22}^T(C_2 + D_2 F)] + [A + BF + ER^{-1}D_{22}^T(C_2 + D_2 F)]^T P + PER^{-1}E^T P + (C_2 + D_2 F)^T (I + D_{22}R^{-1}D_{22}^T)(C_2 + D_2 F) = 0 \quad (5.33)$$

式(5.33)中有未知的参数矩阵 F , 为了消去该参数矩阵, 我们采用配平方技术(配平方是优化控制理论的一个主要技术手段)。令 $G = I + D_{22}R^{-1}D_{22}^T$, 把式(5.33)中

有关 F 的项都放在一起,有

$$\begin{aligned} & (PB + PER^{-1}D_{22}^T D_2 + C_2^T G D_2)F + F^T (PB \\ & + PER^{-1}D_{22}^T D_2 + C_2^T G D_2)^T + F^T D_2^T G D_2 F \end{aligned} \quad (5.34)$$

令 $U = PB + PER^{-1}D_{22}^T D_2 + C_2^T G D_2$, 经观察可把式(5.34)配平方为

$$\begin{aligned} & UF + F^T U^T + F^T D_2^T G D_2 F \\ & = (F + (D_2^T G D_2)^{-1} U^T)^T D_2^T G D_2 (F + (D_2^T G D_2)^{-1} U^T) - U (D_2^T G D_2)^{-1} U^T \end{aligned} \quad (5.35)$$

对于规范化系统, D_2 是列满秩的, 式(5.35)中的逆矩阵都是存在的。如果令

$$F = - (D_2^T G D_2)^{-1} U^T \quad (5.36)$$

则 Riccati 方程(5.33)为

$$\begin{aligned} & PA + A^T P + PER^{-1}D_{22}^T C_2 + C_2^T D_{22} R^{-1} E^T P + PER^{-1} E^T P \\ & + C_2^T (I + D_{22} R^{-1} D_{22}^T) C_2 - U (D_2^T G D_2)^{-1} U^T = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

从上面的推导可见即使是一个简单的状态反馈矩阵, 公式也是非常复杂的。如果只是为了揭示问题的本质, 不妨在不降低问题难度的情况下假设 $D_{22} = 0$, 这时状态反馈增益矩阵为

$$F = - (D_2^T D_2)^{-1} (B^T P + D_2^T C_2) \quad (5.38)$$

而矩阵 Riccati 方程(5.37)为

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} P E E^T P - (PB + C_2^T D_2) (D_2^T D_2)^{-1} (PB + C_2^T D_2)^T + C_2^T C_2 = 0 \quad (5.39)$$

可以证明, 当给定的系统(5.30)满足规范化 H_∞ 控制问题所需要的条件时, 矩阵 Riccati 方程(5.39)存在一个唯一可镇定的半正定解 $P = P^T \geq 0$, 即所得到的 $A + BF$ 是稳定的, 其中 F 如式(5.38)所示。反之, 也可以证明如果系统(5.30)不满足规范化问题的条件, 则矩阵 Riccati 方程(5.39)不存在可镇定的半正定解。这也就是解一般化 H_∞ 控制问题的困难所在, 所对应的矩阵 Riccati 方程没有解。

看起来式(5.38)只是状态反馈增益矩阵的一种选择, 然而却是最优的选择。为了证明它的最优性, 我们可以根据对策论的方法来看 H_∞ 设计问题。我们知道有下面的时间域和频率域的等价性关系存在:

$$\begin{aligned} \| T_{hw}(s) \|_\infty < \gamma & \Leftrightarrow \frac{\| h \|_2}{\| w \|_2} < \gamma, x(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow \| h \|_2^2 - \gamma^2 \| w \|_2^2 < 0, x(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

因此可以在时域内进行 H_∞ 设计, 定义一个性能指标

$$J(u, w) = \| h \|_2^2 - \gamma^2 \| w \|_2^2 = \int_0^\infty (h^T h - \gamma^2 w^T w) dt \quad (5.41)$$

如果存在一个控制 u 使得式(5.40)对所有的 w 都成立, 则实现了 $\| T_{hw}(s) \|_\infty < \gamma$ 。所以控制 u 的作用无疑是要极小化 $J(u, w)$ 。如果把扰动 w 看成是控制 u 的对

手,则 w 的作用总是和控制 u 相反,也就是要极大化 $J(u, w)$ 。因此 H_∞ 控制问题可看成是一个对策论问题,即

$$\inf_u \sup_w J(u, w)$$

对策论就是要让 u 和 w 各自寻找它们的最优策略。

由于闭环系统是渐近稳定的,所以有 $x(\infty)=0$,因此

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}(x^T P x) dt = x^T(\infty) P x(\infty) - x^T(0) P x(0) = 0 \quad (5.42)$$

把 $\frac{d}{dt}(x^T P x)$ 加入式(5.41)中可得

$$\begin{aligned} J(u, w) &= \int_0^\infty \left(h^T h - \gamma^2 w^T w + \frac{d}{dt}(x^T P x) \right) dt \\ &= \int_0^\infty (h^T h - \gamma^2 w^T w + \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}) dt \end{aligned} \quad (5.43)$$

把 $\dot{x} = Ax + Bu + Ew$ 和 $h = C_2 x + D_2 u$ 代入式(5.43),并利用矩阵 Riccati 方程(5.39)可得(实际上还是配平方技术)

$$J(u, w) = \|h\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 = \|D_2(u - Fx)\|_2^2 - \gamma^2 \|w - F_1 x\|_2^2 \quad (5.44)$$

其中

$$F = -(D_2^T D_2)^{-1} (B^T P + D_2^T C_2), \quad F_1 = \gamma^{-2} E^T P \quad (5.45)$$

从式(5.44)就很容易看出 u 和 w 的最优值分别为

$$u^* = -(D_2^T D_2)^{-1} (B^T P + D_2^T C_2)x, \quad w^* = \gamma^{-2} E^T P x \quad (5.46)$$

在控制(5.46)下,闭环系统是稳定的。

可见 $u = u^*$ 可极小化 $J(u, w)$, 而 $w = w^*$ 可极大化 $J(u, w)$, u^* 和 w^* 就是对对策论问题的鞍点。下面以定理的形式给出以上讨论的结果(见文献[14]和[24])。

定理 5.2 给定一个状态反馈规范化系统(5.30),其中 $D_{22}=0$,以及给定一个 γ ,则对应的状态反馈规范化 H_∞ 控制问题存在一个 γ 次优控制器的充分必要条件是矩阵 Riccati 方程(5.39),即

$PA + A^T P + \gamma^2 P E E^T P - (PB + C_2^T D_2)(D_2^T D_2)^{-1}(PB + C_2^T D_2)^T + C_2^T C_2 = 0$ 存在一个可镇定的半正定解 $P \geq 0$,这时的次优状态反馈增益矩阵由式(5.38)给出,即

$$F = -(D_2^T D_2)^{-1} (B^T P + D_2^T C_2) \quad \clubsuit$$

在 H_∞ 控制理论中还有一种反馈形式,即所谓的全信息反馈(见定义 5.4),这时系统的状态 x 和干扰 w 都可以测量得到并用于反馈控制器设计。可以证明最优的控制器仍然是状态反馈 $u^* = Fx$ 。也就是说测量 w 是冗余的。这一冗余性为参数化控制器提供了可能。在上面的控制器设计中,我们只是找到一个控制器,所谓参数化的控制器则是所有满足设计要求的控制器。所以鲁棒控制器往往是个参

数化控制器的集合。

如果系统(5.30)具有非零 D_{22} 项,则 γ 次优控制器的存在条件相当复杂。下面回顾一个 D_2 是列满秩、 Σ_p 在虚轴上没有不变零点的规范化全信息反馈情况的结果。

定理 5.3 考虑式(5.30)给出的连续时间线性时不变系统,其中 $y = [x^T \ w^T]^T$, D_2 列满秩。设 Σ_p 在虚轴上没有不变零点。则下列各项等价:

(1) 存在定常增益矩阵 F_1 和 F_2 ,使得控制律 $u = F_1 x + F_2 w$ 对式(5.30)所形成的闭环系统是内稳定的,同时得到从扰动输入 w 到被控输出 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ ,即全信息反馈规范化 H_∞ 控制问题存在一个 γ 次优控制器。

(2) 下面的条件是得到满足的:

(2.1)

$$D_{22}^T [I - D_2 (D_2^T D_2)^{-1}] D_{22} < \gamma^2 I \quad (5.47)$$

(2.2) Riccati 方程

$$0 = PA + A^T P + C_2^T C_2 - \begin{bmatrix} B^T P + D_2^T C_2 \\ E^T P + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix}^T G^{-1} \begin{bmatrix} B^T P + D_2^T C_2 \\ E^T P + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

存在半正定解 P ,其中

$$G = \begin{bmatrix} D_2^T D_2 & D_2^T D_{22} \\ D_{22}^T D_{22} & D_{22}^T D_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

使得矩阵

$$A_{\text{clp}} = A - [B \ E] G^{-1} \begin{bmatrix} B^T P + D_2^T C_2 \\ E^T P + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

是渐近稳定的,即 P 为可镇定的半正定解。♣

特别指出,当 $D_{22} \neq 0$,状态反馈规范化 H_∞ 控制问题的 γ 次优控制器存在条件类似于定理 5.3 的(2),只要把(2.1)换成 $D_{22}^T D_{22} < \gamma^2 I$ 。

在大多数情况下,状态变量是不可以直接测量到的,所以输出反馈更具有一般性。接下来回顾在输出反馈下规范化 H_∞ 控制问题。此时的广义系统描述为

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ex \\ y = C_1 x + D_1 w \\ h = C_2 x + D_2 u + D_{22} w \end{cases} \quad (5.51)$$

且 Σ 满足定义 5.6,即规范化问题所需的条件。为方便起见,仍然假设 $D_{22} = 0$ 。以下定理也是 Doyle 等^[14]和 Tadmor^[24]的结果。

定理 5.4 给定一个规范化系统(5.51),其中 $D_{22} = 0$,以及给定一个 γ ,则对应的规范化 H_∞ 控制问题存在一个 γ 次优的控制器的充分必要条件是:

(1) 矩阵 Riccati 方程

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PEE^T P - (PB + C_2^T D_2)(D_2^T D_2)^{-1}(PB + C_2^T D_2)^T + C_2^T C_2 = 0 \quad (5.52)$$

存在一个可镇定的半正定对称解 P 。

(2) 矩阵 Riccati 方程

$$QA^T + AQ + \gamma^{-2} QC_2^T C_2 Q - (QC_1^T + ED_1^T)(D_1 D_1^T)^{-1}(QC_1^T + ED_1^T)^T + EE^T = 0 \quad (5.53)$$

存在一个可镇定的半正定对称解 Q 。

(3)

$$\rho(PQ) < \gamma^2 \quad (5.54)$$

这时的观测器型控制器为

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}} v + B_{\text{cmp}} y \\ u = C_{\text{cmp}} v \end{cases} \quad (5.55)$$

其中

$$A_{\text{cmp}} = A + \gamma^{-2} EE^T P + BF + (I - \gamma^{-2} QP)^{-1} K(C_1 + \gamma^{-2} D_1 E^T P) \quad (5.56)$$

$$B_{\text{cmp}} = -(I - \gamma^{-2} QP)^{-1} K, \quad C_{\text{cmp}} = F \quad (5.57)$$

式中, $F = -(D_2^T D_2)^{-1}(B^T P + D_2^T C_2)$; $K = -(QC_1^T + ED_1^T)(D_1 D_1^T)^{-1}$. ♣

5.5 连续时间系统一般化 H_∞ 控制

在规范化 H_∞ 控制问题中有两个假设, 即: ① D_2 是列满秩, Σ_p 在虚轴上没有不变零点; ② D_1 是行满秩, Σ_q 在虚轴上没有不变零点。如果这两个条件不满足, 则 5.4 节两个矩阵 Riccati 方程不存在可镇定的半正定解。因此不能通过那两个 Riccati 方程来得到所想要的控制器。在文献[22]和[98]中, 他们利用二次矩阵不等式的技术得出一般化 H_∞ 控制问题解的存在一系列条件。可以预期 5.4 节规范化问题的结果只是本节要介绍的一般化问题结果的一个特殊情况。设要控制的系统为

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1 x + D_1 w \\ h = C_2 x + D_2 u + D_{22} w \end{cases} \quad (5.58)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^r$ 是 Σ 的被控输出。同时考虑下面的正则测量输出反馈律:

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}} v + B_{\text{cmp}} y \\ u = C_{\text{cmp}} v + D_{\text{cmp}} y \end{cases} \quad (5.59)$$

为简单起见, 先设式(5.58)中的从扰动 w 到被控输出 h 的直接传输部分为零, 即

$D_{22}=0$ 。为易于参照,令由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所表示的子系统 Σ_P 的传递函数为

$$G_P(s) = C_2(sI - A)^{-1}B + D_2 \quad (5.60)$$

由矩阵四元组 (A, E, C_1, D_1) 所表示的子系统 Σ_Q 传递函数为

$$G_Q(s) = C_1(sI - A)^{-1}E + D_1 \quad (5.61)$$

关于连续时间 H_∞ 优化问题,我们现在来总结文献中有关 γ 次优控制律存在性条件的一些重要结果。

下面的第一个结果来自文献[22]。在介绍定理之前,首先定义下面的二次矩阵:

$$F_\gamma(P) := \begin{bmatrix} A^T P + PA + C_2^T C_2 + \gamma^2 P E E^T P & PB + C_2^T D_2 \\ B^T P + D_2^T C_2 & D_2^T D_2 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

和

$$G_\gamma(Q) := \begin{bmatrix} AQ + QA^T + EE^T + \gamma^2 QC_2^T C_2 Q & QC_1^T + ED_1^T \\ C_1 Q + D_1 E^T & D_1 D_1^T \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

应当注意到上面的矩阵互为对偶。除了这两个矩阵以外,下面再定义两个多项式矩阵,它们的作用也是相互对偶的:

$$L_\gamma(P, s) := [sI - A - \gamma^2 EE^T P \quad -B] \quad (5.64)$$

和

$$M_\gamma(Q, s) := \begin{bmatrix} sI - A - \gamma^2 QC_2^T C_2 \\ -C_1 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

对于 $D_{22}=0$ 的连续时间系统(5.58),子系统 Σ_P 和 Σ_Q 在虚轴上都没有不变零点,我们引出下面的定理来给出 γ 次优控制器存在的一组充分必要条件。

定理 5.5 考虑式(5.58)所示的连续时间系统 Σ ,其中 $D_{22}=0$ 。假设 Σ_P 和 Σ_Q 在虚轴上没有不变零点,则下面的各项等价:

(1) 存在一个形如式(5.59)的正则动态补偿器 Σ_{comp} ,应用在系统(5.58)上形成一个内稳定的闭环系统,同时得到从扰动输入 w 到被控输出 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于等于 γ ,即 Σ_{comp} 是 Σ 一个 γ 次优控制器。

(2) 存在半正定矩阵 $P \geq 0$ 和 $Q \geq 0$,使得

(2.1) $F_\gamma(P) \geq 0$;

(2.2) $\text{rank}\{F_\gamma(P)\} = \text{normrank}\{G_P(s)\}$;

(2.3) $\text{rank} \begin{bmatrix} L_\gamma(P, s) \\ F_\gamma(P) \end{bmatrix} = n + \text{normrank}\{G_P(s)\}, \forall s \in \mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^+$;

(2.4) $G_\gamma(Q) \geq 0$;

(2.5) $\text{rank}\{G_\gamma(Q)\} = \text{normrank}\{G_Q(s)\}$;

$$(2.6) \text{rank}[M_\gamma(Q, s) \quad G_\gamma(Q)] = n + \text{normrank}\{G_Q(s)\}, \forall s \in \mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^+;$$

$$(2.7) \rho(PQ) < \gamma^2.$$

其中 $G_P(s)$ 和 $G_Q(s)$ 分别是 Σ_P 和 Σ_Q 的传递函数, “normrank” 即系统的常态秩(见定义 3.6)。♣

下面来讨论全信息反馈和全状态反馈情况。对于 $D_{22} = 0$ 的系统, 全信息和全状态反馈下的 γ 次优控制器的存在条件是一样的。

注 5.1 对于全信息和全状态反馈的特殊情况, 定理 5.5 中条件(2.4)~(2.6)的解 $Q=0$ 。这表明条件(2.7)自动满足。因此在全信息或全状态反馈下, 一般化 H_∞ 控制问题 γ 次优控制器的存在条件可简化为条件(2.1)~(2.3)。而且可证明这时存在一个静态 γ 次优控制器。♣

接下来要除去子系统 Σ_P 和 Σ_Q 不变零点的限制, 即容许 Σ_P 和 Σ_Q 在虚轴上有不变零点。下面的定理来自文献[21]。

定理 5.6 考虑式(5.58)所示的连续时间线性时不变系统, 其中 $D_{22}=0$, 则下面各项等价:

(1) 存在一个形如式(5.59)的线性时不变正则动态补偿器 Σ_{comp} , 应用在系统(5.58)上所形成的闭环系统是内稳定的, 同时得到从扰动输入 w 到被控输出 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ 。

(2) 存在具有适当维数的定常矩阵 F 和 K 、正定矩阵 $P > 0$ 和 $Q > 0$, 使得下面的条件得到满足:

$$(2.1) (A + BF)^T P + P(A + BF) + \gamma^2 PEE^T P + (C_2 + D_2 F)^T (C_2 + D_2 F) < 0;$$

$$(2.2) (A + KC_1)Q + Q(A + KC_1)^T + \gamma^2 QC_2^T C_2 Q + (E + KD_1)(E + KD_1)^T < 0;$$

$$(2.3) \rho(PQ) < \gamma^2. \quad \clubsuit$$

定理 5.6 的条件(2.1)和(2.2)可转化成一些降阶代数 Riccati 不等式存在正定解的条件, 该不等式不依赖于 F 和 K 。通过把子系统 Σ_P 和 Σ_Q 变换到第 4 章的特殊坐标基就可以实现。

5.6 离散时间系统

本节考虑一般的离散时间线性时不变系统 Σ , 具有状态空间描述

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = C_1 x(k) + D_1 w(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) + D_{22} w(k) \end{cases} \quad (5.66)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是扰动输入, $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^r$ 是被控输出。下面的 Σ_{comp} 是所采用的控制器:

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}}v(k) + B_{\text{cmp}}y(k) \\ u(k) = C_{\text{cmp}}v(k) + D_{\text{cmp}}y(k) \end{cases} \quad (5.67)$$

从理论上讲,利用双线性变换和逆双线性变换就可以把连续时间的结果转变到离散时间。对于规范化的全信息反馈,将在第 6 章建立连续时间和离散时间的 H_∞ 优化问题的内在联系,以及连续时间和离散时间 H_∞ 代数 Riccati 方程的相互关系。

如同连续时间系统,定义 Σ_P 为由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所表示的子系统, Σ_Q 为由矩阵四元组 (A, E, C_1, D_1) 所表示的子系统,各自的传递函数为

$$G_P(z) = C_2(zI - A)^{-1}B + D_2 \quad (5.68)$$

和

$$G_Q(z) = C_1(zI - A)^{-1}E + D_1 \quad (5.69)$$

下面是由 Stoorvogel, Saber^[23] 所给出的结果。

定理 5.7 对于系统(5.66),假设子系统 Σ_P 和 Σ_Q 在单位圆上没有不变零点,则以下各项等价:

(1) 存在形如式(5.67)的线性时不变因果动态补偿器 Σ_{cmp} ,应用在系统(5.66)上所形成的闭环系统是内稳定的,同时得到从扰动输入 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ 。

(2) 存在对称矩阵 $P \geq 0$ 和 $Q \geq 0$,使得

(2.1) 下面的矩阵 R 是正定的:

$$R := \gamma^2 I - D_{22}^T D_{22} - E^T P E + (E^T P B + D_{22}^T D_2) V^T (B^T P E + D_2^T D_{22}) > 0 \quad (5.70)$$

其中

$$V := B^T P B + D_2^T D_2 \quad (5.71)$$

(2.2) P 满足下面的离散代数 Riccati 方程:

$$P = A^T P A + C_2^T C_2 - \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix}^T G^+ \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

其中

$$G := \begin{bmatrix} D_2^T D_2 + B^T P B & D_2^T D_{22} + B^T P E \\ D_{22}^T D_2 + E^T P B & E^T P E + D_{22}^T D_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

(2.3) 对所有满足 $|z| \geq 1$ 的 $z \in \mathbb{C}$,有

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{bmatrix} zI - A & -B & -E \\ B^T P A + D_2^T C_2 & B^T P B + D_2^T D_2 & B^T P E + D_2^T D_{22} \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 & E^T P B + D_{22}^T D_2 & E^T P E + D_{22}^T D_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \\ & = n + q + \text{normrank}\{G_P(z)\} \end{aligned}$$

(2.4) 下面的矩阵 S 是正定的:

$$S := \gamma^2 I - D_{22} D_{22}^T - C_2 Q C_2^T + (C_2 Q C_1^T + D_{22} D_1^T) W^+ (C_1 Q C_2^T + D_1 D_{22}^T) > 0 \quad (5.74)$$

其中

$$W := D_1 D_1^T + C_1 Q C_1^T \quad (5.75)$$

(2.5) Q 满足下面的离散代数 Riccati 方程:

$$Q = A Q A^T + E E^T - \begin{bmatrix} C_1 Q A^T + D_1 E^T \\ C_2 Q A^T + D_{22} E^T \end{bmatrix}^T H^+ \begin{bmatrix} C_1 Q A^T + D_1 E^T \\ C_2 Q A^T + D_{22} E^T \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

其中

$$H := \begin{bmatrix} D_1 D_1^T + C_1 Q C_1^T & D_1 D_{22}^T + C_1 Q C_2^T \\ D_{22} D_1^T + C_2 Q C_1^T & C_2 Q C_2^T + D_{22} D_{22}^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

(2.6) 对所有 $|z| \geq 1$ 的 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI - A & A Q C_1^T + E D_1^T & A Q C_2^T + E D_{22}^T \\ -C_1 & C_1 Q C_1^T + D_1 D_1^T & C_1 Q C_2^T + D_1 D_{22}^T \\ -C_2 & C_2 Q C_1^T + D_{22} D_1^T & C_2 Q C_2^T + D_{22} D_{22}^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} = n + l + \text{normrank} \{G_Q(z)\}$$

(2.7) $\rho(PQ) < \gamma^2$. ♣

注意除了用广义逆代替逆以外, 条件(2.2)是离散时间 H_∞ 优化问题标准的 Riccati 方程。条件(2.3)只不过是要求 P 是 Riccati 方程的稳定解。如果解存在的话, 条件(2.2)和(2.3)唯一确定解。条件(2.4)~(2.6)也是相类似的。条件(2.7)就是通常的耦合条件。把子系统 Σ_P 和 Σ_Q 变换到第4章的特殊坐标基下, 然后解两个没有广义逆的标准离散时间 Riccati 方程, 就可以得到上面所提的 P 和 Q 。这些是第11章的内容。

下面的评注涉及全信息和全状态反馈情况。

注 5.2 对于全信息和全状态反馈的特殊情况, 可以不需要第二个 Riccati 方程。

(1) 全信息反馈情况: 这时同时知道系统的状态和扰动。很容易检验 $Q = 0$ 满足条件(2.4)~(2.6), 而且保证耦合条件(2.7)自动满足。因此, 在全信息反馈情况下, 所给定的系统存在可内镇定闭环系统的 γ 次优控制器的充分必要条件是存在一个半正定矩阵 P 满足定理 5.7 中的条件(2.1)~(2.3)。

(2) 全状态反馈情况: 此时容易看出存在满足条件(2.4)~(2.6)的半正定矩阵 Q 的必要条件是 $|D_{22}| < \gamma$ 。也不难验证在全状态反馈情况下, 矩阵

$$Q = E(I - \gamma^{-2} D_{22} D_{22}^T)^{-1} E^T \quad (5.78)$$

满足条件(2.4)~(2.6)。这样条件(2.7)就变成

$$\gamma^2 I - D_{22} D_{22}^T - E^T P E > 0 \quad (5.79)$$

实际上式(5.79)表明条件(2.1)自动满足。因此,在全状态反馈情况下,所给定的系统存在可内镇定闭环系统的 γ 次优控制器的充分必要条件是存在一个半正定矩阵 P 满足定理 5.7 中的条件(2.2)和(2.3)以及式(5.79)。

事实上,当上述条件得到满足时,可以证明不论是全信息还是全状态反馈情况,总是存在 γ 次优控制器的。♣

下面的推论^[22]是处理离散时间系统的规范化 H_∞ 控制问题。

推论 5.1 考虑系统(5.66)。设子系统 Σ_P 左可逆,在单位圆上没有不变零点;子系统 Σ_Q 右可逆,在单位圆上没有不变零点。则下面两个陈述是等价的:

(1) 存在形如式(5.67)的线性时不变因果动态补偿器 Σ_{comp} ,应用在系统(5.66)上所形成的闭环系统是内稳定的,从扰动输入 w 到被控输出 h 的传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ 。

(2) 存在对称矩阵 $P \geq 0$ 和 $Q \geq 0$,使得

(2.1) 下面的矩阵 P 和 R 是正定的:

$$V := B^T P B + D_2^T D_2 > 0 \quad (5.80)$$

和

$$R := \gamma^2 I - D_{22}^T D_{22} - E^T P E + (E^T P B + D_{22}^T D_2) V^{-1} (B^T P E + D_2^T D_{22}) > 0 \quad (5.81)$$

(2.2) P 满足离散代数 Riccati 方程

$$P = A^T P A + C_2^T C_2 - \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix}^T G(P)^{-1} \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

其中

$$G(P) := \begin{bmatrix} D_2^T D_2 + B^T P B & D_2^T D_{22} + B^T P E \\ D_{22}^T D_2 + E^T P B & E^T P E + D_{22}^T D_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

(2.3) 下面的矩阵 A_{clP} 是渐近稳定的:

$$A_{\text{clP}} := A - [B \ E] G(P)^{-1} \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

(2.4) 下面的矩阵 W 和 S 是正定的:

$$W := D_1 D_1^T + C_1 Q C_1^T \quad (5.85)$$

$$S := \gamma^2 I - D_{22} D_{22}^T - C_2 Q C_2^T + (C_2 Q C_1^T + D_{22} D_1^T) W^{-1} (C_1 Q C_2^T + D_1 D_{22}^T) > 0 \quad (5.86)$$

(2.5) Q 满足下面的离散代数 Riccati 方程:

$$Q = A Q A^T + E E^T - \begin{bmatrix} C_1 Q A^T + D_1 E^T \\ C_2 Q A^T + D_{22} E^T \end{bmatrix}^T H(Q)^{-1} \begin{bmatrix} C_1 Q A^T + D_1 E^T \\ C_2 Q A^T + D_{22} E^T \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

其中

$$H(Q) := \begin{bmatrix} D_1 D_1^T + C_1 Q C_1^T & D_1 D_{22}^T + C_1 Q C_2^T \\ D_{22} D_2^T + C_2 Q C_2^T & C_2 Q C_2^T + D_{22} D_{22}^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

(2.6) 矩阵 A_{clQ} 是稳定的:

$$A_{clQ} := A - \begin{bmatrix} C_1 Q A^T + D_1 E^T \\ C_2 Q A^T + D_{22} E^T \end{bmatrix}^T H(Q)^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

(2.7) $\rho(PQ) < \gamma^2$. ♣

有趣的是可以通过合适的双线性变换建立定理 5.2 和推论 5.1 的关系,第 6 章会更详细地说明这点。实际上,根据 Glover^[8]的结果,可以证明连续时间在双线性变换下,连续时间 H_∞ 优化问题和离散时间 H_∞ 优化问题是等价的。所以离散时间所有结果都可以从连续时间所对应的部分导出。

5.7 常见的鲁棒控制问题

通常有许多的鲁棒控制问题可以转化成标准的 H_∞ 优化问题。一旦转化成标准问题后,就很容易利用后面章节中的结果来求解。例如,图 5.3 表示一个非结构化摄动系统的鲁棒镇定问题。假设不确定性对象的标称系统为 Σ ,而 Σ_{cmp} 是该系统的 H_∞ γ 次优控制器,即 $\|T_{hw}(\Sigma \times \Sigma_{\text{cmp}})\|_\infty < \gamma$,则根据著名的小增益定理,对所有可能的对象摄动 Δ ,只要 $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ 就可以保证图 5.3 的闭环系统是稳定的。所以只要 γ 越接近标称系统的 γ^* ,所得系统对摄动 Δ 就具有更好的鲁棒性。类似的,具有结构化摄动系统的鲁棒稳定性问题可容易地转换成标准的 H_∞ 控制问题,如加性摄动和乘性摄动。后面将演示如何把以下四个常见的问题转化成标准的 H_∞ 优化问题:

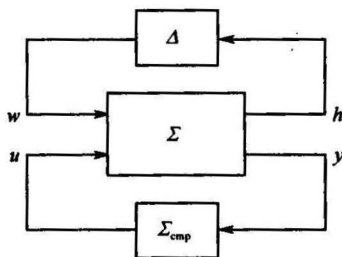


图 5.3 具有非结构化摄动系统的鲁棒镇定问题

- (1) 混合灵敏度问题;
- (2) 最大化复值稳定半径;
- (3) 具有加性摄动的鲁棒镇定;
- (4) 具有乘性摄动的鲁棒镇定。

5.7.1 混合灵敏度问题

图 5.4 所示结构就是控制系统设计中广泛采用的混合灵敏度问题。依作者所见,对设计跟踪控制系统来说这肯定不是一个好的结构。这是由于只有误差信号 e 被馈入到控制器 Σ_F 中。后面的章节中将会发现独立地利用参考信号 r 和测量

信号 y 的控制器结构会产生更好的性能。当然,读者可根据自己所见来判断。

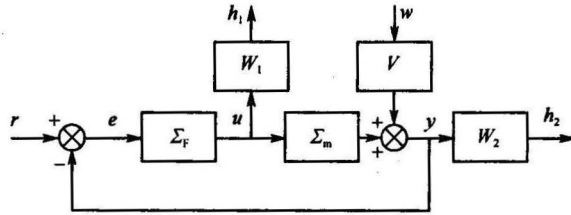


图 5.4 混合灵敏度问题的结构

图 5.4 中的 Σ_m 表示给定对象的标称模型。令 Σ_m 的传递矩阵为

$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m + D_m \quad (5.90)$$

其中 (A_m, B_m) 可镇定, (A_m, C_m) 可检测。待设计控制器 Σ_F 的传递矩阵为

$$G_F(s) = C_F(sI - A_F)^{-1}B_F + D_F \quad (5.91)$$

加权函数 V, W_1 和 W_2 的最小实现表示为

$$V(s) = C_V(sI - A_V)^{-1}B_V + D_V \quad (5.92)$$

$$W_1(s) = C_{W_1}(sI - A_{W_1})^{-1}B_{W_1} + D_{W_1} \quad (5.93)$$

和

$$W_2(s) = C_{W_2}(sI - A_{W_2})^{-1}B_{W_2} + D_{W_2} \quad (5.94)$$

权函数 V, W_1 和 W_2 的选取依赖于系统性能要求的约束。则系统的灵敏度函数 S 和控制灵敏度函数 T 分别定义为

$$S := (I + G_m G_F)^{-1} \quad \text{和} \quad T := G_F(I + G_m G_F)^{-1} \quad (5.95)$$

不难发现如果扰动 $w=0$, 则灵敏度函数 S 和控制灵敏度函数 T 分别是从 r 到 e , 以及从 r 到 u 的传递矩阵。显然有小的 S 产生小的 e , 即好的跟踪性能; 而小的 T 产生小的控制 u 。然而从 S 和 T 的定义可见无法使两者同时小。一般来说, 我们总需要在实际情况中作出某些权衡(适当地选择权函数 V, W_1 和 W_2)。接下来注意到如果 $r=0$, 则从 w 到 h_1 和从 w 到 h_2 的传递矩阵分别是 $-W_1TV$ 和 W_2SV 。

混合灵敏度问题是找到内稳定的控制律 Σ_F , 使得从扰动 w 到被控输出 $h = (h_1^T, h_2^T)$ 的闭环系统传递矩阵

$$\left\| \begin{array}{c} -W_1TV \\ W_2SV \end{array} \right\|_\infty = \left\| \begin{array}{c} W_1TV \\ W_2SV \end{array} \right\|_\infty \quad (5.96)$$

的 H_∞ 范数最小。这样的问题可以转变成 H_∞ 优化问题。该问题等价于设计一个使系统内稳定的控制律

$$\Sigma_F: \begin{cases} \dot{v} = A_F v - B_F y \\ u = C_F v - D_F y \end{cases} \quad (5.97)$$

作用于下面的辅助系统:

$$\Sigma_{\text{mix}}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1x + D_{11}u + D_{12}w \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (5.98)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{W_1} & 0 \\ B_{W_2}C_m & B_{W_2}C_V & 0 & A_{W_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_m \\ 0 \\ B_{W_1} \\ B_{W_2}D_m \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ B_V \\ 0 \\ B_{W_2}D_V \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{W_2}D_V \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [C_m \quad C_V \quad 0 \quad 0], \quad D_{11} = D_m, \quad D_1 = D_V$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{W_1} & 0 \\ D_{W_2}C_m & D_{W_2}C_V & 0 & C_{W_2} \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} D_{W_1} \\ D_{W_2}D_m \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

从而使得从 w 到 h 的闭环系统的 H_∞ 范数最小。显然,根据所选权函数的不同,上面的问题可以是规范化的,也可以是一般化的。后面章节中的有关 H_∞ 优化问题的结果都可用于混合灵敏度问题的求解。

5.7.2 最大化复值稳定半径

本节中引出不确定性系统的最大化复值稳定半径问题。考虑不确定线性时不变系统 Σ_Δ :

$$\dot{x} = Ax + Bu + E\Delta Cx \quad (5.100)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times l}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 是给定的定常矩阵;而 Δ 表示不确定性,由矩阵 E 和 C 表示其结构。进一步假设 (A, B) 是可镇定的。对任意可使系统内稳定的反馈律

$$u = Fx \quad (5.101)$$

其中 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 对 Σ_Δ 所定义的复值稳定半径为(参见文献[99])

$$\gamma_c(\Sigma_\Delta, F) := \inf\{|\Delta| : \Delta \in \mathbb{C}^{l \times p} \text{ 使得 } A + BF + E\Delta C \text{ 不稳定}\} \quad (5.102)$$

对于由式(5.101)所确定的可使系统内稳定的状态反馈律,复值稳定半径所能达到的最大值为

$$\gamma_c^*(\Sigma_\Delta) = \sup\{\gamma_c(\Sigma_\Delta, F) : F \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ 和 } A + BF \text{ 稳定}\} \quad (5.103)$$

表面上看复值摄动不符合实际情况,不应该用在鲁棒性分析中。但是从两点可以看出复值稳定半径的重要性:首先,它是实稳定半径的下界(且服从复值稳定半径

的定义,但是限定 Δ 为实矩阵),而且存在复值稳定半径和实稳定半径一样的重要特例。更为重要的是复值稳定半径的结果比实稳定半径的结果更加完美。其次,复值稳定半径等价于实动态稳定半径,即 Δ 是实动态摄动情况(详情可参见文献[99]和文献综述)。根据文献[99]的结果,有

$$\gamma_c(\Sigma_\Delta, F) = \|G_F\|_\infty^{-1} \quad (5.104)$$

其中 $G_F(s) = C(sI - A - BF)^{-1}E$, 可以证明复值稳定半径的最大值为

$$\gamma_c^*(\Sigma_\Delta) = \frac{1}{\gamma^*} \quad (5.105)$$

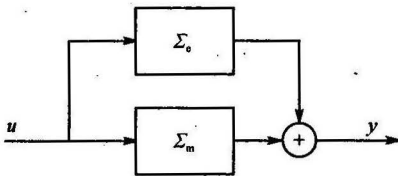
其中 γ^* 是下面状态反馈 H_∞ 优化问题的最小值:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = Cx + 0 \cdot u + 0 \cdot w \end{cases} \quad (5.106)$$

以上问题显然属于一般化的情况(且不可能是规范化的)。 γ^* 以及 $\gamma_c^*(\Sigma_\Delta)$ 的计算可利用第 7 章的算法。

5.7.3 加性摄动下的鲁棒镇定

本节考虑具有加性摄动对象的鲁棒镇定问题。具体地说就是图 5.5 中的不确定性系统的镇定问题,其中 Σ_m 是所给对象的标称模型, Σ_e 是未知摄动。假设 Σ_m 和 $\Sigma_m + \Sigma_e$ 具有相同的不稳定极点数。令 Σ_m 的传递矩阵为



$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m + D_m \quad (5.107)$$

图 5.5 具有加性摄动的对象

其中 (A_m, B_m) 可镇定, (A_m, C_m) 可检测。给定 $\gamma_a > 0$, 对于加性摄动对象的鲁棒镇定问题就是找到一个式(5.2)所示形式的控制器,作用于图 5.5 的不确定性系统上时,所产生的闭环系统对所有 L_∞ 范数小于或等于 γ_a 的可能摄动 Σ_e 是内稳定的。

根据 Vidyasagar^[100] 的结果(也可参见文献[22]),可以证明上述问题等价于对下面的辅助系统

$$\Sigma_{\text{add}}: \begin{cases} \dot{x} = A_m x + B_m u + 0 \cdot w \\ y = C_m x + D_m u + Iw \\ h = 0 \cdot x + Iu + 0 \cdot w \end{cases} \quad (5.108)$$

找到一个 H_∞ γ 次优控制器(其中 $\gamma = 1/\gamma_a$)。不难发现由两个矩阵四元组 $(A_m, B_m, 0, I)$ 和 $(A_m, 0, C_m, I)$ 所表示的两个子系统是可逆的。实际上两个子系统具有相同的不变零点,就是 A_m 的特征值。对 Σ_{add} 不附加任何额外条件,就可用第 7 章

的结果精确地计算最小值 γ^* 。而文献[22]的结果需要 A_m 在虚轴上没有特征值。

注意 $1/\gamma^*$ 是 Σ_c 可使图 5.5 中的不确定性系统保持渐近稳定的最大可能 L_∞ 范数的界。

5.7.4 乘性摄动下的鲁棒镇定

本节中考虑具有乘性摄动对象的鲁棒镇定问题,也就是图 5.6 所描述的不确定性系统的镇定问题。其中 Σ_m 是系统的标称模型, Σ_c 是不确定性摄动。假设 Σ_m 以及由图 5.6 中 Σ_m 和 Σ_c 所复合起来的不确定性系统有同样数目的不稳定极点。令 Σ_m 的传递矩阵为

$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m + D_m \quad (5.109)$$

其中 (A_m, B_m) 可镇定, (A_m, C_m) 可检测。给定标量 $\gamma_m > 0$, 对于乘性摄动对象的鲁棒镇定问题就是找到一个式(5.2)所示形式的控制器, 作用在图 5.6 的不确定性系统上时, 所产生的闭环系统对所有 L_∞ 范数小于或等于 γ_m 的可能摄动 Σ_c 都是内稳定的。

类似的, 根据 Vidyasagar^[100] 的结果(也可参见文献[22]), 可以证明上述问题等价于对下面的辅助系统

$$\Sigma_{\text{multi}}: \begin{cases} \dot{x} = A_m x + B_m u + B_m w \\ y = C_m x + D_m u + D_m w \\ h = 0 \cdot x + Iu + 0 \cdot w \end{cases} \quad (5.110)$$

找到一个 $H_\infty \gamma$ 次优控制器(其中 $\gamma = 1/\gamma_m$)。

注意上面的系统总是满足第 7 章中的条件, 不需要附加任何额外条件就可以精确计算 Σ_{multi} 的最小值 γ^* 。 $1/\gamma^*$ 也同样是可使图 5.6 的不确定性系统渐近稳定的 Σ_c 的最大可能 L_∞ 范数的界。

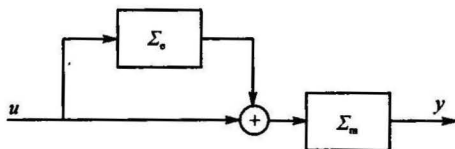


图 5.6 具有乘性摄动的对象

第 6 章 离散时间 Riccati 方程的解

6.1 导 论

离散时间代数 Riccati 方程(DARE)已经得到很深入的研究(可参见文献 [101]~[106])。大部分研究都是针对线性二次控制问题中出现的离散时间代数 Riccati 方程(后面我们把这一类的 DARE 称为 H_2 -DARE)。近来,一些学者对 H_∞ 控制和离散时间系统微分对策进行了研究^[27,107,108],产生了不同形式的代数 Riccati 方程(后面我们称为 H_∞ -DARE)。由于这些代数 Riccati 方程中的不定非线性项,以及无法预见解的存在性,这些代数 Riccati 方程的分析和求解是非常困难的。本章中将要回顾 Chen 等^[109]解一般 DARE,以及 H_2 -DARE 和 H_∞ -DARE 的非迭代方法。其主要特点是把解 DARE 的问题变成解对应的连续时间 Riccati 方程。后者的求解过程是非迭代的。这样做的优点是:减少了迭代过程中的计算量,从而产生更加精确的解。也能突显一般 H_∞ -DARE 的性质。更为重要的是,这一章的结果建立了离散时间和连续时间 H_∞ 控制问题之间的内在联系。

6.2 一般 DARE 的解

本节首先对下面的离散时间代数 Riccati 方程引入非迭代解法,它甚至比 H_∞ -DARE 更具有一般性,在求解 H_∞ -DARE 中发挥了重要作用。Riccati 方程是

$$P = A^T P A - (A^T P M + N)(R + M^T P M)^{-1}(M^T P A + N^T) + Q \quad (6.1)$$

其中 A, M, N, R 和 Q 是维数为 $n \times n, n \times m, n \times m, m \times m$ 和 $n \times n$ 的矩阵, Q 和 R 是对称矩阵。我们要证明式(6.1)的 DARE 可转变成连续时间 Riccati 方程。假设矩阵 A 在复平面上 -1 处没有特征值。定义

$$\begin{cases} F: = (A + I)^{-1}(A + I) \\ G: = 2(A + I)^{-2}M \\ W: = R + M^T(A^T + I)^{-1}Q(A + I)^{-1}M \\ \quad - N^T(A + I)^T M - M^T(A^T + I)^{-1}N \\ H: = -Q(A + I)^{-1}M + N \end{cases} \quad (6.2)$$

矩阵 F, G, W 和 H 实际上是用逆双线性变换来定义的。

那么有下面的定理。

定理 6.1 假设矩阵 A 在 -1 处没有特征值, 则下面两项等价:

(1) P 是 DARE(6.1) 的对称解, W 是非奇异的。

(2) \tilde{P} 是连续代数 Riccati 方程

$$\tilde{P}F + F^T\tilde{P} - (\tilde{P}G + H)W^{-1}(\tilde{P}G + H)^T + Q = 0 \quad (6.3)$$

的解。 $R + 2G^T(I - F^T)^{-1}\tilde{P}(I - F)^{-1}G$ 是非奇异的。

P 和 \tilde{P} 的关系为 $P = 2(A^T + I)^{-1}\tilde{P}(A + I)^{-1}$ 。

证明 见 6.4.1 节。

特别指出, 定理 6.1 是连接离散时间代数 Riccati 方程和连续时间代数 Riccati 方程之间的桥梁。定理 6.1 表明式(6.1)所示的离散时间 Riccati 方程可以转变到式(6.3)所示的连续时间代数 Riccati 方程, 而该方程具有许多数值稳定的非迭代解法。所以没有必要单独为离散时间代数 Riccati 方程的求解进行研究。

6.3 H_∞ -DARE 的解

本节给出一个非迭代过程来产生对称半正定矩阵 P 使得

$$V := B^T P B + D_2^T D_2 > 0 \quad (6.4)$$

$$R := \gamma^2 I - D_{22}^T D_{22} - E^T P E + (E^T P B + D_{22}^T D_2) V^{-1} (B^T P E + D_{22}^T D_{22}) > 0 \quad (6.5)$$

并且下面的离散时间代数 Riccati 方程(DARE)成立:

$$P = A^T P A + C_2^T C_2 - \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix}^T G^{-1} \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

其中

$$G := \begin{bmatrix} D_2^T D_2 + B^T P B & D_{22}^T D_{22} + B^T P E \\ D_{22}^T D_2 + E^T P B & E^T P E + D_{22}^T D_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

条件(6.4)和(6.5)保证矩阵 G 可逆。让我们感兴趣的是满足式(6.4)~式(6.6)的解 P 使得矩阵 A_d 的特征值在单位圆内, 其中

$$A_d = A - [B \ E] G^{-1} \begin{bmatrix} B^T P A + D_2^T C_2 \\ E^T P A + D_{22}^T C_2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

我们之所以对此 Riccati 方程感兴趣是因为它所对应的离散时间 H_∞ 理论(见推论 5.1)。同时也不难发现令 $E=0$ 和 $D_{22}=0$, 式(6.4)~式(6.6)就成为线性二次型控制中的 Riccati 方程。为清晰起见, 我们首先回顾上面的 Riccati 方程和离散时间全信息反馈 H_∞ 控制问题的关系。首先定义系统 Σ_{PI} 为

$$\Sigma_{PI} : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) + D_{22} w(k) \end{cases} \quad (6.9)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是扰动输入, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出, $y \in \mathbb{R}^{n+q}$ 是测量输出。下面的引理是根据推论 5.1 得到的。

引理 6.1 考虑系统(6.9)。假设 (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的, 在单位圆上没有不变零点。则下面两项等价:

(1) 存在一个静态反馈 $u = K_1 x + K_2 w$, 可使 Σ_{PI} 内稳定, 使得从 w 到 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ 。

(2) 式(6.4)~式(6.6)存在一个对称半正定解 P , 使得式(6.8)所示的矩阵 A_d 的特征值在单位圆内。 ♣

下面给出全信息问题的 H_∞ -DARE 稳定解的非迭代计算方法, 即式(6.4)~式(6.6)。首先从给定系统中定义一个辅助 H_∞ -CARE, 使得该方程的稳定解和 H_∞ -DARE 的稳定解联系起来, 而这个 H_∞ -DARE 的稳定解无需迭代求出。

首先选择定常矩阵 F_0 使得 $A + BF_0$ 在 -1 处没有特征值。只要 (A, B) 关于 $C^0 \cup C^\infty$ 上可镇定就可以实现这点。接下来定义辅助 H_∞ -CARE:

$$0 = \tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}^T\tilde{P} + \tilde{C}_2^T\tilde{C}_2 - \begin{bmatrix} \tilde{B}^T\tilde{P} + \tilde{D}_2^T\tilde{C}_2 \\ \tilde{E}^T\tilde{P} + \tilde{D}_{22}^T\tilde{C}_2 \end{bmatrix}^T \tilde{G}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}^T\tilde{P} + \tilde{D}_2^T\tilde{C}_2 \\ \tilde{E}^T\tilde{P} + \tilde{D}_{22}^T\tilde{C}_2 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

附上条件

$$\tilde{D}_{22}^T(I - \tilde{D}_2(\tilde{D}_2^T\tilde{D}_2)^{-1}\tilde{D}_2^T)\tilde{D}_{22} < \gamma^2 I \quad (6.11)$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{A} := (A + BF_0 + I)^{-1}(A + BF_0 - I) \\ \tilde{B} := 2(A + BF_0 + I)^{-2}B \\ \tilde{E} := 2(A + BF_0 + I)^{-2}E \\ \tilde{C}_2 := C_2 + D_2F_0 \\ \tilde{D}_2 := D_2 - (C_2 + D_2F_0)(A + BF_0 + I)^{-1}B \\ \tilde{D}_{22} := D_2 - (C_2 + D_2F_0)(A + BF_0 + I)^{-1}E \end{cases} \quad (6.12)$$

和

$$\tilde{G} := \begin{bmatrix} \tilde{D}_2^T\tilde{D}_2 & \tilde{D}_2^T\tilde{D}_{22} \\ \tilde{D}_{22}^T\tilde{D}_2 & \tilde{D}_{22}^T\tilde{D}_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

如果矩阵 \tilde{D}_2 是列满秩的, 则条件(6.11)表明 \tilde{G} 是可逆的。同样的, 我们对方程(6.10)使得 \tilde{A}_d 的特征值在开左半平面的解 \tilde{P} 特别感兴趣, 其中

$$\tilde{A}_d := \tilde{A} - [\tilde{B} \quad \tilde{E}] \tilde{G}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}^T\tilde{P} + \tilde{D}_2^T\tilde{C}_2 \\ \tilde{E}^T\tilde{P} + \tilde{D}_{22}^T\tilde{C}_2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

注意到在 \tilde{D}_2 是列满秩情况下, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_2, \tilde{D}_2)$ 在虚轴上没有不变零点, 条件(6.11)以及上面的 H_∞ -CARE(6.10)是和下面的连续时间全信息反馈控制系统

$$\tilde{\Sigma}_{FI} : \begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u + \tilde{E}w \\ y = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \\ h = \tilde{C}_2 x + \tilde{D}_2 u + \tilde{D}_{22} w \end{cases} \quad (6.15)$$

的 H_∞ 次优问题相关联的。下面是从定理 5.3 得到的引理。

引理 6.2 考虑系统(6.15)。假设 \tilde{D}_{22} 是列满秩, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_2, \tilde{D}_2)$ 在虚轴上没有不变零点。则下面两项等价:

(1) 存在静态反馈律 $u = \tilde{K}_1 x + \tilde{K}_2 w$, 可镇定 $\tilde{\Sigma}_{FI}$ 并使从 w 到 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ 。

(2) 条件(6.11)成立, 存在一个对称 $\tilde{P} \geq 0$ 使得方程(6.10)成立, 从而式(6.14)所示的 \tilde{A}_d 的特征值在开左半平面。♣

下面给出主要结果。

定理 6.2 下面的各项是等价的:

(1) (A, B) 是可镇定的, (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的, 在单位圆上没有不变零点。而且存在一个对称半正定矩阵 P 使得式(6.4)~式(6.6)成立, 式(6.8)所示的 A_d 的所有特征值在单位圆内。

(2) (\tilde{A}, \tilde{B}) 是可镇定的, \tilde{D}_2 是列满秩, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_2, \tilde{D}_2)$ 在虚轴上没有不变零点, 条件(6.11)成立。而且式(6.10)所示的 H_∞ -CARE 存在一个对称半正定解 \tilde{P} , 使得式(6.14)所示的 \tilde{A}_d 的特征值在开左半平面内。

而且 P 和 \tilde{P} 的关系为 $P = 2(A^T + F_0^T B^T + I)^{-1} \tilde{P}(A + BF_0 + I)^{-1}$ 。♣

证明 见 6.4.2 节。◆

注 6.1 我们要指出 (A, B, C_2, D_2) 的左可逆是全信息 H_∞ -DARE 稳定解存在的必要条件(参见文献[22])。而根据定理 6.2 的证明和连续时间代数 Riccati 方程的性质, 很容易证明 (A, B, C_2, D_2) 在单位圆上没有不变零点也是全信息 H_∞ -DARE 稳定解存在的必要条件。♣

注 6.2 根据定理 6.2, 对于全信息问题的 H_∞ -DARE, 获得稳定解 P 的非迭代方法如下:

(1) 获取辅助的 H_∞ -CARE。

(2) 利用已有的非迭代方法, 如 Schur 方法(可参见文献[84]和[110]), 求出 H_∞ -CARE 的稳定解。定义一个 Hamiltonian 矩阵

$$H_m = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

其中

$$\begin{cases} H_{11} = \tilde{A} - [\tilde{B} \ \tilde{E}] \tilde{G}^{-1} [\tilde{D}_2 \ \tilde{D}_{22}]^T \tilde{C}_2 \\ H_{12} = -[\tilde{B} \ \tilde{E}] \tilde{G}^{-1} [\tilde{B} \ \tilde{E}]^T \\ H_{21} = -\tilde{C}_2^T \{I - [\tilde{D}_2 \ \tilde{D}_{22}] \tilde{G}^{-1} [\tilde{D}_2 \ \tilde{D}_{22}]^T\} \tilde{C}_2 \\ H_{22} = -\{\tilde{A} - [\tilde{B} \ \tilde{E}] \tilde{G}^{-1} [\tilde{D}_2 \ \tilde{D}_{22}]^T \tilde{C}_2\}^T \end{cases} \quad (6.17)$$

求得一个正交矩阵 $T_m \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, 把 H_m 变换成实 Schur 型

$$T_m^T H_m T_m = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

其中 $S_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是稳定矩阵, $S_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是反稳定矩阵。把 T_m 划分为四个 $n \times n$ 块:

$$T_m = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

则可得 $\tilde{P} = T_{21} T_{11}^{-1}$ 。

(3) 全信息 H_∞ -DARE 的稳定解为 $P = 2(A^T + F_0^T B^T + I)^{-1} \tilde{P} (A + BF_0 + I)^{-1}$ 。

♣

我们知道 H_∞ -DARE 是 H_2 -DARE 的推广。只要令 $\gamma = \infty$, 或等价地令 $E = 0$ 和 $D_{22} = 0$, 就可得到一般的 H_2 -DARE。为了完整性, 我们以下面的推论给出 H_2 -DARE 的非迭代解法。

推论 6.1 下面两项是等价的:

(1) (A, B) 是可镇定的, (A, B, C_2, D_2) 左可逆, 在单位圆上没有不变零点。而且存在一个半正定矩阵 P , 使得

$$B^T P B + D_2^T D_2 > 0 \quad (6.20)$$

$$P = A^T P A + C_2^T C_2 - (A^T P B + C_2^T D_2) (D_2^T D_2 + B^T P B)^{-1} (A^T P B + C_2^T D_2)^T \quad (6.21)$$

而矩阵 A_d 的特征值都在单位圆内, 其中

$$A_d = A - B (D_2^T D_2 + B^T P B)^{-1} (A^T P B + C_2^T D_2)^T \quad (6.22)$$

(2) (\tilde{A}, \tilde{B}) 是可镇定的, \tilde{D}_2 是列满秩, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_2, \tilde{D}_2)$ 在虚轴上没有不变零点。而且下面的 CARE

$$0 = \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 - (\tilde{P} \tilde{B} + \tilde{C}_2^T \tilde{D}_2) (\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1} (\tilde{P} \tilde{B} + \tilde{C}_2^T \tilde{D}_2)^T \quad (6.23)$$

存在一个半正定解 \tilde{P} , 使得 \tilde{A}_d 的特征值在开左半平面, 其中

$$\tilde{A}_d = \tilde{A} - \tilde{B} (\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1} (\tilde{P} \tilde{B} + \tilde{C}_2^T \tilde{D}_2)^T \quad (6.24)$$

而 P 和 \tilde{P} 的关系为 $P = 2(A^T + F_0^T B^T + I)^{-1} \tilde{P} (A + BF_0 + I)^{-1}$ 。

♣

引理 6.1、引理 6.2 和定理 6.2 揭示了离散时间系统 Σ_{Fi} 和连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_{Fi}$ 的 H_∞ γ 次优控制问题的内在联系。下面的引理就此进行总结。

引理 6.3 假设 (A, B) 可镇定, (A, B, C_2, D_2) 左可逆, 在单位圆上没有不变零点。则以下陈述是等价的:

(1) 式(6.9)所示的离散时间全信息反馈系统 Σ_{FI} 至少存在一个 γ 次优控制律。即对给定的 γ , 存在静态全信息反馈 $u=K_1x+K_2w$, 使得从 w 到 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ 。

(2) 式(6.15)所示的连续时间全信息反馈系统 $\tilde{\Sigma}_{FI}$ 至少存在一个 γ 次优控制律。即对给定的 γ , 存在静态全信息反馈 $u=\tilde{K}_1x+\tilde{K}_2w$, 使得从 w 到 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ 。♣

注 6.3 从另外一个不同的途径得到引理 6.3 的结果也很容易。我们知道传递函数的 Hankel 范数和 H_∞ 范数在双线性变换下是不变的(参见文献[8])。所以只要对 Σ_{FI} 进行双线性变换而得到一个辅助连续系统, 就可以把离散时间系统 Σ_{FI} 的 H_∞ γ 次优控制问题转变成连续时间系统的 H_∞ γ 次优控制问题。可以证明辅助连续时间系统的状态空间实现之一是

$$\Sigma_{BL} : \begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u + \tilde{E}w \\ y = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \tilde{D}_3 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \tilde{D}_4 \\ I \end{bmatrix} w \\ z = \tilde{C}_2x + \tilde{D}_2u + \tilde{D}_{22}w \end{cases} \quad (6.25)$$

其中 $\tilde{D}_3 = -(A+BF_0+I)^{-1}B$, $\tilde{D}_4 = -(A+BF_0+I)^{-1}E$, \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{E} , \tilde{C}_2 , \tilde{D}_2 和 \tilde{D}_{22} 如同式(6.12)所定义。因此, 当且仅当连续时间系统 Σ_{BL} 的 H_∞ γ 次优控制问题存在一个解时, 离散时间 Σ_{FI} 的 H_∞ γ 次优控制问题存在一个解。然而 Σ_{BL} 并非完全是全信息形式。但只要重新定义 Σ_{BL} 中的测量输出就可以克服这个困难, 定义

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} I & -\tilde{D}_4 \\ 0 & I \end{bmatrix} \left(y - \begin{bmatrix} \tilde{D}_3 \\ 0 \end{bmatrix} u \right) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (6.26)$$

很显然在新的测量输出 \tilde{y} 下, Σ_{BL} 在形式上等同于 $\tilde{\Sigma}_{FI}$ 。所以当且仅当 Σ_{FI} 的 H_∞ γ 次优控制问题存在一个解时, Σ_{BL} 的 H_∞ γ 次优控制问题存在一个解, 由此得出引理 6.3。注意双线性变换并没有建立连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_{FI}$ (通过对离散时间系统 Σ_{FI} 进行双线性变换, 再定义如同式(6.26)所示的新的测量输出得到的) 的 H_∞ -CARE 的稳定解和离散时间系统 Σ_{FI} 的 H_∞ -DARE 的关系。而定理 6.2 的主要贡献就是建立了它们之间的联系。♣

下面给出一个算例来演示上述结果。

例 6.1 对下面的全信息系统考虑离散时间 H_∞ -DARE, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$\gamma=1$ 。不难验证 (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的, 在 0 处有一个不变零点。根据式(6.12), 得到辅助的 H_∞ -CARE, 其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -8 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 11 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 68 & -50 \\ -92 & 68 \\ 128 & -94 \\ -52 & 38 \\ 18 & 14 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} -20 \\ 28 \\ -40 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -8 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -4.0 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

利用 Matlab 解方程(6.3), 得到对应的 H_∞ -CARE 的稳定解为

$$\tilde{P} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.767767 & 1.110081 & 0.180720 & -0.307296 & -0.617828 \\ 1.110081 & 1.607297 & 0.260755 & -0.448623 & -0.897322 \\ 0.180720 & 0.260755 & 0.046343 & -0.64704 & -0.139318 \\ -0.307296 & -0.448623 & -0.064704 & 0.143150 & 0.264285 \\ -0.617828 & -0.897322 & -0.139318 & 0.264285 & 0.511644 \end{bmatrix}$$

全信息 H_∞ -DARE 的稳定解为

$$P = \begin{bmatrix} 127.143494 & 187.057481 & 1 & -84.671880 & -134.864680 \\ 187.057481 & 278.730887 & 0 & -124.061419 & -201.396153 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -84.671880 & -124.061419 & 0 & 61.078015 & 92.569717 \\ -134.864680 & -201.396153 & 1 & 92.569717 & 147.982935 \end{bmatrix}$$

可以验证 P 满足式(6.4)~式(6.6)。而 A_d 的特征值为 $\{0.4125 \pm j0.0733, 0, 0, 0\}$, 全部都在单位圆内。 ♣

6.4 主要结果的证明

下面是本章主要结果的证明。

6.4.1 定理 6.1 的证明

首先考虑下面的变换:

$$A^T P A - P + Q = 2A^T (A^T + I)^{-1} \tilde{P} (A + I)^{-1} A - 2(A^T + I)^{-1} \tilde{P} (A + I)^{-1} + Q$$

$$\begin{aligned}
&= 2(A^T + D)^{-1}A^T\tilde{P}A(A + D)^{-1} - 2(A^T + D)^{-1}\tilde{P}(A + D)^{-1} + Q \\
&= (A^T + D)^{-1}(2A^T\tilde{P}A - 2\tilde{P})(A + D)^{-1} + Q \\
&= (A^T + D)^{-1}[(A^T + D)\tilde{P}(A - D) + (A^T - D)\tilde{P}(A + D)](A + D)^{-1} + Q \\
&= \tilde{P}(A - D)(A + D)^{-1} + (A^T + D)^{-1}(A^T - D)\tilde{P} + Q \\
&= \tilde{P}F + F^T\tilde{P} + Q \tag{6.28}
\end{aligned}$$

(1)⇒(2); 我们从下面的等式开始:

$$A^T P A - P + (A^T + I)P(A + I) - (A^T + I)P A - A^T P(A + I) = 0$$

这表明

$$\begin{aligned}
&P - P A (A + D)^{-1} - (A^T + I)^{-1} A^T P \\
&+ (A^T + D)^{-1} A^T P A (A + D)^{-1} - (A^T + D)^{-1} P (A + D)^{-1} = 0
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
W &= R + M^T (A^T + D)^{-1} Q (A + D)^{-1} M - N^T (A + D)^{-1} M - M^T (A^T + D)^{-1} N \\
&= R + M^T (A^T + D)^{-1} Q (A + D)^{-1} M - N^T (A + D)^{-1} M - M^T (A^T + D)^{-1} N \\
&\quad + M^T P M - M^T P A (A + D)^{-1} M - M^T (A^T + D)^{-1} A^T P M \\
&\quad + M^T (A^T + D)^{-1} A^T P A (A + D)^{-1} M - M^T (A^T + D)^{-1} P (A + D)^{-1} M \\
&= R + M^T P M - (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M - M^T (A^T + D)^{-1} (A^T P M + N) \\
&\quad + M^T (A^T + D)^{-1} (A^T P A + Q - P) (A + D)^{-1} M \tag{6.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R + M^T P M - (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M - M^T (A^T + D)^{-1} (A^T P M + N) \\
&\quad + M^T (A^T + D)^{-1} (A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M \tag{6.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [I - M^T (A^T + D)^{-1} (A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1}] \\
&\quad \times (R + M^T P M) [I - (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M] \tag{6.31}
\end{aligned}$$

特别要指出的是我们利用了式(6.1)从式(6.29)得到式(6.30)。因 W 是非奇异的, 则有

$$\begin{aligned}
R + M^T P M &= [I - M^T (A^T + D)^{-1} (A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1}]^{-1} W \\
&\quad \times [I - (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M]^{-1}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&(A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) \\
&= (A^T P M + N) [I - (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M] W^{-1} \\
&\quad \times [I - (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M]^T (M^T P A + N^T) \\
&= [A^T P M - (A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M + N] W^{-1} \\
&\quad \times [A^T P M - (A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + D)^{-1} M + N]^T \tag{6.32}
\end{aligned}$$

$$= [A^T P M + (P - A^T P A - Q)(A + D)^{-1} M + N] W^{-1} \quad (6.33)$$

$$\times [A^T P M + (P - A^T P A - Q)(A + D)^{-1} M + N]^T$$

$$= [(A^T P + P - Q)(A + D)^{-1} M + N] W^{-1} [(A^T P + P - Q)(A + D)^{-1} M + N]^T$$

$$= [(A^T + D) P (A + D) (A + D)^{-2} M - Q (A + D)^{-1} M + N] W^{-1}$$

$$\times [(A^T + D) P (A + D) (A + D)^{-2} M - Q (A + D)^{-1} M + N]^T$$

$$= (\tilde{P} G + H) W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T \quad (6.34)$$

我们还是利用式(6.1)从式(6.32)得到式(6.33)。最后,由式(6.1)、式(6.28)和式(6.34)可得

$$\tilde{P} F + F^T \tilde{P} - (\tilde{P} G + H) W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T + Q = 0$$

(2)⇒(1):由式(6.2)可得

$$\begin{cases} A = (I + F)(I - F)^{-1} \\ M = 2(I - F)^{-2} G \\ H = -Q(I - F)^{-1} G + N \\ P = (I - F^T)^{-1} \tilde{P} (I - F) / 2 \\ W = R + G^T (I - F^T)^{-1} Q (I - F)^{-1} G \\ \quad - N^T (I - F)^{-1} G - G^T (I - F^T)^{-1} N \\ R + M^T P M = R + 2G^T (I - F^T)^{-1} \tilde{P} (I - F)^{-1} G \end{cases} \quad (6.35)$$

那么有

$$R + M^T P M = R + G^T (I - F^T)^{-1} [Q + (\tilde{P} - \tilde{P} F - Q) + (\tilde{P} - F^T \tilde{P} - Q) + (\tilde{P} F + F^T \tilde{P} + Q)] (I - F)^{-1} G$$

$$= R + G^T (I - F^T)^{-1} Q (I - F)^{-1} G - N^T (I - F)^{-1} G - G^T (I - F^T)^{-1} N$$

$$+ G^T (I - F^T)^{-1} [P G - Q (I - F)^{-1} G + N] + [P G - Q (I - F)^{-1} G + N]^T$$

$$\times (I - F)^{-1} G + G^T (I - F^T)^{-1} (P E + F^T P + Q) (I - F)^{-1} G \quad (6.36)$$

$$= W + G^T (I - F^T)^{-1} (\tilde{P} G + H) + (\tilde{P} G + H)^T (I - F)^{-1} G$$

$$+ G^T (I - F^T)^{-1} (\tilde{P} G + H) W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T (I - F)^{-1} G \quad (6.37)$$

$$= [I + W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T (I - F)^{-1} G]^T W [I + W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T (I - F)^{-1} G] \quad (6.38)$$

注意,在这里利用了式(6.3)从式(6.36)得到式(6.37)。

我们已经假设 $R + M^T P M$ 是非奇异的,所以式(6.38)可以另写为

$$W = [I + G^T (I - F^T)^{-1} (\tilde{P} G + H) W^{-1}]^{-1} (R + M^T P M)$$

$$\times [I + W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T (I - F)^{-1} G]^{-1}$$

则有下面的推演:

$$(\tilde{P} G + H) W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T$$

$$= (\tilde{P} G + H) [I + W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T (I - F)^{-1} G]$$

$$\begin{aligned} & \times (R + M^T P M)^{-1} [I + W^{-1} (\tilde{P}G + H)^T (I - F)^{-1} G]^T (\tilde{P}G + H)^T \\ & = [\tilde{P}G + H + (\tilde{P}G + H)W^{-1} (\tilde{P}G + H)^T (I - F)^{-1} G] (R + M^T P M)^{-1} \\ & \quad \times [\tilde{P}G + H + (\tilde{P}G + H)W^{-1} (\tilde{P}G + H)^T (I - F)^{-1} G]^T \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} & = [\tilde{P}G - Q(I - F)^{-1}G + (\tilde{P}F + F^T \tilde{P} + Q)(I - F)^{-1}G + N] (R + M^T P M)^{-1} \\ & \quad \times [\tilde{P}G - Q(I - F)^{-1}G + (\tilde{P}F + F^T \tilde{P} + Q)(I - F)^{-1}G + N]^T \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} & = [(I + F^T) \tilde{P} (I - F)^{-1}G + N] (R + M^T P M)^{-1} [G^T (I - F^T)^{-1} \tilde{P} (I + F) + N^T] \\ & = (A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) \end{aligned} \quad (6.41)$$

同样,我们利用式(6.3)从式(6.39)得到式(6.40)。最后根据式(6.3)~式(6.28)和式(6.41)可得

$$A^T P A - (A^T P M + N) (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) + Q - P = 0$$

由此证明了定理 6.1。 ◆

6.4.2 定理 6.2 的证明

我们注意到定常状态预反馈矩阵 F 的引入只是为了克服 A 在复平面上 -1 处有特征值的困难。而预状态反馈律并不影响 Riccati 方程(6.6)的解。因此为简便起见,我们在 $F_0=0$ 和 $\gamma=1$ 的情况下证明定理 6.2。

(1)⇒(2): 根据引理 4.2, 四元组 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_2, \tilde{D}_2)$ 是 (A, B, C_2, D_2) 在 $a=1$ 时的逆双线性变换。因此根据定理 4.6, (\tilde{A}, \tilde{B}) 是可镇定的(见定理 4.6 的(1.1)), $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_2, \tilde{D}_2)$ 是左可逆的(见定理 4.6 的(3.2)), 在 $j\omega$ 轴上没有不变零点(见定理 4.6 的(4)), 没有高于 0 阶的无限零点(见定理 4.6 的(5))。由于 (A, B, C_2, D_2) 在 -1 处没有不变零点, 因此 \tilde{D}_2 是列满秩的。下面证明式(6.11)成立。令

$$\begin{cases} M_1 = [B & E] \\ N_1 = C_2^T [D_2 & D_{22}] \\ R_1 = \begin{bmatrix} D_2^T D_2 & D_2^T D_{22} \\ D_{22}^T D_2 & D_{22}^T D_{22} - I \end{bmatrix} \\ Q_1 = C_2^T C_2 \\ F_1 = \tilde{A} \\ G_1 = 2(A + I)^{-2} M \\ H_1 = -Q(A + I)^{-1} M + N \\ W_1 = R + M^T (A^T + I)^{-1} Q (A + I)^{-1} M - N^T (A + I)^{-1} M \\ \quad - M^T (A^T + I)^{-1} N \\ X_1 = I - (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + I)^{-1} M \end{cases} \quad (6.42)$$

简单推算可得

$$W = \begin{bmatrix} \tilde{D}_2^T \tilde{D}_2 & \tilde{D}_2^T \tilde{D}_{22} \\ \tilde{D}_{22}^T \tilde{D}_2 & \tilde{D}_{22}^T \tilde{D}_{22} - I \end{bmatrix}$$

因此,式(6.6)和式(6.10)可分别写成式(6.1)和式(6.3)。式(6.8)和式(6.14)则可重写为

$$A_d = A - M(R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) \quad (6.43)$$

和

$$\tilde{A}_d = F - G W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T \quad (6.44)$$

注意

$$\begin{aligned} \det[X] &= \det[I - (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + I)^{-1} M] \\ &= \det[I - M(R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) (A + I)^{-1}] \\ &= \det[I + A_d] \cdot \det[(A + I)^{-1}] \end{aligned}$$

因此只要 A_d 的特征值在单位圆内, X 就是非奇异的。从定理 6.1 证明中的式(6.31), 得知 W 非奇异, 则

$$W^{-1} = X^{-1} (R + M^T P M)^{-1} (X^{-1})^T \quad (6.45)$$

这表明 W^{-1} 和 $(R + M^T P M)^{-1}$ 有同样的特征结构(参见文献[29])。另外有

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1} & 0 \\ 0 & [\tilde{D}_{22}^T (I - \tilde{D}_2 (\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1} \tilde{D}_2^T) \tilde{D}_{22} - I]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}^T$$

和

$$(R + M^T P M)^{-1} = \begin{bmatrix} I & Z \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Z \\ 0 & I \end{bmatrix}^T$$

其中 $Y = -(\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1} \tilde{D}_2^T \tilde{D}_{22}$ 和 $Z = -V^{-1} B^T P E$, 根据式(6.45)以及 $V > 0$ 和 $R > 0$, 可得

$$\tilde{D}_{22}^T [I - \tilde{D}_2 (\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1} \tilde{D}_2^T] \tilde{D}_{22} < I$$

考虑到 W 是非奇异的, 根据定理 6.1 可得 \tilde{P} 是方程(6.10)的半正定解。

现在已经可以证明 \tilde{A}_d 的特征值在开左半复平面了。根据定理(6.1)证明中的式(6.34), 有

$$\begin{aligned} \tilde{A}_d &= F - G W^{-1} (\tilde{P} G + H)^T = F - G X^{-1} (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) \\ &= (A + I)^{-1} (A - I) - 2(A + I)^{-2} M [I - (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) \\ &\quad \times (A + I)^{-1} M]^{-1} (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T) \\ &= (A + I)^{-1} \{A - I - 2[I - (A + I)^{-1} M (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T)]^{-1} \\ &\quad \times (A + I)^{-1} M (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T)\} \\ &= (A + I)^{-1} \{A - I - 2[I + A - M (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T)]^{-1} \\ &\quad \times M (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T)\} \\ &= (A + I)^{-1} (A_d + I)^{-1} \{[I + A - M (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T)] \\ &\quad \times (A - I) - 2M (R + M^T P M)^{-1} (M^T P A + N^T)\} \\ &= (A + I)^{-1} (A_d + I)^{-1} (A_d - I) (A + I) \end{aligned}$$

(6.46)

这表明只要 A_d 的特征值在单位圆内, \tilde{A}_d 的特征值就在开左半平面。

(2) \Rightarrow (1): 首先, 根据定理 4.6 的结果不难证明只要 (\tilde{A}, \tilde{B}) 是可镇定的, \tilde{D}_2 是列满秩, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_2, \tilde{D}_2)$ 在虚轴上没有不变零点, 则 (A, B) 是可镇定的, (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的, 在单位圆上没有不变零点。接下来注意到

$$\begin{aligned} & \det[I + W^{-1}(\tilde{P}G + H)^T(I - F)^{-1}G] \\ &= \det[I + GW^{-1}(\tilde{P}G + H)^T(I - F)^{-1}] \\ &= \det[I - F + GW^{-1}(\tilde{P}G + H)^T] \cdot \det[(I - F)^{-1}] \\ &= \det[I - \tilde{A}_d] \cdot \det[(I - F)^{-1}] \end{aligned}$$

\tilde{A}_d 的所有特征值在开左半平面, 根据式(6.38)可得 $R + M^T P M$ 是非奇异的。因此定理 6.1 的第 2 部分成立。定理 6.2 余下的反向证明过程几乎和(1) \Rightarrow (2)的证明过程完全一样。由此证明结束。◆

第7章 连续时间 H_∞ 优化问题的极小值

7.1 导 论

本章中对连续时间系统的 H_∞ 优化问题的极小值计算进行探讨。原则上,可以通过迭代的方法解一系列 H_∞ -CARE 来得到 γ^* 的近似值。例如,在规范化测量反馈 H_∞ 优化问题中,利用 Doyle 等^[14]的结果(也可参见定理 5.4),近似 γ^* 的迭代过程如下:从一个足够大 γ 的初始值开始,看该 γ 是否能够满足两个“不定”代数 Riccati 方程,并检验解的半正定性和稳定性。如果半正定解存在并满足耦合条件,就可以确定 $\gamma > \gamma^*$,然后选择一个更小的 γ 值重复上面的过程。从理论上讲,这个过程可以让我们以任意的精度来近似最小值 γ^* 。但是这样的寻优过程代价很高,更为主要的是由于 γ 接近 γ^* 时可能产生的高增益,对应的 H_∞ -CARE 的解可能不具鲁棒性和高度的病态。同时,在检验耦合条件过程中也会出现这个困难。就是当 γ 减小时,检验耦合条件变成求刚度矩阵的特征值问题。对于一般化 H_∞ 优化问题,数值困难只会更加严重。所以,用计算带参数 γ 的 Riccati 方程的解来迭代求取 γ^* 是不可靠的。

本章的目的是要针对一大类系统(包括满足一些几何条件的一般化情况)研究出非迭代方法来计算 γ^* 的准确值。我们计算 γ^* 的方法由求解两个与 γ 无关的 Riccati 方程和两个 Lyapunov 方程构成。该算法已在 Matlab 环境下实现并得到了很好的数值解。这一章的内容是以 Chen^[111]和 Chen 等^[12,112~114]为基础的。

本章的概要为:7.2 节给出在全信息反馈下,连续时间 H_∞ 优化问题的极小值 γ^* 的计算(在 $D_{22}=0$ 情况下,该问题等价于全状态反馈下 H_∞ 优化问题)。7.3 节是测量反馈情况下 γ^* 的计算。7.2 节和 7.3 节都要求给定系统在虚轴上没有不变零点,满足一些几何条件。最后在 7.4 节中,我们将去除虚轴上不变零点的约束,即对于在虚轴上有不变零点的系统用非迭代的方法计算 γ^* 。

7.2 全信息反馈

本节中考虑下面一类连续时间系统:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \\ h = C_2 x + D_2 u + D_{22} w \end{cases} \quad (7.1)$$

的 H_∞ 优化问题。其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}^{m+q}$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是 Σ 的被控输出。文献中之所以称此为全信息问题是因为所有的信息都可用于反馈, 即 x 和 w 都可被测量到。为后面的引用方便, 我们定义 Σ_P 为矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所表示的子系统。

首先有下面的假设:

假设 7.1: (A, B) 可镇定;

假设 7.2: Σ_P 在虚轴上没有不变零点;

假设 7.3: $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^-(\Sigma_P) + \mathcal{S}^-(\Sigma_P)$;

假设 7.4: $D_{22} = 0$ 。

注 7.1 注意第一个假设 (A, B) 可镇定是任何可镇定控制器存在的必要条件。第二个假设在 7.4 节中去除。如果 Σ_P 是右可逆的, 假设 7.3 自动满足, 此时假设 7.4 实际上并不需要, 将在本节末尾处理该特殊情况(见注 7.4)。♣

对全信息系统(7.1), 我们有下面的非迭代算法来计算极小值 γ^* 。

步骤 7.1 不失一般性, 假设 (A, B, C_2, D_2) , 即 Σ_P 被划分为式(4.13)所示的形式。然后把 Σ_P 变换到第 4 章所描述的特殊坐标基形式(参考式(4.29)~式(4.32)的特殊坐标基的简约型)。为了后面参考方便, 在算法中对状态变换 Γ , 引入另一个排列矩阵, 使得新的状态变量的排序方式为

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_a^+ \\ x_b \\ x_a^- \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

将输出变换 Γ_o 选择为下面的形式:

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & \Gamma_{or} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

其中 $m_0 = \text{rank}(D_2)$ 。接下来计算

$$\Gamma_s^{-1} E = \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_b \\ E_a^- \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

不难从特殊坐标基的性质中验证出假设 7.3 等价于 $E_b = 0$ 。同时为简便起见, 用 n_x 代表 $\mathbb{R}^n / \mathcal{S}^+(\Sigma_P)$ 的维数, 等于 $n_a^+ + n_b$ 。注意当且仅当系统 Σ_P 是右可逆和最小相位时, $n_x = 0$ 。

步骤 7.2 下面定义

$$A_{11} := \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad B_{11} := \begin{bmatrix} B_{0a}^+ \\ B_{0b} \end{bmatrix}, \quad A_{13} := \begin{bmatrix} L_{ad}^+ \\ L_{bd} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$C_{21} := \Gamma_{or} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_b \end{bmatrix}, \quad C_{23} := \Gamma_{or} \begin{bmatrix} C_d C_d^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

和

$$A_x := A_{11} - A_{13} (C_{23}^T C_{23})^{-1} C_{23}^T C_{21} \quad (7.7)$$

$$B_x B_x^T := B_{11} B_{11}^T + A_{13} (C_{23}^T C_{23})^{-1} A_{13}^T \quad (7.8)$$

$$C_x^T C_x := C_{21}^T C_{21} - C_{21}^T C_{23} (C_{23}^T C_{23})^{-1} C_{23}^T C_{21} \quad (7.9)$$

然后求出代数 Riccati 方程

$$A_x S_x + S_x A_x^T - B_x B_x^T + S_x C_x^T C_x S_x = 0 \quad (7.10)$$

的正定解 S_x 。同时定义 T_x 为

$$T_x := \begin{bmatrix} T_{ax} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

其中 T_{ax} 为代数 Lyapunov 方程

$$A_{aa}^+ T_{ax} + T_{ax} (A_{aa}^+)^T = E_a^+ (E_a^+)^T \quad (7.12)$$

的唯一解。注意到 $-A_{aa}^+$ 是稳定的, (A_{bb}, C_b) 是可观的, 所以 $(-A_x, C_x)$ 是可检测的。而且假设 7.1 表明 (A_x, B_x) 是可镇定的。因此根据 Richardson 和 Kwong 的结果^[115], 解 S_x 和 T_{ax} 是存在且唯一的。

步骤 7.3 最小值 γ^* 为

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(T_x S_x^{-1})} \quad (7.13)$$

可以利用 Wielandt 的结果^[38] 证明 $T_x S_x^{-1}$ 的所有特征值是实的和非负的。♣

则有下面的定理成立。

定理 7.1 考虑式(7.1)所示的全信息系统。则在假设 7.1~7.4 下有

(1) 式(7.13)所给出的 γ^* 的确是极小值。

(2) 对 $\gamma > \gamma^*$, 半正定矩阵

$$P(\gamma) = (\Gamma_s^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_x - T_x/\gamma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad (7.14)$$

是满足定理 5.5 中条件(2.1)~(2.3)的唯一解。而且当 $\gamma < \gamma^*$ 时, 解 $P(\gamma)$ 不存在。♣

证明 在算法的 7.1 步, 假设 Σ_P 已经划分为式(4.13)。因此全信息系统(7.1)可被重新写为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + [B_0 & B_1] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} + Ew \\ \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{2,0} \\ C_{2,1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{22,0} \\ D_{22,1} \end{bmatrix} w \end{cases} \quad (7.15)$$

在证明中认为 $D_{22,0}=0$ 和 $D_{22,1}=0$ 。现在把预状态反馈律

$$u_0 = -C_{2,0}x + v_0 \quad (7.16)$$

应用于系统。则新的系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - B_0 C_{2,0})x + [B_0 & B_1] \begin{bmatrix} v_0 \\ u_1 \end{bmatrix} + Ew \\ \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2,1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7.17)$$

根据特殊坐标基的定理 4.5, 存在非奇异变换 Γ_s, Γ_o 和 Γ_i , 使得

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \Gamma_i \begin{bmatrix} v_0 \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_a^+ \\ x_b \\ x_a^- \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \Gamma_o \begin{bmatrix} h_0 \\ h_d \\ h_b \end{bmatrix}$$

根据 Σ_p 在虚轴上没有不变零点的假设 7.2 可知不存在状态分量 x_a^0 , 变换后的系统为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a^+ \\ \dot{x}_b \\ \dot{x}_a^- \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & 0 & 0 & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & A_{bb} & 0 & 0 & L_{bd} C_d \\ 0 & L_{ab}^- C_b & A_{aa}^- & 0 & L_{ad}^- C_d \\ B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & B_c E_{ca}^- & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & B_d E_{da}^- & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a^+ \\ x_b \\ x_a^- \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_b \\ E_a^- \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} w \end{aligned} \quad (7.18)$$

其中 $E_b=0$ 以及

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_d \\ h_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & \Gamma_{or} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a^+ \\ x_b \\ x_a^- \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

在预状态

$$u_0 = -C_{2,0}x + v_0$$

下,上面的变换以及非奇异状态和控制输入变换并没有改变解,原因是 γ^* 值不受影响。为了证明定理,我们需要引出下面的引理。

引理 7.1 系统(7.1)满足假设 7.1、假设 7.2 和假设 7.4, $\gamma > 0$, 则对于系统(7.1)存在一个全信息反馈控制律 $u = F_1 x + F_2 w$, 使得 $\|T_{hw}\|_{\infty} < \gamma$ 和 $\lambda(A + BF) \in C^-$ 成立的充分必要条件是代数 Riccati 方程

$$P_x A_x + A_x^T P_x + P_x E_x E_x^T P_x / \gamma^2 - P_x B_x B_x^T P_x + C_x^T C_x = 0 \quad (7.20)$$

存在实对称解 $P_x > 0$, 其中 A_x 、 B_x 和 C_x 的定义见式(7.7)~式(7.9), 而

$$E_x = \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_b \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

其中 E_b 没有约束。如果假设 7.3 成立的话, 则 $E_b = 0$ 。♣

证明 不失一般性, 假设系统已经被变换到式(7.18)和式(7.19)所示的形式。现在定义新的状态变量

$$x_1 := \begin{bmatrix} x_a^+ \\ x_b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

其中 x_3 只包含 x_d 的 m_d 个状态分量, 直接和被控输出 h_d 相关联, 而 x_2 包含了 x_a^- 、 x_c 和 x_d 的剩余分量。因此式(7.18)和式(7.19)变换后的系统动态可以被分解为

$$\dot{x}_1 = A_{11} x_1 + [B_{11} \quad A_{13}] \begin{bmatrix} v_0 \\ x_3 \end{bmatrix} + E_x w \quad (7.23)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{22} \\ B_{32} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} B_{21} & A_{21} \\ B_{31} & A_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} w \quad (7.24)$$

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

其中 A_{11} 、 B_{11} 、 A_{13} 、 C_{21} 和 C_{23} 如同式(7.5)和式(7.6)所定义, 而 A_{22} 、 A_{23} 、 \dots 、 E_3 是具有适当维数的矩阵。现在根据特殊坐标基的性质, 不难验证四元组

$$\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{22} \\ B_{32} \end{bmatrix}, [0 \quad I], 0 \right) \quad (7.26)$$

是右可逆和最小相位的。而且状态空间 $\mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3$ 张成了可控子空间 $\mathcal{S}^+(\Sigma_P)$ 。另一方面, 由四元组

$$\left(A_{11}, [B_{11} \quad A_{13}], \begin{bmatrix} 0 \\ C_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & C_{23} \end{bmatrix} \right) \quad (7.27)$$

所表示的子系统是左可逆的、没有无限零点和不稳定的不变零点。根据文献[98], 可得引理 7.1 的结果。◆

引理 7.2 若给定系统(7.1)满足假设 7.1~7.4, 则矩阵 Riccati 方程(7.20)存在一个对称解 $P_x > 0$ 的充分必要条件是 $S_x > T_x/\gamma^2$, 其中 S_x 和 T_x 分别是方程(7.10)和(7.11)的解。♣

证明 首先注意到式(7.11)所示的 T_x 实际上是下面 Lyapunov 方程的解:

$$A_x T_x + T_x A_x^T = E_x E_x^T \quad (7.28)$$

其中

$$E_x = \begin{bmatrix} E_x^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

这是由于假设 7.3 成立。同时注意到

$$T_x C_x^T = 0 \quad \text{和} \quad T_x C_x^T C_x T_x = 0 \quad (7.29)$$

现假设 $S_x > T_x/\gamma^2$, 定义正定矩阵

$$X := S_x - T_x/\gamma^2$$

根据式(7.10)、式(7.28)和式(7.29)可得

$$A_x X + X A_x^T + E_x E_x^T/\gamma^2 - B_x B_x^T + X C_x^T C_x X = 0 \quad (7.30)$$

用 $P_x := X^{-1}$ 前后乘式(7.30)可得

$$P_x A_x + A_x^T P_x + P_x E_x E_x^T P_x/\gamma^2 - P_x B_x B_x^T P_x + C_x^T C_x = 0 \quad (7.31)$$

所以 $P_x > 0$ 是方程(7.20)的解。

反过来, 设方程(7.20)有解 $P_x > 0$ 。令 $X := P_x^{-1} > 0$, 则有

$$A_x X + X A_x^T + E_x E_x^T/\gamma^2 - B_x B_x^T + X C_x^T C_x X = 0 \quad (7.32)$$

同时令 T_x 是 Lyapunov 方程

$$A_x T_x + T_x A_x^T = E_x E_x^T \quad (7.33)$$

的解, 它具有式(7.11)所示的特殊形式。所以式(7.29)成立。接下来定义 $\bar{S}_x = T_x/\gamma^2 + X$ 。显然有 $\bar{S}_x > T_x/\gamma^2$ 和 $\bar{S}_x \geq X > 0$ 。因而有

$$\begin{aligned} & A_x \bar{S}_x + \bar{S}_x A_x^T - B_x B_x^T + \bar{S}_x C_x^T C_x \bar{S}_x = A_x (T_x/\gamma^2 + X) \\ & + (T_x/\gamma^2 + X) A_x^T - B_x B_x^T + (T_x/\gamma^2 + X) C_x^T C_x (T_x/\gamma^2 + X) \\ & = (A_x T_x + T_x A_x^T - E_x E_x^T)/\gamma^2 \\ & + A_x X + X A_x^T + E_x E_x^T/\gamma^2 - B_x B_x^T + X C_x^T C_x X \\ & = 0 \end{aligned}$$

这表明 $\bar{S}_x > 0$ 是 Riccati 方程(7.10)的解。因为方程(7.10)只有一个正定解, 所以有 $\bar{S}_x = S_x$ 和 $S_x > T_x/\gamma^2$ 。这就完成了引理 7.2 的证明。◆

现在回到定理 7.1 的证明。假设 $\gamma > \gamma^*$, 很容易验证

$$P(\gamma) = (\Gamma_\gamma^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_x - T_x/\gamma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_\gamma^{-1}$$

满足定理 5.5 的条件(2.1)~(2.3)。因此存在 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的状态反馈律 $u = Fx$ (很

显然也存在一个全信息反馈律 $u = F_1 x + F_2 w$, 使得从扰动 w 到被控输出 h 的闭环系统传递函数的 H_∞ 范数小于 γ , 以及 $\lambda(A + BF) \in C^-$.

由于 $\gamma > \sqrt{\lambda_{\max}(T_x S_x^{-1})}$ 等价于 $S_x > T_x / \gamma^2$, 定理相反方向的证明可直接从引理 7.1 和引理 7.2 得到。由此结束定理 7.1 的证明。◆

以下是一些注释。

注 7.2 对于连续时间系统(7.1)在 $D_{22} = 0$ 时的全信息系统的 γ 值等于全状态反馈系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2 x + D_2 u + 0 \cdot w \end{cases} \quad (7.34)$$

的最小值, 所以也是由式(7.13)给出。♣

注 7.3 如果假设 7.3 的几何条件不满足, 则需要用迭代的方法来确定最小值。可以找最小的标量, 比如 $\tilde{\gamma}^*$, 使得 Riccati 方程

$$\tilde{P}_x A_x + A_x^T \tilde{P}_x + \tilde{P}_x E_x E_x^T \tilde{P}_x / (\tilde{\gamma}^*)^2 - \tilde{P}_x B_x B_x^T \tilde{P}_x + C_x^T C_x = 0 \quad (7.35)$$

有正定解 $\tilde{P}_x > 0$ 。也可以利用 Scherer^[19] 的结果, 直接对 Riccati 方程(7.20)采用 Newton 型迭代算法来求 γ^* 的近似值。Scherer 的算法具有二次收敛速率。♣

注 7.4 如果 Σ_P 右可逆, 则假设 7.3 自动满足。而且不再需要假设 7.4, 全信息反馈系统(7.1)的最小 γ^* 可通过下面的计算得到:

$$\gamma^* = \left[\lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} D_{22,1}^T D_{22,1} & 0 \\ 0 & \tilde{T}_x \tilde{S}_x^{-1} \end{bmatrix} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.36)$$

其中 \tilde{T}_x 和 \tilde{S}_x 分别是下面 Lyapunov 方程的半正定和正定解:

$$\begin{aligned} A_{aa}^+ \tilde{T}_x + \tilde{T}_x (A_{aa}^+)^T &= (E_a^+ - B_{0a}^+ D_{22,0} - L_{ad}^+ \Gamma_{or}^{-1} D_{22,1}) \\ &\quad \times (E_a^+ - B_{0a}^+ D_{22,0} - L_{ad}^+ \Gamma_{or}^{-1} D_{22,1})^T \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$A_{aa}^+ \tilde{S}_x + \tilde{S}_x (A_{aa}^+)^T = B_{0a}^+ (B_{0a}^+)^T + L_{ad}^+ \Gamma_{or}^{-1} (L_{ad}^+ \Gamma_{or}^{-1})^T \quad (7.38)$$

$D_{22,0}$ 和 $D_{22,1}$ 是方程(7.15)对于 D_{22} 非零时所定义的。另一方面, 全状态反馈系统(7.34)的最小值和式(7.36)是不同的, 它的计算式为

$$\gamma^* = \left[\lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} D_{22}^T D_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{T}_x \tilde{S}_x^{-1} \end{bmatrix} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.39)$$

其中 \tilde{T}_x 和 \tilde{S}_x 分别是 Lyapunov 方程(7.37)和(7.38)的半正定和正定解。利用定理 7.1 的相类似的证明方法就可以验证这些, 详细的证明可见 Chen^[111]。♣

下面给出几个例子来结束这一节。

例 7.1 考虑全信息系统(7.1)和全状态反馈系统(7.34), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0 \quad (7.41)$$

容易验证子系统 (A, B, C_2, D_2) 既不是左可逆, 也不是右可逆, 在 $s=1$ 处有一个不稳定的不变零点。而且已经是特殊坐标基的形式了, 其中

$$\Gamma_s = I_5, \quad \Gamma_{or} = I_3, \quad n_x = 3$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_x B_x^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_x^T C_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$A_{aa}^+ = 1, \quad E_a^+ = [5 \quad 1]$$

然后解方程(7.10)和(7.12)得到

$$S_x = \begin{bmatrix} 0.556281 & 0.185427 & -0.305593 \\ 0.185427 & 0.395142 & 0.231469 \\ -0.305593 & 0.231469 & 1.217984 \end{bmatrix}, \quad T_x = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于系统(7.1)和(7.34), 最小值为

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(T_x S_x^{-1})} = 6.4679044 \quad \clubsuit$$

例 7.2 考虑全信息系统(7.1)和一个全状态反馈系统(7.34), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

不难验证子系统 (A, B, C_2, D_2) 或 Σ_P 是可控和右可逆的, 在 2 处有一个不稳定的不变零点、一个 2 阶的无限零点。根据注 7.4 可得

$$\Gamma_s = I_4, \quad \Gamma_{or} = 1, \quad n_x = 1, \quad A_{aa}^+ = 2, \quad B_{0a}^+ = 1$$

$$L_{ad}^+ = 1, \quad E_a^+ = 4, \quad D_{22,0} = 2, \quad D_{22,1} = 1$$

和

$$\tilde{S}_x = 0.5, \quad \tilde{T}_x = 0.25$$

则全信息反馈系统的最小值为

$$\gamma^* = \left(\lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} D_{22,1}^T D_{22,1} & 0 \\ 0 & \tilde{T}_x \tilde{S}_x^{-1} \end{bmatrix} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

而全状态反馈系统的最小值为

$$\gamma^* = \left(\lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} D_{22}^T D_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{T}_x \tilde{S}_x^{-1} \end{bmatrix} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

可见是两个不同的值。 ♣

最后,对于全信息反馈系统(7.1),我们提出一个最小值 γ^* 的精确计算问题。 γ^* 的精确计算要严格依赖于下面的假设:

$$\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}(\Sigma_P) + \mathcal{S}(\Sigma_P) \tag{7.44}$$

还有一些次要的假设。而后面的一个例子中会发现假设(7.44)在计算 γ^* 的过程中并非必要条件。所以这仍然是个未解问题。

未解问题: 在没有假设(7.44)的情形下,如何计算全信息反馈系统(7.1)的精确最小值 γ^* 到现在为止还是一个未解问题。

我们相信上面的问题是可解的,或至少是部分可解。下面的例子表明在没有假设(7.44)的情形下,可以得到精确的 γ^* 。

例 7.3 考虑全信息反馈系统(7.1),其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0 \tag{7.46}$$

利用第 4 章的线性系统工具容易验证

$$\mathcal{V}^-(\Sigma_P) + \mathcal{S}^-(\Sigma_P) = \{0\} \tag{7.47}$$

所以假设(7.44)不成立。也容易看出系统(7.1)存在 $\gamma > \gamma^* \geq 0$ 次最优控制器的条件等价于下面代数 Riccati 方程存在半正定解 P :

$$PA + A^T P + PEE^T P / \gamma^2 - PBB^T P + C_2^T C_2 = 0 \tag{7.48}$$

令

$$P := \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\alpha} := \frac{1}{\gamma^2} - 1 \tag{7.49}$$

则方程(7.48)等价于

$$\begin{bmatrix} P_0^2 + P_1^2 + 2\alpha P_1 + \alpha & P_0(P_1 + P_2 + 2\alpha) \\ P_0(P_1 + P_2 + 2\alpha) & P_0^2 + P_2^2 + 2\alpha P_2 + 4\alpha \end{bmatrix} = 0 \quad (7.50)$$

或者

$$P_0(P_1 + P_2 + 2\alpha) = 0 \quad (7.51)$$

$$P_0^2 + P_1^2 + 2\alpha P_1 + \alpha = 0 \quad (7.52)$$

$$P_0^2 + P_2^2 + 2\alpha P_2 + 4\alpha = 0 \quad (7.53)$$

方程(7.51)表明

$$P_0 = 0 \quad \text{或} \quad P_1 + P_2 + 2\alpha = 0 \quad (7.54)$$

如果选择 $P_1 + P_2 + 2\alpha = 0$, 则

$$P_1 = -P_2 - 2\alpha \quad (7.55)$$

结合式(7.52)可得

$$P_0^2 + P_2^2 + 2\alpha P_2 + \alpha = 0 \quad (7.56)$$

显然方程(7.53)和(7.56)表明 $\alpha = 0$ 或等价地 $\gamma = 0$ 。但是 $\gamma > \gamma^* \geq 0$, 结果矛盾。所以应当选择 $P_0 = 0$ 。现在方程(7.52)和(7.53)成为

$$P_1^2 + 2\alpha P_1 + \alpha = 0 \quad (7.57)$$

$$P_2^2 + 2\alpha P_2 + 4\alpha = 0 \quad (7.58)$$

可以验证以上方程有正解 P_1 和 P_2 的充分必要条件是 $\alpha < 0$, 或等价地 $\gamma > 1$ 。所以 γ^* 的最优值为 $\gamma^* = 1$ 。而对任何 $\gamma > \gamma^* = 1$, 方程(7.48)的正定解 P 为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}(\sqrt{2\gamma^2 - 1} + \gamma) & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}(\sqrt{5\gamma^2 - 4} + \gamma) \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

♣

通常会有一大类系统不满足(7.44)的几何条件, 然而却可以计算出精确的最小值。这是非常有趣而又很具挑战性的问题。

7.3 输出反馈

本节中给出一个非迭代的、有良好数值特性的算法来计算下面测量反馈系统的精确 γ^* 值:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1x + D_1w \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (7.60)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动, $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量

输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。为了参考方便, 定义 Σ_P 为矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所代表的子系统, Σ_Q 为矩阵四元组 (A, E, C_1, D_1) 所代表的子系统。首先有下面的假设:

- 假设 7.5: (A, B) 是可镇定的;
- 假设 7.6: Σ_P 在虚轴上没有不变零点;
- 假设 7.7: $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^-(\Sigma_P) + \mathcal{S}^-(\Sigma_P)$;
- 假设 7.8: (A, C_1) 是可检测的;
- 假设 7.9: Σ_Q 在虚轴上没有不变零点;
- 假设 7.10: $\text{Ker}(C_2) \supset \mathcal{V}^-(\Sigma_Q) \cap \mathcal{S}^-(\Sigma_Q)$;
- 假设 7.11: $D_{22} = 0$. ♣

注 7.5 注意到假设 7.5 和 7.8, 即 (A, B) 可镇定和 (A, C_1) 可检测是任何内稳定控制存在的必要条件。7.4 节将去除假设 7.6 和 7.9。如果 Σ_P 是右可逆, Σ_Q 是左可逆, 则假设 7.7 和 7.10 就自动满足。在这种情况下, 假设 7.11 的 $D_{22} = 0$ 也可以完全去除(见后面的注 7.7)。 ♣

对于一般的测量反馈系统(7.60), 我们有下面的非迭代算法来计算最小值 γ^* 。

步骤 7.4 定义辅助全信息系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \\ h = C_2 x + D_2 u + D_{22} w \end{cases} \quad (7.61)$$

然后进行 7.2 节的步骤 7.1 和 7.2。为后面应用的方便, 对于系统(7.61)相关的特殊坐标基中的所有子矩阵和变换都加上下标“P”。特别是把 Σ_P 的特殊坐标基的状态变换重新记为 Γ_{xP} , $\mathbb{R}^n / \mathcal{S}^+(\Sigma_P)$ 的维数记为 n_{xP} 。式(7.10)中的 S_x 和式(7.11)中的 T_x 重新记为 S_{xP} 和 T_{xP} 。

步骤 7.5 定义另一个辅助全信息系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x + C_1^T u + C_2^T w \\ y = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \\ z = E^T x + D_1^T u + D_{22}^T w \end{cases} \quad (7.62)$$

对该辅助系统再次进行 7.2 节中步骤 7.1 和 7.2。对所有 Σ'_Q 的特殊坐标基中的子矩阵和变换都附上下标“Q”来表明它们和系统 Σ'_Q 的关系, 其中 Σ'_Q 是矩阵四元组 (A^T, C_1^T, E^T, D_1^T) 所表示系统 Σ_Q 的对偶系统。此时的特殊坐标基状态变换重新记为 Γ_{xQ} , $\mathbb{R}^n / \mathcal{S}^+(\Sigma'_Q)$ 的维数重新记为 n_{xQ} 。如同步骤 7.4, 式(7.10)中的 S_x 和式(7.11)中的 T_x 被重新记为 S_{xQ} 和 T_{xQ} 。

步骤 7.6 划分

$$\Gamma_{x^p}^{-1}(\Gamma_{x^q}^{-1})^T = \begin{bmatrix} \Gamma & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

其中 Γ 是一个 $n_{x^p} \times n_{x^q}$ 矩阵, 定义定常矩阵

$$M = \begin{bmatrix} T_{x^p} S_{x^p}^{-1} + \Gamma S_{x^q}^{-1} \Gamma^T S_{x^p}^{-1} & -\Gamma S_{x^q}^{-1} \\ -T_{x^q} S_{x^q}^{-1} \Gamma^T S_{x^p}^{-1} & T_{x^q} S_{x^q}^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

步骤 7.7 测量反馈系统(7.60)的最小 γ^* 为

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(M)} \quad (7.65)$$

后面的性质 7.4 会证明式(7.64)中的矩阵 M 只有实和非负的特征值。♣

上面算法的证明相当繁琐。在证明之前引入几个引理。首先定义

$$\gamma_p^* := \{\lambda_{\max}(T_{x^p} S_{x^p}^{-1})\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{和} \quad \gamma_q^* := \{\lambda_{\max}(T_{x^q} S_{x^q}^{-1})\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.66)$$

$$P(\gamma) := (\Gamma_{x^p}^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_{x^p} - T_{x^p}/\gamma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{x^p}^{-1} \quad (7.67)$$

和

$$Q(\gamma) := (\Gamma_{x^q}^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_{x^q} - T_{x^q}/\gamma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{x^q}^{-1} \quad (7.68)$$

则有下面的引理。

引理 7.3 考虑系统(7.60), 它满足假设 7.5~7.11。此时有

(1) 对于 $\gamma > \gamma_p^*$, 由式(7.67)所给出的半正定矩阵 $P(\gamma)$ 是矩阵不等式 $F_\gamma(P) \geq 0$ 的唯一解, 即定理 5.5 的条件(2.1), 满足定理 5.5 的秩条件(2.2)和(2.3)。而且当 $\gamma < \gamma_p^*$ 时, 满足这些条件的 $P(\gamma)$ 解不存在。

(2) 对于 $\gamma > \gamma_q^*$, 由式(7.68)所给出的半正定矩阵 $Q(\gamma)$ 是矩阵不等式 $G_\gamma(Q) \geq 0$ 的唯一解, 即定理 5.5 的条件(2.4), 满足定理 5.5 的秩条件(2.5)和(2.6)。而且当 $\gamma < \gamma_q^*$ 时, 满足这些条件的 $Q(\gamma)$ 解不存在。♣

证明 参照定理 7.1。◆

下一个引理给出测量反馈系统(7.60)最小 γ^* 值的等价性。

引理 7.4 令 $\gamma_{pq}^* := \max\{\gamma_p^*, \gamma_q^*\}$ 。则给定测量反馈系统(7.60)的最小值为

$$\gamma^* = \inf\{\gamma \in (\gamma_{pq}^*, \infty) \mid f(\gamma) < \gamma^2\} \quad (7.69)$$

其中标量函数

$$f(\gamma) := \rho\{P(\gamma)Q(\gamma)\} \quad (7.70)$$

而 $P(\gamma)$ 和 $Q(\gamma)$ 分别由式(7.67)和式(7.68)给出。♣

证明 由引理 7.4 可得 $\gamma^* \geq \gamma_{pq}^*$ 。接下来对任何 $\hat{\gamma} \in (\gamma_{pq}^*, \infty)$, 使得 $f(\hat{\gamma}) < \hat{\gamma}^2$, 即 $\rho\{P(\hat{\gamma})Q(\hat{\gamma})\} < \hat{\gamma}^2$, 由式(7.67)和式(7.68)所给出的 $P(\hat{\gamma})$ 和 $Q(\hat{\gamma})$ 满足定理 5.5 的条件。因此 $\hat{\gamma} > \gamma^*$, γ^* 和式(7.69)等价。◆

现在很容易证明式(7.70)所示的标量函数 $f(\gamma)$ 为

$$f(\gamma) = \lambda_{\max} \{ (S_{xP} - \gamma^{-2} T_{xP})^{-1} \Gamma (S_{xQ} - \gamma^{-2} T_{xP})^{-1} \Gamma^T \} \quad (7.71)$$

式(7.71)定义了从 (γ_{rQ}^*, ∞) 到 $[0, \infty)$ 的映射。它的计算包括维数 $n_{xP} \times n_{xP}$ 的矩阵最大特征值的求取, 这个维数比原先的矩阵积 $P(\gamma)Q(\gamma)$ 所涉及的维数要小得多。我们在下面的性质中给出函数 $f(\gamma)$ 的一些重要特性。

性质 7.1 $f(\gamma)$ 是 γ 在 (γ_{rQ}^*, ∞) 上的连续、非负和非增函数。 ♣

证明 首先证明 $P_x(\gamma) := (S_{xP} - \gamma^{-2} T_{xP})^{-1}$ 非增, 即如果 $\gamma_2 > \gamma_1$, 则 $P_x(\gamma_2) \leq P_x(\gamma_1)$ 。由于 $S_{xP} > 0$ 和 $T_{xP} > 0$, 对所有的 $\gamma_2 > \gamma_1 > \gamma_{rQ}^*$, 有

$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) T_{xP} \geq 0$$

等价于

$$S_{xP} - \gamma_1^{-2} T_{xP} \leq S_{xP} - \gamma_2^{-2} T_{xP}$$

因此

$$P_x(\gamma_2) \leq P_x(\gamma_1), \quad \gamma_2 > \gamma_1$$

类似的, 可以证明 $Q_x(\gamma) := (S_{xQ} - \gamma^{-2} T_{xQ})^{-1}$ 是非增的。所以 $\Gamma Q_x(\gamma) \Gamma^T$ 也是非增的。显然 $f(\gamma)$ 是 γ 在 (γ_{rQ}^*, ∞) 上的连续、非负和非增函数。 ◆

通过设置

$$f(\gamma_{rQ}^*) = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{rQ}^*} f(\gamma) \quad (7.72)$$

就可以把上面定义的函数 $f(\gamma)$ 当做从 (γ_{rQ}^*, ∞) 到 $[0, \infty)$ 的映射。根据性质 7.1, 极限 $f(\gamma_{rQ}^*)$ 是存在的, 既可以有限, 也可以无限。

性质 7.2 $f(\gamma) = \gamma^2$ 在区间 (γ_{rQ}^*, ∞) 上或者无解, 或者有唯一解。 ♣

证明 从性质 7.1 和 γ^2 对正的 γ 是严格递增的事实就得到此结论。 ◆

性质 7.3 如果 $f(\gamma) = \gamma^2$ 在区间 (γ_{rQ}^*, ∞) 没有解, 则 γ^* 等于 γ_{rQ}^* ; 否则 γ^* 就是 $f(\gamma) = \gamma^2$ 在区间 (γ_{rQ}^*, ∞) 上的唯一解。 ♣

证明 如果 $f(\gamma) = \gamma^2$ 在区间 (γ_{rQ}^*, ∞) 没有解, 则对所有 $\gamma \in (\gamma_{rQ}^*, \infty)$ 有 $f(\gamma) < \gamma^2$ 。因此根据引理 7.4 可得 $\gamma^* = \gamma_{rQ}^*$ 。另一方面, 当这样的解存在时, γ^* 显然是 $f(\gamma) = \gamma^2$ 的唯一解。 ◆

表面上看求 $f(\gamma) = \gamma^2$ 是一个关于 γ 的高度非线性代数方程的求根问题。而实际上只需要一步就可求解。就是当解在 (γ_{rQ}^*, ∞) 区间上存在的话, 可以把 $f(\gamma) = \gamma^2$ 的求解问题转化为定常矩阵的最大特征值计算问题, 即式(7.64)所示的 M 。实际上也要证明当 $f(\gamma) = \gamma^2$ 在 (γ_{rQ}^*, ∞) 区间上无解的话, 矩阵 M 的最大特征值就等于 γ_{rQ}^* , 也就是 γ^* 。为证明这一点, 引入一个 γ 的矩阵函数:

$$N(\gamma) := (S_{xQ} - \gamma^{-2} T_{xQ})^{-1} \Gamma (S_{xQ} - \gamma^{-2} T_{xQ})^{-1} \Gamma^T - \gamma^2 I \quad (7.73)$$

关于矩阵 M 和 $N(\gamma)$, 有下面的性质。

性质 7.4 式(7.64)所示的矩阵 M 的特征值为实和非负。 ♣

证明 首先有

$$\begin{aligned} \lambda\{M\} &= \lambda \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{xQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xP} + IS_{xP}^{-1}\Gamma^T & -IS_{xQ}^{-1} \\ -S_{xQ}^{-1}\Gamma^T & S_{xQ}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xP}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\} \\ &= \lambda \left\{ \begin{bmatrix} S_{xP}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{xQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xP} + IS_{xP}^{-1}\Gamma^T & -IS_{xQ}^{-1} \\ -S_{xQ}^{-1}\Gamma^T & S_{xQ}^{-1} \end{bmatrix} \right\} \quad (7.74) \\ &= \lambda \left\{ \begin{bmatrix} S_{xP}^{-1} & 0 \\ 0 & T_{xQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xP} + IS_{xP}^{-1}\Gamma^T & -IS_{xQ}^{-1} \\ -S_{xQ}^{-1}\Gamma^T & S_{xQ}^{-1} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

不难看出式(7.74)中的两个子矩阵都是对称和半正定的。利用 Wielandt 的结果^[38]容易证明 M 的特征值为实和非负。 ◆

性质 7.5

(1) $N(\gamma)$ 在 (γ_{PQ}^*, ∞) 上有实特征值。

(2) $\lambda_{\max}\{N(\gamma)\} = f(\gamma) - \gamma^2$ 在 (γ_{PQ}^*, ∞) 上是 γ 的连续和严格减函数。 ♣

证明 注意对所有的 $\gamma \in (\gamma_{PQ}^*, \infty)$, $(S_{xP} - \gamma^{-2}T_{xP})^{-1}$ 和 $(S_{xQ} - \gamma^{-2}T_{xQ})^{-1}$ 都是对称和正定的。所以对 $\gamma \in (\gamma_{PQ}^*, \infty)$, $N(\gamma)$ 的所有特征值为实数。第(2)项的证明根据性质 7.1 可得。 ◆

性质 7.6 $\det[N(\gamma)] = 0$ 的根是实数, 而且 $\det[N(\gamma)] = 0$ 在 (γ_{PQ}^*, ∞) 上的最大根等于 $\sqrt{\gamma_{\max}(M)}$ 。 ♣

证明 利用式(7.73)中的 $N(\gamma)$ 定义, 有

$$\begin{aligned} \det[N(\gamma)] &= (-1)^{n_P} \cdot \det[\gamma^2 I - (S_{xP} - \gamma^{-2}T_{xP})^{-1}\Gamma(S_{xQ} - \gamma^{-2}T_{xQ})^{-1}\Gamma^T] \\ &= \frac{(-1)^{n_P}}{\det[S_{xP} - \gamma^{-2}T_{xP}]} \cdot \det[\gamma^2 S_{xP} - T_{xP} - \gamma^2 \Gamma(S_{xQ} - \gamma^{-2}T_{xQ})^{-1}\Gamma^T] \\ &= \frac{(-1)^{n_P}}{\det[S_{xP} - \gamma^{-2}T_{xP}] \cdot \det[\gamma^2 S_{xQ} - T_{xQ}]} \cdot \det \begin{bmatrix} \gamma^2 S_{xP} - T_{xP} & \Gamma \\ \gamma^2 \Gamma^T & \gamma^2 S_{xQ} - T_{xQ} \end{bmatrix} \\ &= \frac{(-1)^{n_P} \cdot \det[S_{xP}] \cdot \det[S_{xQ}]}{\det[S_{xP} - \gamma^{-2}T_{xP}] \cdot \det[\gamma^2 S_{xQ} - T_{xQ}]} \cdot \det[\gamma^2 I - M] \end{aligned} \quad (7.75)$$

因为 $\det[\gamma^2 S_{xP} - T_{xP}] = 0$, $\det[\gamma^2 S_{xQ} - T_{xQ}] = 0$, $\det[\gamma^2 I - M] = 0$ 的根都为实数, 可见 $\det[N(\gamma)] = 0$ 的所有根也都是实数。显然对所有的 $\gamma \in (\gamma_{PQ}^*, \infty)$, 都有 $\det[\gamma^2 S_{xP} - T_{xP}] \neq 0$ 和 $\det[\gamma^2 S_{xQ} - T_{xQ}] \neq 0$ 。 $\det[N(\gamma)] = 0$ 在 (γ_{PQ}^*, ∞) 上的最大根等于 $\det[\gamma^2 I - M] = 0$ 的最大根, 等于 $\sqrt{\lambda_{\max}(M)}$ 。 ◆

现在可以证明测量反馈系统的最小 γ^* 值的计算算法了。我们有下面的定理。

定理 7.2 考虑测量反馈系统(7.60), 满足假设 7.5~7.11, 则

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(M)} \quad (7.76)$$

为最小值, 其中 M 如同式(7.64)所定义。 ♣

证明 首先证明当 $f(\gamma) = \gamma^2$ 在 (γ_{PQ}^*, ∞) 上有唯一解时, γ^* 是 $\det[N(\gamma)] = 0$ 的最大根。因为 $\lambda_{\max}[N(\gamma^*)] = f(\gamma^*) - (\gamma^*)^2 = 0$, 易见 $\det[N(\gamma^*)] = 0$ 。现在假设存在 γ_1 , 使得 $\det[N(\gamma_1)] = 0$ 和 $\gamma_1 > \gamma^*$ 。这表明 $N(\gamma_1)$ 存在一个特征值, 比如 $\lambda_i[N(\gamma_1)]$, 使得 $\lambda_i[N(\gamma_1)] \neq \lambda_{\max}[N(\gamma_1)]$ 和 $\lambda_i[N(\gamma_1)] = 0$, 所以有

$$\lambda_{\max}[N(\gamma_1)] > \lambda_i[N(\gamma_1)] = 0 = \lambda_{\max}[N(\gamma^*)] \quad (7.77)$$

这和性质 7.5 中的 $\lambda_{\max}[N(\gamma)]$ 是非增函数相矛盾。因此如性质 7.6 所证明, γ^* 是 $\det[N(\gamma)] = 0$ 的最大根, 等于 $\sqrt{\lambda_{\max}(M)}$ 。

现在考虑 $f(\gamma) = \gamma^2$ 在区间 (γ_{PQ}^*, ∞) 没有解的情况。此时显然有 $\gamma^* = \gamma_{PQ}^*$ 和 $0 \leq f(\gamma_{PQ}^*) \leq (\gamma_{PQ}^*)^2$ 。最后的不等式以及式(7.73)中的 $N(\gamma)$ 表明

$$-(\gamma_{PQ}^*) \leq \lambda_i[N(\gamma_{PQ}^*)] \leq 0 \quad (7.78)$$

所以 $N(\gamma_{PQ}^*)$ 的行列式是有界的。在 $\gamma = \gamma_{PQ}^*$ 处计算方程(7.75), 有

$$\begin{aligned} & \det[N(\gamma_{PQ}^*)] \cdot \det[S_{xP} - (\gamma_{PQ}^*)^{-2} T_{xP}] \cdot \det[(\gamma_{PQ}^*)^{-2} S_{xQ} - T_{xQ}] \\ & = (-1)^{n_{xP}} \cdot \det[S_{xP}] \cdot \det[S_{xQ}] \cdot \det[(\gamma_{PQ}^*)^2 I - M] \end{aligned} \quad (7.79)$$

根据式(7.66)和 γ_{PQ}^* 的定义, 有

$$\det[S_{xP} - (\gamma_{PQ}^*)^{-2} T_{xP}] \cdot \det[(\gamma_{PQ}^*)^{-2} S_{xQ} - T_{xQ}] = 0 \quad (7.80)$$

由于 $\det[N(\gamma_{PQ}^*)]$ 的有界性, 根据式(7.79)可得

$$\det[(\gamma_{PQ}^*)^2 I - M] = 0 \quad (7.81)$$

或者说 $(\gamma_{PQ}^*)^2$ 是 M 的一个特征值。而且由于 $\det[N(\gamma)] = 0$, 以及 $\det[\gamma^2 I - M] = 0$ 在 (γ_{PQ}^*, ∞) 上没有根, 所以 $\gamma_{PQ}^* = \sqrt{\lambda_{\max}(M)}$ 。定理 7.2 得证。◆

下面是一些注释。

注 7.6 如果假设 7.7 和 7.10 的几何条件不满足, 则可用迭代的方法来求最小值。就是找一个最小的标量 $\tilde{\gamma}^*$, 使得 Riccati 方程

$$\tilde{P}_x A_{xP} + A_{xP}^T \tilde{P}_x + \tilde{P}_x E_{xP} E_{xP}^T \tilde{P}_x / (\tilde{\gamma}^*)^2 - \tilde{P}_x B_{xP} B_{xP}^T \tilde{P}_x + C_{xP}^T C_{xP} = 0 \quad (7.82)$$

有一个正定解 $\tilde{P}_x > 0$, 而 Riccati 方程

$$\tilde{Q}_x A_{xQ} + A_{xQ}^T \tilde{Q}_x + \tilde{Q}_x E_{xQ} E_{xQ}^T \tilde{Q}_x / (\tilde{\gamma}^*)^2 - \tilde{Q}_x B_{xQ} B_{xQ}^T \tilde{P}_x + C_{xQ}^T C_{xQ} = 0 \quad (7.83)$$

有一个正定解 $\tilde{Q}_x > 0$, 以及

$$\lambda_{\max}\{\tilde{P}_x \Gamma \tilde{Q}_x \Gamma^T\} < (\tilde{\gamma}^*)^2 \quad (7.84)$$

这里 Γ 如式(7.63)所定义。所有带下标“P”的子矩阵与 Σ_P 和系统(7.61)的特殊坐标基分解有关, 所有带下标“Q”的子矩阵与 Σ_Q 和系统(7.62)的特殊坐标基分解有关。♣

注 7.7 如果子系统 Σ_P 右可逆, 子系统 Σ_Q 左可逆, 则假设 7.7 和 7.10 的几何条件自动满足。而且假设 7.11 的 $D_{22} = 0$ 也不再需要了。测量反馈系统(7.60)的最小 γ^* 为

$$\gamma^* = \left\{ \lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} D_{22,1P}^T D_{22,1P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{xP} \tilde{S}_{xP}^{-1} + \Gamma \tilde{S}_{xQ}^{-1} \Gamma^T \tilde{S}_{xP}^{-1} & -\Gamma \tilde{S}_{xQ}^{-1} & 0 \\ 0 & -\tilde{T}_{xQ} \tilde{S}_{xQ}^{-1} \Gamma^T \tilde{S}_{xP}^{-1} & \tilde{T}_{xQ} \tilde{S}_{xQ}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{22,1Q}^T D_{22,1Q} \end{bmatrix} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

其中 Γ 如式(7.63)所定义, \tilde{T}_{xP} 和 \tilde{S}_{xP} 为下面 Lyapunov 方程的半正定和正定解:

$$A_{aaP}^+ \tilde{T}_{xP} + \tilde{T}_{xP} (A_{aaP}^+)^T = (E_{aP}^+ - B_{0aP}^+ D_{22,0P} - L_{adP}^+ \Gamma_{orP}^{-1} D_{22,1P}) \times (E_{aP}^+ - B_{0aP}^+ D_{22,0P} - L_{adP}^+ \Gamma_{orP}^{-1} D_{22,1P})^T \quad (7.85)$$

$$A_{aaP}^+ \tilde{S}_{xP} + \tilde{S}_{xP} (A_{aaP}^+)^T = B_{0aP}^+ (B_{0aP}^+)^T + L_{adP}^+ \Gamma_{orP}^{-1} (L_{adP}^+ \Gamma_{orP}^{-1})^T \quad (7.86)$$

\tilde{T}_{xQ} 和 \tilde{S}_{xQ} 为下面 Lyapunov 方程的半正定和正定解:

$$A_{aaQ}^+ \tilde{T}_{xQ} + \tilde{T}_{xQ} (A_{aaQ}^+)^T = (E_{aQ}^+ - B_{0aQ}^+ D_{22,0Q} - L_{adQ}^+ \Gamma_{orQ}^{-1} D_{22,1Q}) \times (E_{aQ}^+ - B_{0aQ}^+ D_{22,0Q} - L_{adQ}^+ \Gamma_{orQ}^{-1} D_{22,1Q})^T \quad (7.87)$$

$$A_{aaQ}^+ \tilde{S}_{xQ} + \tilde{S}_{xQ} (A_{aaQ}^+)^T = B_{0aQ}^+ (B_{0aQ}^+)^T + L_{adQ}^+ \Gamma_{orQ}^{-1} (L_{adQ}^+ \Gamma_{orQ}^{-1})^T \quad (7.88)$$

同样的,所有带下标“P”的子矩阵与 Σ_P 和系统(7.61)的特殊坐标基分解有关,所有带下标“Q”的子矩阵与 Σ_Q^* 和系统(7.62)的特殊坐标基分解有关。上面推断的详细证明类似于定理 7.2 的证明,可参考 Chen^[111]。♣

下面给出例子来演示本节结果。

例 7.4 考虑测量反馈系统(7.60),其中 A, B, E, C_2, D_2 和 D_{22} 和 7.2 节中的例 7.1 一样,而

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.89)$$

(1) 在例 7.1 中已经计算出 $\Gamma_{aP} = I_5, n_{xP} = 3$, 而

$$S_{xP} = \begin{bmatrix} 0.556281 & 0.185427 & -0.305593 \\ 0.185427 & 0.395142 & 0.231469 \\ -0.305593 & 0.231469 & 1.217984 \end{bmatrix}, \quad T_{xP} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 子系统 (A, E, C_1, D_1) 是可逆和非最小相位的,并具有 4 个不变零点,分别分布在 $-1.630662, -3.593415$ 和 $0.521129 \pm j0.363042$ 。根据本节算法有

$$\Gamma_{aQ} = \begin{bmatrix} -0.011218 & -0.106028 & -0.906482 & -0.212184 & 0.090909 \\ 0.185213 & 0.745725 & 0.194520 & -0.119195 & 0.181818 \\ -0.919232 & 0.096732 & 0.326906 & -0.603079 & 0.272727 \\ 0.279141 & 0.532936 & 0.087364 & -0.581308 & 0.181818 \\ -0.206551 & -0.373195 & 0.161098 & 0.489027 & 0.090909 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{orQ} = 1, \quad A_Q = A_{aaQ}^+ = \begin{bmatrix} 0.433179 & -0.253237 \\ 0.551005 & 0.609080 \end{bmatrix}, \quad n_{xQ} = 2$$

$$B_Q B_Q^T = \begin{bmatrix} 0.033508 & -0.018630 \\ -0.018630 & 0.030289 \end{bmatrix}, \quad C_Q^T C_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{xQ}^+ = \begin{bmatrix} -0.769496 & 0.010023 & 0.448951 & -0.769496 \\ -0.090061 & 0.655677 & -1.044466 & -0.090061 \end{bmatrix}$$

和

$$S_{xQ} = \begin{bmatrix} 0.026333 & -0.021114 \\ -0.021114 & 0.043965 \end{bmatrix}, \quad T_{xQ} = \begin{bmatrix} 1.274771 & -0.555799 \\ -0.555799 & 1.764580 \end{bmatrix}$$

(3) $n_{xP} \times n_{xQ}$ 的矩阵 Γ 为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -0.011218 & -0.106028 \\ 0.185213 & -0.745725 \\ -0.919232 & 0.096732 \end{bmatrix}$$

和

$$M = 10^2 \times \begin{bmatrix} 0.500695 & -0.334250 & 0.245016 & 0.082332 & 0.052125 \\ -0.442374 & 0.992368 & -0.260321 & 0.032515 & 0.253128 \\ 0.616882 & -0.513348 & 0.588766 & 0.501907 & 0.261525 \\ 1.074941 & -1.295698 & 0.921909 & 0.622391 & 0.172484 \\ -0.583103 & 1.526365 & -0.286520 & 0.180099 & 0.487850 \end{bmatrix}$$

(4) 最后,测量反馈系统的最小值为

$$\gamma^* = 13.638725$$

♣

例 7.5 考虑测量反馈系统(7.60),其中 A, B, E, C_2, D_2 和 D_{22} 和 7.2 节中的例 7.2 一样,而

$$C_1 = [1 \quad -2 \quad 3 \quad -4], \quad D_1 = 0 \quad (7.90)$$

同样容易验证 (A, E, C_1, D_1) 所表示的子系统 Σ_Q 可观和可逆,在 $0.5 \pm j0.5916$ 上有两个不稳定的不变零点和一个二阶的无限零点。因此满足所有的假设。根据注 7.7 可得

$$n_{xP} = 1, \quad \tilde{S}_{xP} = 0.5, \quad \tilde{T}_{xP} = 0.25$$

$$\Gamma_{orQ} = 1, \quad n_{xQ} = 2$$

$$E_{xQ}^+ = \begin{bmatrix} -1.2230247 & -0.5241535 \\ 1.1679942 & 0.9408842 \end{bmatrix}, \quad L_{xQ}^+ = \begin{bmatrix} -0.6289841 \\ 1.3756377 \end{bmatrix}$$

$$A_{aaQ}^+ = \begin{bmatrix} 0.8842105 & -0.5101735 \\ 0.9753892 & 0.1157895 \end{bmatrix}$$

$$B_{0aQ}^+ = \emptyset, \quad D_{22,0Q} = \emptyset, \quad D_{22,1Q} = [2 \quad 1]$$

$$\tilde{S}_{xQ} = \begin{bmatrix} 0.5274947 & 0.5264991 \\ 0.5264991 & 3.7365053 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_{xQ} = \begin{bmatrix} 0.5810175 & 0.9950273 \\ 0.9950273 & 3.2589825 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = [-1.2230247 \quad 1.1679942]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.7252904 & 3.0610640 & -0.7439148 & 0 \\ 0 & 2.0766328 & 0.9724337 & 0.1292764 & 0 \\ 0 & 1.2428750 & 1.1820112 & 0.7056473 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

最后,最小值为

$$\gamma^* = 3.208848$$



7.4 具有虚轴零点的对象

本节对式(7.60)所示的测量反馈系统给出非迭代算法来计算 γ^* , 而子系统 Σ_P 和/或 Σ_Q 在虚轴上有不变零点。算法的过程和 7.3 节相似, 虽然稍微复杂一些。它包括求取 Σ_P 和 Σ_Q 在虚轴上不变零点的特征空间和求另外两个 Sylvester 方程的解。我们考虑的系统(7.60)满足下面的假设:

假设 7.12: (A, B) 可镇定;

假设 7.13: $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^-(\Sigma_P) + \mathcal{S}^-(\Sigma_P)$;

假设 7.14: (A, C_1) 可检测;

假设 7.15: $\text{Ker}(C_2) \supset \mathcal{V}^-(\Sigma_Q) \cap \mathcal{S}^-(\Sigma_Q)$;

假设 7.16: $D_{22} = 0$ 。



我们有下面的逐步算法来计算 γ^* 。尽管这和前面有些重合, 但这是为了完整性, 为计算最小值 γ^* 定义合适的矩阵。

步骤 7.8 把 (A, B, C_2, D_2) 所代表的子系统 Σ_P 变换到定理 4.5 所描述的特殊坐标基。对于 Σ_P 在特殊坐标基下的所有子矩阵, 我们都附上下标“P”来表明它们和系统 Σ_P 的关系。我们也对原先的状态变换引入另外的排列矩阵使得变换后的状态变量为

$$\tilde{x}_P = \begin{bmatrix} x_{aP}^+ \\ x_{bP} \\ x_{aP}^0 \\ x_{aP}^- \\ x_{cP} \\ x_{dP} \end{bmatrix} \quad (7.91)$$

下面计算

$$\Gamma_{sP}^{-1} E = \begin{bmatrix} E_{aP}^+ \\ E_{bP} \\ E_{aP}^0 \\ E_{aP}^- \\ E_{cP} \\ E_{dP} \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

注意假设 7.13 表明 $E_{bP} = 0$ 。然后定义下面的矩阵：

$$A_P := \begin{bmatrix} A_{aaP}^+ & L_{abP}^+ C_{bP} & 0 \\ 0 & A_{bbP} & 0 \\ 0 & L_{abP}^0 C_{bP} & A_{aaP}^0 \end{bmatrix}, \quad B_P := \begin{bmatrix} B_{0aP}^+ & L_{adP}^+ \\ B_{0bP} & L_{bdP} \\ B_{0aP}^0 & L_{adP}^0 \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

$$E_P := \begin{bmatrix} E_{aP}^+ \\ E_{bP} \\ E_{aP}^0 \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

和

$$C_P := \Gamma_{cP} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{bP} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_P := \Gamma_{cP} \begin{bmatrix} I_{m_0P} & 0 \\ 0 & C_{dP} C_{dP}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.95)$$

经过一些简单的代数运算可以证明对某些行满秩矩阵 \tilde{C}_{bP} ，有

$$C_P^T [I - D_P (D_P^T D_P)^{-1} D_P^T] C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{bP}^T \tilde{C}_{bP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

$$A_P - B_P (D_P^T D_P)^{-1} D_P^T C_P = \begin{bmatrix} A_{aaP}^+ & \tilde{L}_{abP}^+ \tilde{C}_{bP} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{bbP} & 0 \\ 0 & \tilde{L}_{abP}^0 \tilde{C}_{bP} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.97)$$

和对某些适当的矩阵 \tilde{L}_{abP} 、 \tilde{L}_{abP}^0 、 \tilde{L}_{adP}^+ 、 \tilde{L}_{bdP} 、 \tilde{L}_{adP}^0 ，有

$$B_P (D_P^T D_P)^{-1} B_P^T = \begin{bmatrix} B_{0aP}^+ & \tilde{L}_{adP}^+ \\ B_{0bP} & \tilde{L}_{bdP} \\ B_{0aP}^- & \tilde{L}_{adP}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{0aP}^+ & \tilde{L}_{adP}^+ \\ B_{0bP} & \tilde{L}_{bdP} \\ B_{0aP}^- & \tilde{L}_{adP}^0 \end{bmatrix}^T \quad (7.98)$$

在这里注意到只要 (A_{bbP}, C_{bP}) 是可观测的，很容易验证 $(\tilde{A}_{bbP}, \tilde{C}_{bP})$ 也是可观测的。

步骤 7.9 定义

$$A_{xP} := \begin{bmatrix} A_{aaP}^+ & \tilde{L}_{abP}^+ C_{bP} \\ 0 & \tilde{A}_{bbP} \end{bmatrix}, \quad B_{xP} := \begin{bmatrix} B_{0aP}^+ & \tilde{L}_{adP}^+ \\ B_{0bP} & \tilde{L}_{bdP} \end{bmatrix} \quad (7.99)$$

和

$$C_{xP} := [0 \quad \tilde{C}_{bP}], \quad E_{xP} := \begin{bmatrix} E_{aP}^+ \\ E_{bP} \end{bmatrix} \quad (7.100)$$

然后对下面的 Riccati 方程:

$$A_{xP} S_{xP} + S_{xP} A_{xP}^T - B_{xP} B_{xP}^T + S_{xP} C_{xP}^T C_{xP} S_{xP} = 0 \quad (7.101)$$

求出唯一正定解 S_{xP} 。定义矩阵 T_{xP} 为

$$T_{xP} := \begin{bmatrix} T_{axP} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 T_{axP} 是 Lyapunov 方程

$$A_{axP}^+ T_{axP} + T_{axP} (A_{axP}^+)^T = E_{aP}^+ (E_{aP}^+)^T \quad (7.102)$$

的唯一解。接下来求下面 Sylvester 方程的唯一解 Y_{xP} :

$$\begin{aligned} (A_{xP} + S_{xP} C_{xP}^T C_{xP}) Y_{xP} + Y_{xP} (A_{axP}^0)^T + S_{xP} C_{xP}^T (\tilde{L}_{abP}^0)^T \\ - B_{xP} [B_{0aP}^0 \quad \tilde{L}_{adP}^0]^T = 0 \end{aligned} \quad (7.103)$$

现在把 A_{axP}^0 在虚轴上的非负特征值表示为 $\{j\omega_{P1}, \dots, j\omega_{Pk_P}\}$, $i=1, \dots, k_P$, 选择复矩阵 V_{iP} , 它的列构成了特征空间的基, 即

$$\{x \in C^{n_{aP}^0} \mid x^H (j\omega_{Pi} I - A_{axP}^0) = 0\} \quad (7.104)$$

其中 n_{aP}^0 是 A_{axP}^0 的维数。然后定义

$$\begin{aligned} F_{iP} := V_{iP}^H \left([B_{0aP}^0 \quad \tilde{L}_{adP}^0] [B_{0aP}^0 \quad \tilde{L}_{adP}^0]^T + \tilde{L}_{abP}^0 (\tilde{L}_{abP}^0)^T \right. \\ \left. - [(\tilde{L}_{abP}^0)^T + C_P Y_P]^T [(\tilde{L}_{abP}^0)^T + C_P Y_P] \right) V_{iP} \end{aligned} \quad (7.105)$$

$i=1, \dots, k_P$, 以及

$$F_P := \text{blkdiag}\{F_{1P}, \dots, F_{k_P P}\} \quad (7.106)$$

在文献[20]中已经证明了 $F_P > 0$ 。同时定义

$$G_P := \text{blkdiag}\{V_{1P}^H E_{aP}^0 (E_{aP}^0)^T V_{1P}, \dots, V_{k_P P}^H E_{aP}^0 (E_{aP}^0)^T V_{k_P P}\} \quad (7.107)$$

步骤 7.10 把 (A^T, C^T, E^T, D^T) 所表示的子系统 Σ'_Q 变换到定理 4.5 所描述的特殊坐标基。同样的, 对 Σ'_Q 在特殊坐标基下的所有子矩阵和变换都附上下标“Q”, 把变换后的状态变量排列为

$$\tilde{x}_Q = \begin{bmatrix} x_{aQ}^+ \\ x_{bQ} \\ x_{aQ}^0 \\ x_{aQ}^- \\ x_{cQ} \\ x_{dQ} \end{bmatrix} \quad (7.108)$$

接下来计算

$$\Gamma_{sQ}^{-1} C_2^T = \begin{bmatrix} E_{sQ}^+ \\ E_{bQ} \\ E_{sQ}^0 \\ E_{sQ}^- \\ E_{cQ} \\ E_{dQ} \end{bmatrix} \quad (7.109)$$

注意到假设 7.15 表明 $E_{bQ} = 0$ 。然后定义下面的矩阵:

$$A_Q := \begin{bmatrix} A_{asQ}^+ & L_{abQ}^+ C_{bQ} & 0 \\ 0 & A_{bbQ} & 0 \\ 0 & L_{abQ}^0 C_{bQ} & A_{asQ}^0 \end{bmatrix}, \quad B_Q := \begin{bmatrix} B_{0aQ}^+ & L_{adQ}^+ \\ B_{0bQ} & L_{bdQ} \\ B_{0aQ}^0 & L_{adQ}^0 \end{bmatrix} \quad (7.110)$$

$$E_Q := \begin{bmatrix} E_{sQ}^+ \\ E_{bQ} \\ E_{sQ}^0 \end{bmatrix} \quad (7.111)$$

和

$$C_Q := \Gamma_{oQ} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{bQ} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_Q := \Gamma_{oQ} \begin{bmatrix} I_{m_0Q} & 0 \\ 0 & C_{dQ} C_{dQ}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.112)$$

经过一些简单的代数运算,很容易证明对某些行满秩矩阵 \tilde{C}_{bQ} , 有

$$C_Q^T [I - D_Q (D_Q^T D_Q)^{-1} D_Q^T] C_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{bQ}^T \tilde{C}_{bQ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.113)$$

和对某些适当的矩阵 \tilde{L}_{abQ} 、 \tilde{L}_{abQ}^0 、 \tilde{L}_{adQ}^+ 、 \tilde{L}_{bdQ} 和 \tilde{L}_{adQ}^0 , 有

$$A_Q - B_Q (D_Q^T D_Q)^{-1} D_Q^T C_Q = \begin{bmatrix} A_{asQ}^+ & \tilde{L}_{abQ}^+ \tilde{C}_{bQ} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{bbQ} & 0 \\ 0 & \tilde{L}_{abQ}^0 \tilde{C}_{bQ} & A_{asQ}^0 \end{bmatrix} \quad (7.114)$$

$$B_Q (D_Q^T D_Q)^{-1} B_Q^T = \begin{bmatrix} B_{0aQ}^+ & \tilde{L}_{adQ}^+ \\ B_{0bQ} & \tilde{L}_{bdQ} \\ B_{0aQ}^0 & \tilde{L}_{adQ}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{0aQ}^+ & \tilde{L}_{adQ}^+ \\ B_{0bQ} & \tilde{L}_{bdQ} \\ B_{0aQ}^0 & \tilde{L}_{adQ}^0 \end{bmatrix}^T \quad (7.115)$$

这里注意到只要 (A_{bbQ}, C_{bQ}) 是可观测的, 矩阵对 $(\tilde{A}_{bbQ}, \tilde{C}_{bQ})$ 就是可观测的。

步骤 7.11 定义

$$A_{xQ} := \begin{bmatrix} A_{asQ}^+ & \tilde{L}_{abQ}^+ \tilde{C}_{bQ} \\ 0 & \tilde{A}_{bbQ} \end{bmatrix}, \quad B_{xQ} := \begin{bmatrix} B_{0aQ}^+ & \tilde{L}_{adQ}^+ \\ B_{0bQ} & \tilde{L}_{bdQ} \end{bmatrix} \quad (7.116)$$

和

$$C_{xQ} := [0 \quad \tilde{C}_{bQ}], \quad E_{xQ} := \begin{bmatrix} E_{aQ}^+ \\ E_{bQ} \end{bmatrix} \quad (7.117)$$

然后对下面的 Riccati 方程求唯一的正定解 S_{xQ} :

$$A_{xQ} S_{xQ} + S_{xQ} A_{xQ}^T - B_{xQ} B_{xQ}^T + S_{xQ} C_{xQ}^T C_{xQ} S_{xQ} = 0 \quad (7.118)$$

还有如下定义的矩阵 T_{xQ} :

$$T_{xQ} := \begin{bmatrix} T_{axQ} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 T_{axQ} 是 Lyapunov 方程

$$A_{axQ}^+ T_{axQ} + T_{axQ} (A_{axQ}^+)^T = E_{aQ}^+ (E_{aQ}^+)^T \quad (7.119)$$

的唯一解。接下来求下面 Sylvester 方程的唯一解 Y_{sQ} :

$$\begin{aligned} (A_{xQ} + S_{xQ} C_{xQ}^T C_{xQ}) Y_{sQ} + Y_{sQ} (A_{aaQ}^0)^T + S_{xQ} C_{xQ}^T (\tilde{L}_{abQ}^0)^T \\ - B_{xQ} [B_{0aQ}^0 \quad \tilde{L}_{adQ}^0]^T = 0 \end{aligned} \quad (7.120)$$

把 A_{aaQ}^0 在虚轴上的非负特征值表示为 $\{j\omega_{Q1}, \dots, j\omega_{Qk_Q}\}$, $i=1, \dots, k_Q$, 选择复矩阵, 它的列由特征空间构成, 即

$$\{x \in \mathbb{C}^{n_{aQ}^0} \mid x^H (j\omega_{Qi} I - A_{aaQ}^0) = 0\} \quad (7.121)$$

其中 n_{aQ}^0 是 A_{aaQ}^0 的维数。然后对 $i=1, \dots, k_Q$ 定义

$$F_{iQ} := V_{iQ}^H \left([B_{0aQ}^0 \quad \tilde{L}_{adQ}^0] [B_{0aQ}^0 \quad \tilde{L}_{adQ}^0]^T + \tilde{L}_{abQ}^0 (\tilde{L}_{abQ}^0)^T \right. \\ \left. - [(\tilde{L}_{abQ}^0)^T + C_Q Y_Q]^T [(\tilde{L}_{abQ}^0)^T + C_Q Y_Q] \right) V_{iQ} \quad (7.122)$$

$$F_Q := \text{blkdiag}\{F_{1Q}, \dots, F_{k_Q Q}\} \quad (7.123)$$

仍然可以证明 $F_Q > 0$ 。定义

$$G_Q := \text{blkdiag}\{V_{1Q}^H E_{aQ}^0 (E_{aQ}^0)^T V_{1Q}, \dots, V_{k_Q Q}^H E_{aQ}^0 (E_{aQ}^0)^T V_{k_Q Q}\} \quad (7.124)$$

步骤 7.12 定义

$$n_{xP} := \dim\{\mathbb{R}^n / \mathcal{S}^+(\Sigma_P)\} - n_{aP}^0 \quad (7.125)$$

$$n_{xQ} := \dim\{\mathbb{R}^n / \mathcal{S}^+(\Sigma'_Q)\} - n_{aQ}^0 \quad (7.126)$$

进行下面的分块

$$\Gamma_{xP}^{-1} (\Gamma_{xQ}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (7.127)$$

其中 Γ 的维数是 $n_{xP} \times n_{xQ}$ 。最后定义定常矩阵

$$M := \begin{bmatrix} G_P F_P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{xP} S_{xP}^{-1} + \Gamma S_{xQ}^{-1} \Gamma^T S_{xP}^{-1} & -\Gamma S_{xQ}^{-1} & 0 \\ 0 & -T_{xQ} S_{xQ}^{-1} \Gamma^T S_{xP}^{-1} & T_{xQ} S_{xQ}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_Q F_Q^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.128)$$

步骤 7.13 最小值 γ^* 为

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(M)} \quad (7.129)$$

我们将在下面的定理 7.3 中来证明这个结果。♣

则有下面的主要定理。

定理 7.3 考虑式(7.60)所示的测量反馈系统。则在假设 7.12~7.16 下,对应的 H_∞控制问题的最小值由式(7.129)给出。♣

证明 根据 Scherer 的结果^[21],可以证明

$$\gamma > \gamma_P^* := \max\{\sqrt{\lambda_{\max}(T_{xp}S_{xp}^{-1})}, \sqrt{\lambda_{\max}(G_P F_P^{-1})}\} \quad (7.130)$$

的充分必要条件是下面的代数 Riccati 不等式有正定解:

$$\begin{aligned} & [A_P - B_P(D_P^T D_P)^{-1} D_P C_P]X + X[A_P - B_P(D_P^T D_P)^{-1} D_P C_P]^T \\ & + \gamma^2 E_P E_P^T + X C_P [I - D_P(D_P^T D_P)^{-1} D_P^T] C_P X - B_P(D_P^T D_P)^{-1} B_P^T < 0 \end{aligned}$$

然后根据文献[20]和[21]的结果(也可参见定理 5.6)和一些简单的代数运算可得,对 $\gamma > \gamma_P^*$, 下面的半正定矩阵

$$P(\gamma) = (\Gamma_{xp}^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_{xp} - \gamma^{-2} T_{xp})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{xp}^{-1} \quad (7.131)$$

是集合

$$\{P > 0 \mid \exists F: (A + BF)^T P + P(A + BF) + \gamma^2 PEE^T P + (C_2 + D_2 F)^T (C_2 + D_2 F) < 0\}$$

的下极限点。而当 $\gamma > \gamma_P^*$ 时, $P(\gamma)$ 是不存在的。根据对偶可推断

$$\gamma > \gamma_Q^* := \max\{\sqrt{\lambda_{\max}(T_{xq}S_{xq}^{-1})}, \sqrt{\lambda_{\max}(G_Q F_Q^{-1})}\} \quad (7.132)$$

的充分必要条件是下面的代数 Riccati 不等式有正定解:

$$\begin{aligned} & [A_Q - B_Q(D_Q^T D_Q)^{-1} D_Q C_Q]Z + Z[A_Q - B_Q(D_Q^T D_Q)^{-1} D_Q C_Q]^T \\ & + \gamma^2 E_Q E_Q^T + X C_Q [I - D_Q(D_Q^T D_Q)^{-1} D_Q^T] C_Q Z - B_Q(D_Q^T D_Q)^{-1} B_Q^T < 0 \end{aligned}$$

对于 $\gamma > \gamma_Q^*$, 下面的半正定矩阵

$$Q(\gamma) = (\Gamma_{xq}^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_{xq} - \gamma^{-2} T_{xq})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{xq}^{-1} \quad (7.133)$$

是集合

$$\{Q > 0 \mid \exists K: (A + KC_1)Q + Q(A + KC_1)^T + \gamma^2 Q C_1^T C_1 Q + (E + KD_1)(E + KD_1)^T < 0\}$$

的下极限点。而当 $\gamma < \gamma_Q^*$ 时, $Q(\gamma)$ 是不存在的。现在定义

$$\gamma_{PQ}^* := \max\{\sqrt{\lambda_{\max}(T_{xp}S_{xp}^{-1})}, \sqrt{\lambda_{\max}(T_{xq}S_{xq}^{-1})}\} \quad (7.134)$$

和

$$\gamma_{\text{coup}}^* := \sup\{\gamma \in (\gamma_{PQ}^*, \infty) \mid \rho[P(\gamma)Q(\gamma)] < \gamma^2\} \quad (7.135)$$

其中 $P(\gamma)$ 和 $Q(\gamma)$ 分别由式(7.131)和式(7.133)给出。然后根据 Scherer 的结果^[21]很容易证明

$$\gamma^* = \max\{\gamma_{\text{coup}}^*, \sqrt{\lambda_{\max}(G_P F_P^{-1})}, \sqrt{\lambda_{\max}(G_Q F_Q^{-1})}\} \quad (7.136)$$

根据定理 7.2 可得

$$\gamma_{\text{coup}}^* = \left\{ \lambda_{\max} \begin{bmatrix} T_{xP} S_{xP}^{-1} + I S_{xQ}^{-1} \Gamma^T S_{xP}^{-1} & -I S_{xQ}^{-1} \\ -T_{xQ} S_{xQ}^{-1} \Gamma^T S_{xP}^{-1} & T_{xQ} S_{xQ}^{-1} \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.137)$$

因此定理 7.3 的结果得证。 \blacklozenge

下面的例子演示了本节的主要结果。

例 7.6 考虑系统(7.60), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 11 & -21.876238 & -4.2239 & -2.425699 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.139)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0 \quad (7.140)$$

首先, 很容易验证子系统 Σ_P 是左可逆的, 在 $\pm j$ 上有两个不变零点, 满足假设 7.13。对 Σ_P 进行特殊坐标基变换可得

$$\Gamma_{sP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1.3660254 & 0.3660254 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1988066 & 1.9900945 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{sP} = \begin{bmatrix} -0.1614784 & 0.2246812 \\ 0.6026457 & -0.8385216 \end{bmatrix}, \quad B_{sP} = \begin{bmatrix} 0.6040578 & -0.1762197 \\ 0.4723969 & 0.4878984 \end{bmatrix}$$

$$C_{sP} = \begin{bmatrix} 1.3544397 & 0.2665382 \\ 0.2665382 & 2.0058434 \end{bmatrix}, \quad E_{bP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\text{adP}}^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}_{\text{adP}}^0 = \begin{bmatrix} 0.9489977 & 1.0485243 \\ -0.9489977 & -1.0485243 \end{bmatrix}$$

和

$$[B_{\text{0adP}}^0 \quad \tilde{L}_{\text{adP}}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_{\text{adP}}^0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

由步骤 7.9 可得

$$S_{xp} = \begin{bmatrix} 0.6180716 & -0.2516670 \\ -0.2516670 & 0.7339429 \end{bmatrix}, \quad T_{xp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{xp} = \begin{bmatrix} -0.6928337 & -0.0822109 \\ -0.3161228 & 0.3068152 \end{bmatrix}$$

$$F_p = 2.3885733, \quad G_p = 3.5$$

子系统 Σ_Q 是可逆和非最小相位的, 在 $0.078944 \pm j2.302011$ 和 -4.095803 处有不变零点。因此假设 7.15 自动满足。对 Σ'_Q 进行特殊坐标基变换可得

$$\Gamma_{sQ} = \begin{bmatrix} 0.2148444 & 0.0018481 & 0.2169145 & 0.0698280 & 0.2 \\ 0.5503097 & 0.6645646 & -0.6352193 & 0.8023543 & 0.4 \\ -0.7990597 & -0.7456317 & -0.5938518 & -0.5805731 & 0.6 \\ -0.0941402 & -0.0440333 & 0.3437855 & 0.0892284 & 0.4 \\ -0.0603521 & 0.0210926 & -0.2803500 & -0.0795282 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$A_{xQ} = A_{ssQ}^+ = 0.0789442, \quad B_{xQ} = [2.3596219 \quad -0.1725085], \quad C_{xQ} = 0$$

$$E_{sQ}^+ = [0.1593412 \quad 0.0009204 \quad 0.0116587 \quad 0.1593412]$$

和

$$A_{ssQ}^0 = \begin{bmatrix} 0.8733954 & -14.3566212 \\ 0.4222493 & 0.8733953 \end{bmatrix}$$

$$[B_{ssQ}^0 \quad \tilde{L}_{sdQ}^0] = \begin{bmatrix} 13.8502316 & -10.8089077 \\ 0.3251762 & -1.3752299 \end{bmatrix}$$

$$E_{sQ}^0 = \begin{bmatrix} -1.9958628 & 6.3511003 & -0.7973732 & -1.9958628 \\ -0.5082606 & 0.0920508 & -0.4908900 & -0.5082606 \end{bmatrix}$$

根据步骤 7.11 可得

$$S_{xQ} = 35.4527292, \quad T_{xQ} = 0.3224810$$

$$Y_{xQ} = [-5.2529064 \quad 93.6614674]$$

和

$$F_Q = 8.4694885, \quad G_Q = 35.4527292$$

最后计算出

$$M = \begin{bmatrix} 1.4653098 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0000103 & -0.0000451 & 0.0003744 & 0 \\ 0 & 0.0000632 & 0.0002763 & -0.0022958 & 0 \\ 0 & -0.0002503 & -0.0010946 & 0.0090961 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2110284 \end{bmatrix}$$

则有

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(M)} = 1.2104998$$



我们最后给出这样的说明,容易验证第5章中5.7.2节的最大化复值稳定半径问题、5.7.3节的带有加性摄动对象的鲁棒镇定问题、5.7.4节的带有乘性摄动对象的鲁棒镇定问题,所采用的辅助系统满足假设7.12~7.16。因此可以精确计算出最小值。

第 8 章 连续时间 H_∞ 问题的解

8.1 导 论

本章的主要工作是对连续时间系统 H_∞ 次优控制问题给出解析解。所谓解析解是指解的形式显式地以 γ 为参数,而并不需要特定的 γ 值,因此可以以干扰抑制的需要来调整参数 γ , 这样的设计方法称为“单步”法。本章给出一类一般化 H_∞ 次优控制问题的解析解,这类系统从控制输入到被控输出的子系统、从干扰输入到测量输出的子系统满足一些几何条件和其他一些弱的假设,即第 7 章的假设 7.5~7.11。而且也给出了状态反馈下 H_∞ 最优控制问题解的存在条件和解析解的表达式。最后探讨了 H_∞ 最优或次优状态或输出反馈下的闭环系统零极点对消问题。

在 H_∞ 次优控制问题中,产生解析解方法的主要特点是:

(1) 解析解的产生不要求 H_∞ -CARE,因此求 H_∞ -CARE 所有的数值计算问题都不会出现。

(2) 在利用软件或硬件来实现 H_∞ 次优控制问题的解析解时,可以在线调整 γ 值。这样的“技巧”对闭环系统的性能和鲁棒性有直接的影响,所以从实际应用的角度出发,这种方法也是具有吸引力的。

(3) H_∞ 次优控制问题的解析解使我们能够很好地理解在所有的内稳定控制器中,当参数 γ 接近 T_{hw} 的 H_∞ 最小值时控制器所表现出的性能(如高增益、带宽等)。

上面的结果在文献[17]中已有报道。当假设 7.5~7.11 不满足时,可以由类似的方法来计算 γ 次优解,但不能得到解析的形式。本章的安排如下:8.2 节给出 H_∞ 次优状态反馈控制问题的解析解,8.3 节给出 H_∞ 次优测量反馈控制问题的解析解(全阶控制器);8.4 节给出降阶 γ 次优控制器的设计方法;最后,在 8.5 节证明本章所有的主要结果。

8.2 全状态反馈

考虑下面的全状态反馈系统的 H_∞ 优化问题:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (8.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^r$ 是外部扰动输入, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。同样的, 令 Σ_P 表示由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所构成的子系统。如同 7.2 节, 我们有下面的假设:

假设 8.1: (A, B) 可镇定;

假设 8.2: Σ_P 在虚轴上没有不变零点;

假设 8.3: $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^-(\Sigma_P) + \mathcal{S}^-(\Sigma_P)$;

假设 8.4: $D_{22} = 0$ 。 ♣

本节将利用所谓的渐近时间尺度和特征结构配置 (ATEA) 的设计方法来设计 H_∞ 次优状态反馈控制器并得到它的解析解。ATEA 设计过程的概念首先由 Saveri 和 Sannuti^[116] 提出, 而 Chen^[79] 进行了完整的时间尺度性质和 Lyapunov 稳定性分析。它的设计过程充分利用了给定系统的特殊坐标基 (见定理 4.5) 及其所有的特性。我们也给出 H_∞ 最优控制问题存在解的条件, 以及这些最优解的表达式。下面的逐步算法构造出 γ 次优状态反馈控制律的解析解, 它以 $\gamma > \gamma^*$ 为参数, ϵ 为可调参数。

步骤 8.1 把系统 Σ_P 变换到第 4 章的定理 4.5 中的特殊坐标基。对于 Σ_P 在特殊坐标基下的所有子矩阵和变换都附上下标“P”以示和系统 Σ_P 的关系。我们也选择下面的输出变换 Γ_{orP} :

$$\Gamma_{\text{orP}} = \begin{bmatrix} I_{m_{\text{orP}}} & 0 \\ 0 & \Gamma_{\text{orP}} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

其中 $m_{\text{orP}} = \text{rank}(D_2)$ 。接下来计算

$$\bar{E} = \Gamma_{\text{sp}}^{-1} E = \begin{bmatrix} E_{\text{ap}}^+ \\ E_{\text{bp}} \\ E_{\text{ap}}^- \\ E_{\text{cp}} \\ E_{\text{dp}} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

注意假设 8.3 表明 $E_{\text{bp}} \equiv 0$ 。为了记号的简约, 用 n_{xp} 表示 $\mathbb{R}^n / \mathcal{S}^+(\Sigma_P)$ 的维数。注意 $n_{\text{xp}} = 0$ 的充分必要条件是 Σ_P 右可逆和最小相位。下面定义

$$A_{11P} = \begin{bmatrix} A_{\text{aaP}}^+ & L_{\text{abP}}^+ C_{\text{bP}} \\ 0 & A_{\text{bbP}} \end{bmatrix}, \quad B_{11P} = \begin{bmatrix} B_{\text{0aP}}^+ \\ B_{\text{0bP}} \end{bmatrix}, \quad A_{13P} = \begin{bmatrix} L_{\text{adP}}^+ \\ L_{\text{bdP}} \end{bmatrix}$$

$$C_{21P} = \Gamma_{\text{orP}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\text{bP}} \end{bmatrix}, \quad C_{23P} = \Gamma_{\text{orP}} \begin{bmatrix} C_{\text{dP}} C_{\text{dP}}^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_{\text{xp}} = \begin{bmatrix} E_{\text{ap}}^+ \\ E_{\text{bp}} \end{bmatrix}$$

和

$$A_{\text{xp}} = A_{11P} - A_{13P} (C_{23P}^T C_{23P})^{-1} C_{23P}^T C_{21P}$$

$$B_{\text{xp}} B_{\text{xp}}^T = B_{11P} B_{11P}^T + A_{13P} (C_{23P}^T C_{23P})^{-1} A_{13P}^T$$

$$C_{xP}^T C_{xP} = C_{21P}^T C_{21P} - C_{21P}^T C_{21P} (C_{23P}^T C_{23P})^{-1} C_{21P}^T C_{21P}$$

步骤 8.2 对下面的代数 Riccati 方程求正定解 S_{xP} :

$$A_{xP} S_{xP} + S_{xP} A_{xP}^T - B_{xP} B_{xP}^T + S_{xP} C_{xP}^T C_{xP} S_{xP} = 0 \quad (8.4)$$

定义矩阵 T_{xP} 为

$$T_{xP} = \begin{bmatrix} T_{\text{aaP}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

其中 T_{aaP} 是代数矩阵 Lyapunov 方程

$$A_{\text{aaP}}^+ T_{\text{aaP}} + T_{\text{aaP}} (A_{\text{aaP}}^+)^T = E_{\text{aP}}^+ (E_{\text{aP}}^+)^T \quad (8.6)$$

的唯一正定解。7.2 节已经证明系统(8.1)的最小值为

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(T_{xP} S_{xP}^{-1})} \quad (8.7)$$

然后对任意 $\gamma > \gamma^*$ 定义

$$F_{11}(\gamma) := \begin{bmatrix} F_{\text{a0}}^+(\gamma) & F_{\text{b0}}(\gamma) \\ F_{\text{a1}}^+(\gamma) & F_{\text{b1}}(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11P}^T P_x & \\ (C_{23P}^T C_{23P})^{-1} (A_{13P}^T P_x + C_{23P}^T C_{21P}) \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

其中

$$P_x := (S_{xP} - \gamma^{-2} T_{xP})^{-1} \quad (8.9)$$

再定义

$$A_{i1P}^{\epsilon} := A_{i1P} - [B_{i1P} \quad A_{i3P}] F_{11}(\gamma)$$

在后面会证明 A_{i1P}^{ϵ} 的特征值在 C^- , 把 $[F_{\text{a1}}^+(\gamma) \quad F_{\text{b1}}(\gamma)]$ 分块为

$$[F_{\text{a1}}^+(\gamma) \quad F_{\text{b1}}(\gamma)] = \begin{bmatrix} F_{\text{a11}}^+(\gamma) & F_{\text{b11}}(\gamma) \\ F_{\text{a12}}^+(\gamma) & F_{\text{b12}}(\gamma) \\ \vdots & \vdots \\ F_{\text{a1}m_{\text{aP}}}^+(\gamma) & F_{\text{b1}m_{\text{aP}}}(\gamma) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

其中 $F_{\text{a1}i}^+(\gamma)$ 和 $F_{\text{b1}i}(\gamma)$ 的维数分别是 $1 \times n_{\text{aP}}^+$ 和 $1 \times n_{\text{bP}}$ 。

步骤 8.3 令 Δ_{cP} 是任意的 $m_{\text{cP}} \times n_{\text{cP}}$ 矩阵, 满足约束

$$A_{\text{ccP}}^{\epsilon} = A_{\text{ccP}} - B_{\text{cP}} \Delta_{\text{cP}} \quad (8.11)$$

是一个稳定的矩阵。注意 Δ_{cP} 的存在性保证了 $(A_{\text{ccP}}^{\epsilon}, B_{\text{cP}})$ 的可控性。

步骤 8.4 这一步利用了第 4 章式(4.23)表示的子系统, $i = 1, \dots, m_{\text{aP}}$ 。令 $\Lambda_i = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{iq_i}\}$ 为属于 C^- 的 q_i 个元素的集合, 该集合包含复共轭对, $i = 1, \dots, m_{\text{aP}}$, 其中 q_i 和 m_d 在定理 4.5 中有定义, 但是和 Σ_P 的特殊坐标基有关。令 $\Lambda_{\text{aP}} := \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_{m_{\text{aP}}}$, 对 $i = 1, \dots, m_{\text{aP}}$, 定义

$$p_i(s) := \prod_{j=1}^{q_i} (s - \lambda_{ij}) = s^{q_i} + F_{i1} s^{q_i-1} + \dots + F_{i_{q_i-1}} s + F_{i_{q_i}} \quad (8.12)$$

和

$$\tilde{F}_i(\epsilon, \Lambda_i) := \frac{1}{\epsilon^{q_i}} [F_{i_{q_i}}, \epsilon F_{i_{q_i-1}}, \dots, \epsilon^{q_i-1} F_{i1}] \quad (8.13)$$

步骤 8.5 在这一步中,把步骤 8.2~8.4 中计算出来的各种增益放在一起,复合成系统 Σ_P 的状态反馈增益。令

$$\tilde{F}_{al}^+(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}) := \begin{bmatrix} F_{al1}^+(\gamma)F_{1q_1}/\epsilon^{q_1} \\ F_{al2}^+(\gamma)F_{1q_2}/\epsilon^{q_2} \\ \vdots \\ F_{al m_{dP}}^+(\gamma)F_{m_{dP}q_{m_{dP}}}/\epsilon^{q_{m_{dP}}} \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{F}_{bl}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}) := \begin{bmatrix} F_{bl1}^+(\gamma)F_{1q_1}/\epsilon^{q_1} \\ F_{bl2}^+(\gamma)F_{1q_2}/\epsilon^{q_2} \\ \vdots \\ F_{bl m_{dP}}^+(\gamma)F_{m_{dP}q_{m_{dP}}}/\epsilon^{q_{m_{dP}}} \end{bmatrix}$$

然后定义状态反馈增益 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{cP})$ 为

$$F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{cP}) = -\Gamma_{iP}(\tilde{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{cP}) + \tilde{F}_0)\Gamma_{sP}^{-1} \quad (8.14)$$

其中 $\tilde{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{cP})$ 和 \tilde{F}_0 为

$$\tilde{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{cP}) = \begin{bmatrix} F_{a0}^+(\gamma) & F_{b0}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{F}_{al}^+(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}) & \tilde{F}_{bl}^+(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}) & 0 & 0 & \tilde{F}_d(\epsilon, \Lambda_{dP}) \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_{cP} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} C_{0aP}^+ & C_{0bP} & C_{0aP}^- & C_{0cP} & C_{0dP} \\ E_{daP}^+ & E_{dbP} & E_{daP}^- & E_{dcP} & E_{dP} \\ E_{caP}^+ & E_{cbP} & E_{caP}^- & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

这里

$$E_{cP} = \begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1m_{dP}} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{m_{dP}1} & \cdots & E_{m_{dP}m_{dP}} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

和

$$\tilde{F}_d(\epsilon, \Lambda_{dP}) = \text{diag}\{\tilde{F}_1(\epsilon, \Lambda_1), \tilde{F}_2(\epsilon, \Lambda_2), \dots, \tilde{F}_{m_{dP}}(\epsilon, \Lambda_{m_{dP}})\} \quad (8.18)$$

由此算法完成。 \clubsuit

我们有下面的定理。

定理 8.1 考虑满足假设 8.1~8.4 的状态反馈系统(8.1)。在式(8.14)所示的状态反馈增益下有下面的性质:

(1) 对任意 $\gamma > \gamma^*$, 包含复共轭对的任何 $\Lambda_P \subset \mathbb{C}^-$ 以及满足 Λ_{cP}^c 是稳定约束

的任何 Δ_{CP} , 存在一个 $\epsilon^* > 0$, 使得对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, 状态反馈律

$$u = F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{CP}})x \quad (8.19)$$

对系统(8.1)是一个 γ 次优控制律, 其中 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{CP}})$ 如同式(8.14)所示。也就是说, 由 Σ_P 和状态反馈律(8.19)所构成的闭环系统是内稳定的, 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ , 即 $\|T_{hw}\|_\infty < \gamma$ 。

(2) 而当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 闭环系统的极点, 即 $A + BF(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{CP}})$ 的特征值为

$$\lambda(A_{\text{aP}}^-), \lambda(A_{\text{aP}}^c), \lambda(A_{\text{IIP}}^c) + 0(\epsilon) \quad \text{和} \quad \frac{\Lambda_{\text{dP}}}{\epsilon} + 0(1)$$

显然当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 闭环系统至少存在 n_{dP} 个极点具有无限负实部。 ♣

证明 见 8.5.1 节。 ◆

下面的评注涉及①参数 $\epsilon, \Lambda_{\text{dP}}$ 和 Δ_{CP} 的解释; ②规范化问题的解; ③当几何条件(假设 8.3)不满足时的一般问题的解。

注 8.1($\epsilon, \Lambda_{\text{dP}}$ 和 Δ_{CP} 的解释) 定理 8.1 表明在 H_∞ 次优状态控制律下, 闭环传递函数 T_{hw} 具有快的特征值 $\Lambda_{\text{dP}}/\epsilon$ 。式(8.14)所示的 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{CP}})$ 中的参数集合 Λ_{dP} 代表了这些快特征值的渐近值, 而 ϵ 代表了时间尺度。闭环系统也有 $\lambda(A_{\text{cCP}}^c)$ 所代表的慢特征值。这些特征值可通过选择合适的 Δ_{CP} 而配置在 C^- 的任何位置。因此参数集合 Δ_{CP} 决定了 H_∞ 次优状态反馈增益下的这些慢特征值位置。 ♣

注 8.2(规范化情况) 如果 D_2 是列满秩, 从算法中显然可以看出状态反馈增益矩阵 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{CP}}) = F(\gamma)$ 不依赖 $\epsilon, \Lambda_{\text{dP}}$ 和 Δ_{CP} , 并可写成

$$F(\gamma) = -\Gamma_{\text{IP}} [C_{\text{dP}}^+ + F_{\text{dP}}^+(\gamma) \quad C_{\text{bP}} + F_{\text{bP}}(\gamma) \quad C_{\text{aP}}^-] \Gamma_{\text{aP}}^{-1}$$

这结果等同于规范化情况, 即 Doyle 等^[14]的中心控制器。 ♣

注 8.3 最后指出, 如果假设 8.3 的几何条件不满足, 则可以利用第 7 章的迭代过程求近似最小值 $\tilde{\gamma}^*$ 。而且只要对 γ 次优状态反馈律的算法稍作修改就可处理这种情况。具体说就是需要修改步骤 8.2 为

步骤 8.2' 对任意 $\gamma > \tilde{\gamma}^*$, 定义

$$F_{11}(\gamma) := \begin{bmatrix} F_{\text{dP}}^+(\gamma) & F_{\text{bP}}(\gamma) \\ F_{\text{aP}}^+(\gamma) & F_{\text{bP}}(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\text{IIP}}^T P_x \\ (C_{\text{23P}}^T C_{\text{23P}})^{-1} (A_{\text{I3P}}^T P_x + C_{\text{23P}}^T C_{\text{21P}}) \end{bmatrix}$$

其中 P_x 是 Riccati 方程

$$P_x A_{\text{XP}} + A_{\text{XP}}^T P_x + P_x E_{\text{XP}} E_{\text{XP}}^T P_x / \gamma^2 - P_x B_{\text{XP}} B_{\text{XP}}^T P_x + C_{\text{XP}}^T C_{\text{XP}} = 0$$

的正定解。定义

$$A_{\text{IIP}}^c := A_{\text{IIP}} - [B_{\text{IIP}} \quad A_{\text{I2P}}] F_{11}(\gamma)$$

$[F_{\text{aP}}^+(\gamma) \quad F_{\text{bP}}(\gamma)]$ 的分块为

$$[F_{a1}^+(\gamma) \quad F_{b1}(\gamma)] = \begin{bmatrix} F_{a11}^+(\gamma) & F_{b11}(\gamma) \\ F_{a12}^+(\gamma) & F_{b12}(\gamma) \\ \vdots & \vdots \\ F_{a1m_{ap}}^+(\gamma) & F_{b1m_{ap}}(\gamma) \end{bmatrix}$$

其中 $F_{a1i}^+(\gamma)$ 和 $F_{b1i}(\gamma)$ 的维数是 $1 \times n_{ap}^+$ 和 $1 \times n_{bp}$ 。

其他步骤,即步骤 8.1、步骤 8.3~8.5 保持不变。定理 8.1 的所有结果在这种情况下也是正确的。唯一不同之处就是控制律的解不再有解析形式。♣

下面的定理处理状态反馈下闭环系统 T_{hw} 的零极点对消情况。

定理 8.2 (零极点对消) 考虑满足假设 8.1~8.4 的全状态反馈系统(8.1)。在式(8.14)所示的状态反馈律下,所得到的闭环系统具有下面的性质: $\lambda(A_{aaP}^-)$ 是系统 Σ_P 的稳定不变零点,而 $\lambda(A_{cb}^-)$ 是闭环传递矩阵 T_{hw} 的输出解耦零点。因此它们和 T_{hw} 的极点发生了对消。♣

证明 见 8.5.2 节。◆

下面用例子来演示本节算法。

例 8.1 重新考虑例 7.1,即由下面矩阵形成的全状态反馈系统:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

容易验证 (A, B) 可镇定, Σ_P 既不是右可逆也不是左可逆,是在 $s = 1$ 处有不变零点的非最小相位系统。而且已经是特殊坐标基的形式, $n_{ap}^+ = 1, n_{ap}^- = n_{ap}^0 = 0, n_{bp} = 2$ 和 $n_{cp} = n_{dp} = 1$ 。因为 $E_{bp} = 0$, 所以也不难看出 $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^-(\Sigma_P) + \mathcal{S}^-(\Sigma_P)$ 。因此假设 8.1~8.4 全部满足。而在例 7.1 中已经得出最小值为

$$\gamma^* = 6.4679044$$

采用本节算法,得到 γ 次优状态反馈增益 $F(\gamma, \epsilon, \Delta_{ap}, \Delta_{cp})$ 的表达式为

$$\begin{bmatrix} \frac{-0.163673\gamma^2}{0.132909\gamma^2 - 5.560084} & -1 + \frac{0.294790\gamma^2\Delta_{dP}}{(0.132909\gamma^2 - 5.560084)\epsilon} & -1 \\ \frac{0.185427\gamma^2 - 3.009097}{0.132909\gamma^2 - 5.560084} & -1 + \frac{(0.102145\gamma^2 - 12.824695)\Delta_{dP}}{(0.132909\gamma^2 - 5.560084)\epsilon} & -1 \\ \frac{-0.318336\gamma^2 + 10.696930}{0.132909\gamma^2 - 5.560084} & -1 + \frac{(0.163673\gamma^2 - 2.217749)\Delta_{dP}}{(0.132909\gamma^2 - 5.560084)\epsilon} & -1 \\ 0 & -1 & -\Delta_{cP} \\ 0 & \frac{\Delta_{dP}}{\epsilon} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (8.22)$$

其中标量 $\Delta_{dP} < 0, \Delta_{cP} > 1$ (为使 A_{cP} 稳定, Δ_{cP} 必须大于 1)。图 8.1 中给出了在几个 γ 和 ϵ 数值下的闭环传递函数矩阵的最大奇异值。注意在图 8.1 中, 我们选择了 $\Delta_{dP} = -1$ 和 $\Delta_{cP} = 3$ 。

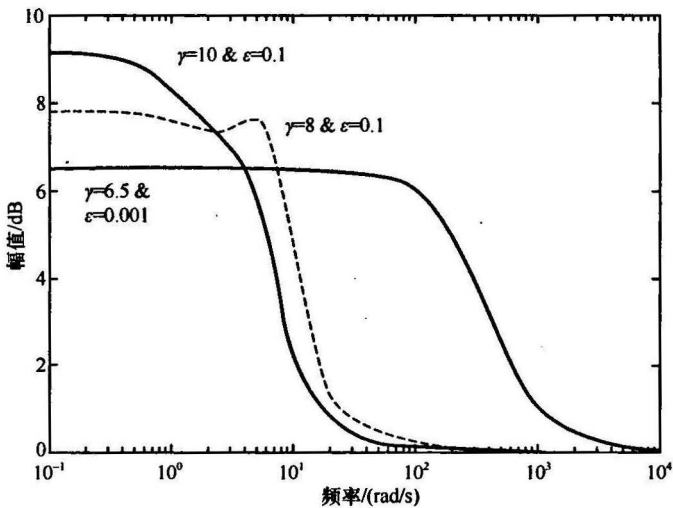


图 8.1 T_{hw} 的最大奇异值(状态反馈情况)

8.3 全阶输出反馈

本节利用全阶测量输出反馈律研究 H_∞ 次优和最优设计问题, 即控制律的阶次恰好等于给定系统的阶次。具体地说就是考虑下面的测量反馈系统:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1x + D_1w \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (8.23)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^r$ 是外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。我们还是用 Σ_P 来表示由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 构成的子系统, 用 Σ_Q 来表示由矩阵四元组 (A, E, C_1, D_1) 构成的子系统。首先有下面的假设:

假设 8.5: (A, B) 可镇定;

假设 8.6: Σ_P 在虚轴上没有不变零点;

假设 8.7: $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^-(\Sigma_P) + \mathcal{S}^-(\Sigma_P)$;

假设 8.8: (A, C_1) 可检测;

假设 8.9: Σ_Q 在虚轴上没有不变零点;

假设 8.10: $\text{Ker}(C_2) \Leftrightarrow \mathcal{V}^-(\Sigma_Q) \cap \mathcal{S}^-(\Sigma_Q)$;

假设 8.11: $D_{22} = 0$ 。



本节所考虑的输出反馈控制器类实际上是基于观测器的控制器, 在规范化的情况下, 可以认为是对 Doyle 等^[14]所提出的输出反馈中心控制器的拓展。我们对规范化的中心输出反馈控制器进行了改造, 并用来处理一般化的情况。后面会讨论这个修改。我们假设最小值 γ^* 可利用 7.3 节的方法获得。对于任意 $\gamma > \gamma^*$, 求取 H_∞ 次优输出反馈律解析解的步骤如下。

步骤 8.6 定义辅助全状态反馈系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases}$$

完成 8.2 节的步骤 8.1~8.5, 得到增益矩阵 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{cP})$ 。同时定义

$$P(\gamma) := (\Gamma_{sP}^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_{xP} - \gamma^2 T_{xP})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{sP}^{-1} \quad (8.24)$$

步骤 8.7 定义另一个辅助全状态反馈系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x + C_1^T u + C_2^T w \\ y = x \\ h = E^T x + D_2^T u + D_{22}^T w \end{cases} \quad (8.25)$$

对该辅助系统进行 8.2 节的步骤 8.1~8.5 以得到增益矩阵 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dQ}, \Delta_{cQ})$ 。定义 $K(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dQ}, \Delta_{cQ}) := F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dQ}, \Delta_{cQ})^T$ 。还定义

$$Q(\gamma) := (\Gamma_{sQ}^{-1})^T \begin{bmatrix} (S_{xQ} - \gamma^2 T_{xQ})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{sQ}^{-1} \quad (8.26)$$

步骤 8.8 构造下面的全阶观测器型控制器:

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}} v + B_{\text{cmp}} y \\ u = C_{\text{cmp}} v + 0 \cdot y \end{cases} \quad (8.27)$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_{\text{cmp}} = & A + \gamma^2 EE^T P(\gamma) + BF(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{dP}}) \\
 & + [I - \gamma^2 Q(\gamma) P(\gamma)]^{-1} \{ K(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dQ}}, \Delta_{\text{dQ}}) [C_1 + \gamma^2 D_1 E^T P(\gamma)] \\
 & + \gamma^2 Q(\gamma) [A^T P(\gamma) + P(\gamma) A + C_2^T C_2 + \gamma^2 P(\gamma) EE^T P(\gamma)] \\
 & + \gamma^2 Q(\gamma) [P(\gamma) B + C_2^T D_2] F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{dP}}) \} \quad (8.28)
 \end{aligned}$$

$$B_{\text{cmp}} = - [I - \gamma^2 Q(\gamma) P(\gamma)]^{-1} K(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dQ}}, \Delta_{\text{dQ}}) \quad (8.29)$$

$$C_{\text{cmp}} = F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{dP}}) \quad (8.30)$$

可以证明 Σ_{cmp} 的确是 γ 次优控制器。它的动态阶次显然是 n ，即全阶输出反馈控制器。 ♣

则有下面的定理。

定理 8.3 考虑满足假设 8.5~8.11 的测量反馈系统 (8.23)。对任意 $\gamma > \gamma^*$ ，任意包含复共轭对的 $\Lambda_{\text{dP}} \subset \mathbb{C}^-$ 和 $\Lambda_{\text{dQ}} \subset \mathbb{C}^-$ ，以及任意使得 A_{ccP}^ϵ 和 A_{ccQ}^ϵ 是稳定矩阵的 Δ_{dP} 和 Δ_{dQ} ，则存在一个 $\epsilon^* > 0$ 使得对所有 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$ ，由式 (8.27) 所给出的控制律 Σ_{cmp} 是 γ 次优控制器，即由 Σ 和输出反馈控制器 Σ_{cmp} 所形成的闭环系统是内稳定的，从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递函数矩阵的 H_∞ 范数小于 γ ，即 $\|T_{hw}\|_\infty < \gamma$ 。 ♣

证明 见 8.5.3 节。 ◆

下面的定理涉及零极点对消和 γ 次优输出反馈控制的闭环特征值。

定理 8.4 考虑满足假设 8.5~8.11 的测量反馈系统 (8.23)， γ 次优控制 Σ_{cmp} 如同式 (8.27) 所示。则有下面的性质：

(1) $\lambda(A_{\text{ccP}}^-)$ 是系统 Σ_P 的稳定不变零点， $\lambda(A_{\text{ccP}}^\epsilon)$ 是闭环系统 T_{hw} 的输出解耦零点。因此它们和 T_{hw} 的极点对消。

(2) $\lambda(A_{\text{ccQ}}^-)$ 是系统 Σ_Q 的不变零点， $\lambda(A_{\text{ccQ}}^\epsilon)$ 是闭环系统 T_{hw} 的输入解耦零点。因此它们和 T_{hw} 的极点对消。

(3) 当 $\epsilon \rightarrow 0$ ，闭环系统的快特征值渐近地趋向 $\Lambda_{\text{dP}}/\epsilon + 0(1)$ 和 $\Lambda_{\text{dQ}}/\epsilon + 0(1)$ 。 ♣

证明 见 8.5.4 节。 ◆

下面是一些评注。

注 8.4 ($\epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Lambda_{\text{dQ}}, \Delta_{\text{dP}}$ 和 Δ_{dQ} 的物理意义) 如同注 8.1，参数集合 Λ_{dP} 和 Λ_{dQ} 代表了闭环系统快特征值的渐近值，而 ϵ 代表了时间尺度。参数集合 Δ_{dP} 和 Δ_{dQ} 决定了闭环系统的慢特征值位于 $\lambda(A_{\text{ccP}}^\epsilon)$ 和 $\lambda(A_{\text{ccQ}}^\epsilon)$ 。通过适当地选择 Δ_{dP} 和 Δ_{dQ} ，特征值可以配置在 \mathbb{C}^- 任意位置。 ♣

注 8.5 (规范化情况) 对于 D_1 是行满秩和 D_2 是列满秩的规范化问题，在特殊坐标基分解中 Σ_P 没有 x_c 和 x_d ， Σ_Q 没有 x_b 和 x_d 。很容易验证 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dP}}, \Delta_{\text{dP}}) = F(\gamma)$ 和 $K(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dQ}}, \Delta_{\text{dQ}}) = K(\gamma)$ 只依赖 γ ，而且有

$$[P(\gamma)B + C_2^T D_2]F(\gamma) + [A^T P(\gamma) + P(\gamma)A + C_2^T C_2 + \gamma^{-2} P(\gamma)EE^T P(\gamma)] = 0$$

因此 Σ_{cmp} 为

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}v + B_{\text{cmp}}y \\ u = C_{\text{cmp}}v + 0y \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{\text{cmp}} &= A + \gamma^{-2}EE^T P(\gamma) + BF(\gamma) \\ &\quad + [I - \gamma^{-2}Q(\gamma)P(\gamma)]^{-1}K(\gamma)[C_1 + \gamma^{-2}D_1E^T P(\gamma)] \\ B_{\text{cmp}} &= -[I - \gamma^{-2}Q(\gamma)P(\gamma)]^{-1}K(\gamma) \\ C_{\text{cmp}} &= F(\gamma) \end{aligned}$$

这就是规范化的情况, 是 Doyle 等^[14]所给的中心控制器。♣

注 8.6 最后要指出如果假设 8.7 和 8.10 的几何条件不满足, 我们可以用第 7 章的迭代方法求最小值的近似解, 比如 $\tilde{\gamma}^*$ 。可以对求 γ 次优输出反馈律的算法进行修改来处理这种情况。具体来说就是对步骤 8.6 和 8.7 稍作修改。

步骤 8.6' 定义辅助全状态反馈系统

$$\Sigma_P: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases}$$

然后进行 8.2 节的步骤 8.1、步骤 8.2' 和步骤 8.3~8.5, 得到增益矩阵 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})$ 和 P_x 。令 $P_{xP} := P_x$ 。同时定义

$$P(\gamma) := (\Gamma_{dP}^{-1})^T \begin{bmatrix} P_{xP} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{dP}^{-1} \quad (8.31)$$

步骤 8.7' 定义另一个辅助全状态反馈系统

$$\Sigma_Q: \begin{cases} \dot{x} = A^T x + C_1^T u + C_2^T w \\ y = x \\ h = E^T x + D_1^T u + D_{22}^T w \end{cases}$$

对该辅助系统进行 8.2 节的步骤 8.1、步骤 8.2' 和步骤 8.3~8.5, 得到 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})$ 和 P_x 。而且令 $K(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dQ}, \Delta_{dQ}) := F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})^T$ 和 $Q_{xQ} := P_x$ 。定义

$$Q(\gamma) := (\Gamma_{dQ}^{-1})^T \begin{bmatrix} Q_{xQ} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{dQ}^{-1} \quad (8.32)$$

算法的最后一步 8.8 保持不变。定理 8.3 和 8.4 的所有结果在这种情况下也是成立的。但是输出反馈律不再有解析形式。♣

下面给出例子来演示本节结果。

例 8.2 考虑一个测量反馈系统, 矩阵 A, B, E, C_2, D_2 和 D_{22} 和例 8.1 一样, 而

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

首先注意到 (A, C_1) 可检测, 系统 (A, E, C_1, D_1) 可逆(因此假设 8.10 满足)和非最小相位, 不变零点位于 $\{-1.630662, -3.593415, 0.521129 \pm j0.363042\}$ 。在例 7.4 中已经得到

$$\gamma^* = 13.638725$$

输出反馈次优控制器的解析表达为式(8.27)~式(8.30), $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dq}, \Delta_{cp})$ 如式(8.22)所示, 即

$$K(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dq}, \Delta_{dq}) = [K_0 \quad K_1] \quad (8.34)$$

其中

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{-43.91\gamma^4 + 4257.86\gamma^2 - 97026.13}{7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23} \\ \frac{-12.45\gamma^4 + 372.65\gamma^2 - 0.02}{7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23} \\ \frac{-48.44\gamma^4 + 1803.08\gamma^2 + 0.02}{7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23} \\ \frac{62.57\gamma^4 - 1212.58\gamma^2 - 38810.46}{7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23} \\ \frac{17.80\gamma^4 - 83.04\gamma^2 + 19405.21}{7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23} \end{bmatrix}$$

和

$$K_1 = \begin{bmatrix} -5 + 0.090909 \frac{\Lambda_{dq}}{\epsilon} - \frac{(0.24\gamma^4 - 10.14\gamma^2)\Lambda_{dq}}{(7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23)\epsilon} \\ -0.363636 - \frac{(-2.39\gamma^4 + 190.91\gamma^2)\Lambda_{dq}}{(7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23)\epsilon} \\ -0.382796 - \frac{(2.04\gamma^4 - 108.95\gamma^2)\Lambda_{dq}}{(7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23)\epsilon} \\ -2.545451 + 0.272727 \frac{\Lambda_{dq}}{\epsilon} - \frac{(-1.13\gamma^4 + 14.86\gamma^2)\Lambda_{dq}}{(7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23)\epsilon} \\ -1.272726 + 0.363636 \frac{\Lambda_{dq}}{\epsilon} - \frac{(0.69\gamma^4 - 74.56\gamma^2)\Lambda_{dq}}{(7.12\gamma^4 - 790.42\gamma^2 + 19405.23)\epsilon} \end{bmatrix}$$

$\Lambda_{dq} < 0$, 和

$$P(\gamma) = \frac{1}{0.132909\gamma^2 - 5.560084}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.42770\gamma^2 & -0.29658\gamma^2 & 0.16367\gamma^2 & 0 & 0 \\ -0.29658\gamma^2 & -15.8338 + 0.58415\gamma^2 & 3.0091 - 0.18543\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0.16367\gamma^2 & 3.0091 - 0.18543\gamma^2 & -5.1368 + 0.18543\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(\gamma) = \frac{\gamma^2}{0.071193\gamma^4 - 7.904171\gamma^2 + 194.052288} (\gamma^2 Q_1 + Q_0)$$

其中

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.083104 & 0.124442 & 0.484459 & -0.768087 & -0.249208 \\ 0.124442 & 1.778706 & 0.340500 & -1.759522 & -1.184163 \\ 0.484459 & 0.340500 & 2.917279 & -4.330299 & -1.256601 \\ -0.768087 & -1.759522 & -4.330299 & 7.332315 & 2.613520 \\ -0.249208 & -1.184163 & -1.256601 & 2.613520 & 1.160281 \end{bmatrix}$$

和

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -3.0576430 & -3.7265760 & -18.030781 & 27.934279 & 8.7345960 \\ -3.7265760 & -122.50790 & 6.5460280 & 79.188509 & 70.727376 \\ -18.030781 & 6.5460280 & -113.22255 & 153.81266 & 36.981101 \\ 27.934279 & 79.188509 & 153.81266 & -272.47959 & -102.79025 \\ 8.7345960 & 70.727376 & 36.981101 & -102.79025 & -55.552230 \end{bmatrix}$$

和例 8.1 一样, 图 8.2 给出了闭环传递函数矩阵在几个 γ 和 ϵ 值下的最大奇异值。

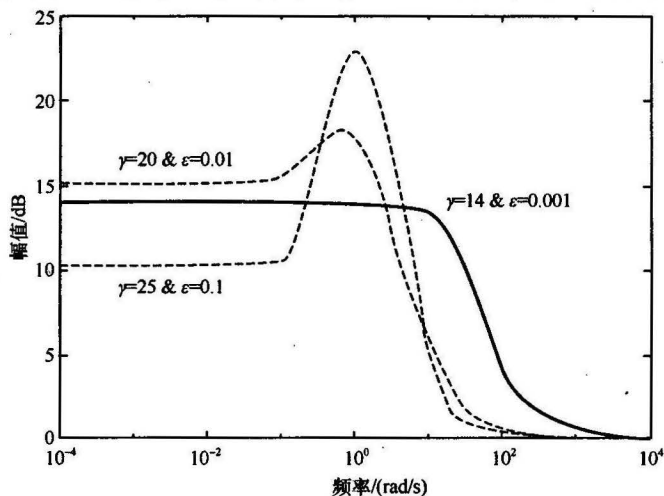


图 8.2 T_{hw} 的最大奇异值(输出反馈情况)

注意在图 8.2 中,我们选择了 $\Delta_{dP} = -1$ 、 $\Delta_P = 3$ 和 $\Delta_{dQ} = -1$ 。注意此例中的 Σ_Q 左可逆,增益矩阵 $K(\gamma, \epsilon, \Delta_{dQ}, \Delta_{cQ})$ 只依赖于 γ, ϵ 和 Δ_{dQ} 。♣

8.4 降阶输出反馈

本节研究降阶输出反馈 H_∞ 控制问题。对于测量矢量中某些分量未受噪声干扰的情形,我们证明可以找到一个低阶的动态补偿器。实际上要证明存在一个时不变、有限维动态补偿器 Σ_{comp} , 即

$$\Sigma_{\text{comp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{comp}}v + B_{\text{comp}}y \\ u = C_{\text{comp}}v + D_{\text{comp}}y \end{cases} \quad (8.35)$$

相应于式(8.23)所给出的 Σ , 其 McMillan 阶为 $n - \text{rank}(C_1 D_1) + \text{rank}(D_1) \leq n$, 所形成的闭环内稳定,从 w 到 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 $\gamma > \gamma^*$ 。本节给出降阶补偿器的显式构造方法。本节的结果以前在文献[117]中报道过,而最初的构造一般系统的降阶观测器思想是由 Chen 等^[118]提出的。

令 γ^* 是式(8.23)所示系统 Σ 的最小值,给定 $\gamma > \gamma^*$ 。利用 8.3 节的结果,很容易找到两个半正定矩阵 P 和 Q , 满足

$$F_\gamma(P) := \begin{bmatrix} A^T P + PA + C_2^T C_2 + PEE^T P / \gamma^2 & PB + C_2^T D_2 \\ B^T P + D_2^T C_2 & D_2^T D_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

和

$$G_\gamma(Q) := \begin{bmatrix} AQ + QA^T + EE^T + QC_2^T C_2 Q / \gamma^2 & QC_1^T + ED_1^T \\ C_1 Q + D_1 E^T & D_1 D_1^T \end{bmatrix} \geq 0$$

即 P 和 Q 是二次矩阵方程 $F_\gamma(P) \geq 0$ 和 $G_\gamma(Q) \geq 0$ 的正定解。下面定义辅助系统

$$\Sigma_{PQ}: \begin{cases} \dot{x}_{PQ} = A_{PQ}x_{PQ} + B_{PQ}u + E_{PQ}w_{PQ} \\ y = C_{1P}x_{PQ} + D_{1PQ}w_{PQ} \\ h_{PQ} = C_{2P}x_{PQ} + D_P u \end{cases} \quad (8.36)$$

其中

$$\begin{bmatrix} C_{2P}^T \\ D_{2P}^T \end{bmatrix} [C_{2P} \quad D_{2P}] := F_\gamma(P), \quad \begin{bmatrix} E_Q \\ D_{1PQ} \end{bmatrix} [E_Q^T \quad D_{1PQ}^T] := G_\gamma(Q)$$

和

$$\begin{cases} A_{PQ} := A + EE^T P / \gamma^2 + (\gamma^2 I - QP)^{-1} QC_2^T C_{2P} \\ B_{PQ} := B + (\gamma^2 I - QP)^{-1} QC_2^T D_{2P} \\ E_{PQ} := (I - QP / \gamma^2)^{-1} E_Q \\ C_{1P} := C_1 + D_1 E^T P / \gamma^2 \end{cases} \quad (8.37)$$

可以证明(见文献[22])① $(A_{PQ}, B_{PQ}, C_{2P}, D_{2P})$ 是右可逆和最小相位的;② $(A_{PQ},$

E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ} 是左可逆和最小相位的。

对上面的辅助系统构建一个降阶补偿器, 然后证明该补偿器对式(8.23)所示的原系统 Σ 也可应用。首先去除可直接测量到的状态, 关注需要观测估计的状态。为实现这个目的, 需要选择合适的坐标基。不失一般性且为了简便起见, 假设矩阵 C_{1P} 和 D_{2PQ} 已变换到下面的形式:

$$C_{1P} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad D_{2PQ} = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

这样式(8.36)所示的系统 Σ_{PQ} 可被划分为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} w_{PQ} \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} w_{PQ} \\ h_{PQ} = C_{2P} x_{PQ} + D_{2P} u \end{cases} \quad (8.39)$$

其中 $(x_1^T, x_2^T)^T = x_{PQ}$ 和 $(y_0^T, y_1^T)^T = y$ 。注意到已经可以得到 $y_1 = x_1$ 了, 无需进行估计。所以只要估计状态变量 x_2 。首先根据输出 y_1 和状态 x_2 , 把关于 x_1 的状态方程重新写成

$$\dot{y}_1 = A_{11} y_1 + A_{12} x_2 + B_1 u + E_1 w_{PQ} \quad (8.40)$$

其中 y_1 和 u 是已知信号。则式(8.40)变成

$$\bar{y} = A_{12} x_2 + E_1 w_{PQ} = \dot{y}_1 - A_{11} x_1 - B_1 u \quad (8.41)$$

这样, 通过式(8.41)和

$$y_0 = C_{1,02} x_2 + D_{1,0} w_{PQ}$$

就可以观测 x_2 了。可以估计状态 x_2 的降阶系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_{22} x_2 + [A_{21} \quad B_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ u \end{bmatrix} + E_2 w_{PQ} \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ E_1 \end{bmatrix} w_{PQ} \end{cases} \quad (8.42)$$

在构造降阶观测器之前, 下面给出一个具有重要作用的关键引理。

引理 8.1 系统 Σ_R 的表示为

$$(A_R, B_R, C_R, D_R) := \left(A_{22}, E_2, \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ E_1 \end{bmatrix} \right)$$

则可得

- (1) 当且仅当 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 是(非)最小相位系统时, Σ_R 是(非)最小相位;
- (2) 当且仅当 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 可检测时, Σ_R 可检测;
- (3) 当且仅当 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 左可逆时, Σ_R 左可逆;

- (4) Σ_R 和 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 有相同的不变零点;
- (5) 降阶系统 Σ_R 的无限零点阶次比 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 的无限零点阶次少一阶。 ♣

证明 根据文献[79]即可证明。 ◆

现在根据式(8.42),构造对 x_2 的降阶观测器为

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{22}\hat{x}_2 + A_{21}y_1 + B_2u + K_R \left[\begin{bmatrix} y_0 \\ \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix} \hat{x}_2 \right]$$

和

$$\hat{x}_{PQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} \hat{x}_2 + \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} y_1$$

其中 K_R 是降阶系统观测器的增益矩阵,满足

$$A_{22} - K_R \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix}$$

是渐近稳定的约束。为了消除对 \dot{y}_1 的依赖,划分 $K_R = [K_{R0} \quad K_{R1}]$ 以便和输出 $(y_0^T, y_1^T)^T$ 的维数对应。然后定义新的变量 $v := \hat{x}_2 - K_{R1}y_1$ (参见文献[119]),从而得到新的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (A_{22} - K_{R0}C_{1,02} - K_{R1}A_{12})v + (B_2 - K_{R1}B_1)u \\ &+ [K_{R0}, A_{21} - K_{R1}A_{11} + (A_{22} - K_{R0}C_{1,02} - K_{R1}A_{12})K_{R1}] \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.43)$$

所以只要实现式(8.43),就可以不产生 \dot{y}_1 而估计 \hat{x}_2 。

定理 8.5 令 Σ_{PQ} 由式(8.36)给出。则对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个状态反馈增益矩阵 F 和降阶观测器增益矩阵 K_R , 使得下面的降阶观测器型控制器

$$\Sigma_{\text{comp}}: \begin{cases} \dot{v} = (A_{22} - K_{R0}C_{1,02} - K_{R1}A_{12})v + (B_2 - K_{R1}B_1)u \\ \quad + [K_{R0}, A_{21} - K_{R1}A_{11} + (A_{22} - K_{R0}C_{1,02} - K_{R1}A_{12})K_{R1}]y \\ u = -F\hat{x}_{PQ} = -F \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} v - F \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ 0 & K_{R1} \end{bmatrix} y \end{cases} \quad (8.44)$$

对于 Σ_{PQ} 是内稳定的,从 w_{PQ} 到 h_{PQ} 的闭环传递矩阵函数的 H_∞ 范数严格小于 ϵ 。而且,如果 Σ_{comp} 作用在式(8.23)给定的原系统 Σ 时,所形成的闭环系统是内稳定的,从 w 到 h 的闭环传递矩阵函数的 H_∞ 范数小于 γ 。 ♣

证明 见 8.5.5 节。 ◆

注 8.7 利用第 9 章的系统化过程可求增益矩阵 F 和 K_R 。 ♣

注 8.8 当给定系统(8.23)的 Σ 满足规范化条件时,控制器(8.44)就是文献[14]所给的 H_∞ 优化问题的全阶观测器型控制器。 ♣

下面给出数值例子演示本节结果。

例 8.3 考虑测量反馈系统, 矩阵 A, B, E, C_2, D_2 如同例 8.1, C_1, D_1 如同例 8.2。该问题的最小值为 $\gamma^* = 13.638752$ 。下面构造一个降阶测量输出反馈律, 使得从 w 到 h 的闭环传递矩阵函数的 H_∞ 范数严格小于 $\gamma = 14$ 。采用相关步骤, 我们得到式(8.36)所示的辅助系统 Σ_{PQ} , 其中

$$A_{PQ} = \begin{bmatrix} 4.2254 & -0.7415 & 4.1946 & 0 & 1.4335 \\ -11.8293 & 7.6804 & -13.7917 & 0 & -0.7102 \\ 19.4695 & -9.0672 & 22.8277 & 0 & 4.0975 \\ -17.4591 & 10.0905 & -19.5135 & 1 & -2.1038 \\ 1.2144 & 0.5197 & 1.4176 & 1 & -0.0983 \end{bmatrix}$$

$$B_{PQ} = \begin{bmatrix} 0.9327 & 0 & 0 \\ -4.4755 & 0 & 0 \\ 7.8569 & 0 & 0 \\ -6.3735 & 0 & 1 \\ 0.1940 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{PQ} = \begin{bmatrix} 18.5391 & 0.8299 \\ -62.8474 & -29.3560 \\ 102.9481 & 28.5462 \\ -97.9601 & -22.3008 \\ -0.0958 & 3.1029 \end{bmatrix}$$

$$C_{1P} = \begin{bmatrix} 0.1044 & -2.0724 & -2.9601 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{2P} = \begin{bmatrix} 3.0616 & -0.9592 & 2.8464 & 0 & 0.6772 \\ -1.0146 & -1.3601 & 0.6330 & 0 & -0.7358 \end{bmatrix}$$

和

$$D_{1P} = \begin{bmatrix} 0.9409 & -0.3383 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{2PQ} = \begin{bmatrix} 0.9409 & -0.3383 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不难证明变换 T_s 和 T_o , 即

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_o = \begin{bmatrix} 1 & 0.1044 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 C_1 和 D_1 变换为

$$T_o^{-1} C_{1P} T_s = \left[\begin{array}{c|c} 0 & C_{1,02} \\ \hline I_k & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & -2.2811 & -3.2732 & -2.2087 & -1.1044 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

和

$$T_o^{-1} D_{1PQ} = \left[\begin{array}{c|c} D_{1,0} & \\ \hline 0 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 0.9409 & -0.3383 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

而且有

$$T_s^{-1}AT_s = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2714 & -2.4247 & -8.3291 & -7.5428 & 2.7283 \\ -11.8293 & 31.3390 & 21.6962 & 23.6586 & 11.1191 \\ 19.4695 & -48.0062 & -35.5807 & -38.9300 & -15.3720 \\ -17.4591 & 45.0087 & 32.8639 & 35.9182 & 15.3553 \\ 1.2144 & -1.9092 & -2.2257 & -1.4289 & -1.3127 \end{bmatrix}$$

$$T_s^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9993 & 1 & 2 \\ -4.4755 & 0 & 0 \\ 7.8569 & 0 & 0 \\ -6.3735 & 0 & 1 \\ 0.1940 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_s^{-1}E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.6724 & -13.7425 \\ -62.8474 & -29.3560 \\ 102.9481 & 28.5462 \\ -97.9601 & -22.3008 \\ -0.0958 & 3.1029 \end{bmatrix}$$

$$A_R = A_{22}, \quad E_R = E_2$$

$$C_R = \begin{bmatrix} -2.2811 & -3.2732 & -2.2087 & -1.1044 \\ -2.4247 & -8.3291 & -7.5428 & 2.7238 \end{bmatrix}$$

和

$$D_R = \begin{bmatrix} 0.9409 & -0.3383 \\ 5.6724 & 13.7425 \end{bmatrix}$$

利用第 9 章的算法,得到增益矩阵 F 为

$$FT_s = \begin{bmatrix} -1.5656 & 4.7579 & 2.1737 & 3.1311 & 1.5656 \\ -299.4859 & 555.2644 & 742.6408 & 597.9718 & 189.8014 \\ 7.4811 & -14.6842 & 19.0100 & -16.9623 & -5.3773 \end{bmatrix}$$

和

$$K_R = [K_{R0} \quad K_{R1}] = \begin{bmatrix} 93.5514 & -4.4388 \\ -143.1777 & 5.6013 \\ 133.7360 & -4.9145 \\ -1.4788 & 0.2622 \end{bmatrix}$$

最后得到式(8.35)所示的降阶输出反馈控制器,其中

$$A_{\text{cmp}} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -2.5903 & -3.4139 & -2.7089 & -0.9269 \\ 3.3280 & 4.3868 & 3.4717 & 1.1995 \\ -2.9478 & -3.8917 & -3.0755 & -1.0641 \\ 0.6986 & 0.9299 & 0.7488 & 0.2393 \end{bmatrix}$$

$$C_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 4.7579 & 2.1737 & 3.1311 & 1.5656 \\ 555.2644 & 742.6408 & 597.9718 & 189.8014 \\ -14.6848 & -19.0100 & -16.9623 & -5.3773 \end{bmatrix}$$

和

$$B_{\text{cmp}} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -0.0936 & -4.1798 \\ 0.1432 & 5.3492 \\ -0.1337 & -4.7217 \\ 0.0015 & 1.1362 \end{bmatrix}, \quad D_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 0 & 22.3556 \\ 0 & 894.3592 \\ 0 & -33.1683 \end{bmatrix}$$

由该控制器所形成的闭环极点位于

$$-97.337, -34.72, -3.591, -1.848, -1.632$$

$$-0.248, -1.346, -0.765, -1$$

很显然它们都在稳定区域。图 8.3 是闭环传递矩阵的奇异值图,可见 $\|T_{hw}\|_\infty$ 的确小于给定的 γ 值 14。

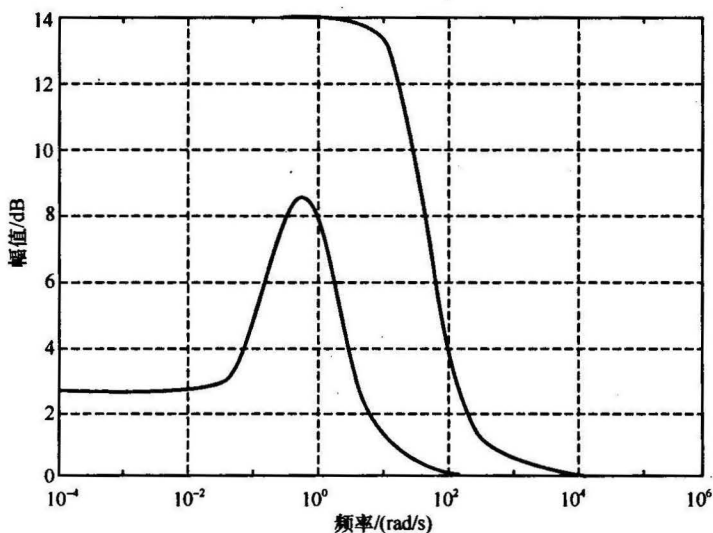


图 8.3 T_{hw} 的最大奇异值(降阶输出反馈情况)

8.5 主要结果的证明

8.5.1 定理 8.1 的证明

为了进行定理 8.1 的证明,我们需要介绍以下两个引理。

引理 8.2 令辅助系统 Σ_{aux} 为

$$\Sigma_{\text{aux}}: \begin{cases} \dot{x}_x = A_x x_x + B_x u_x + E_x w_x \\ h_x = C_x x_x + D_x u_x \end{cases} \quad (8.45)$$

其中

$$A_x = A_{11P}, \quad B_x = [B_{11P} \quad A_{13P}], \quad E_x = \begin{bmatrix} E_{\text{ap}}^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_x = \Gamma_{\text{op}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{\text{bp}} \end{bmatrix}, \quad D_x = \Gamma_{\text{op}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C_{\text{dp}} C_{\text{dp}}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则由 Σ_{aux} 和状态反馈律 $u_x = -F_{11}(\gamma)x_x$ 所形成的闭环系统是内稳定的,即

$$\lambda(A_{\text{fip}}) = \lambda\{A_{11P} - [B_{11P} \quad A_{13P}]F_{11}(\gamma)\} = \lambda\{A_x - B_x F_{11}(\gamma)\} \subset \mathbb{C}^- \quad (8.46)$$

从 w_x 到 h_x 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 γ , 即

$$\|T_{h_x w_x}\|_\infty = \left\| \Gamma_{\text{op}} \begin{bmatrix} -F_{11}(\gamma) \\ 0 \quad C_{\text{bp}} \end{bmatrix} (sI - A_{\text{fip}})^{-1} \begin{bmatrix} E_{\text{ap}}^+ \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (8.47)$$

也就是说 $u_x = -F_{11}(\gamma)x_x$ 是 Σ_{aux} 的 γ 次优控制律。♣

证明 首先注意到 Γ_{op} 非奇异, $C_{\text{dp}} C_{\text{dp}}^T = I$, 因此矩阵 D_x 是列满秩的。而且很容易证明由矩阵四元组 (A_x, B_x, C_x, D_x) 构成的系统的不变零点即是 $\lambda(A_{\text{ap}}^+)$, 显然不在虚轴上。因此 Σ_{aux} 满足规范化 H_∞ 控制问题的假设。不难证明对任意 $\gamma > \gamma^*$, 有

$$P_x = (S_{\text{xp}} - \gamma^2 T_{\text{xp}})^{-1} > 0$$

是下面 H_∞ -CARE 的解:

$$\begin{aligned} P_x A_x + A_x^T P_x + \gamma^2 P_x E_x E_x^T P_x + C_x^T C_x \\ - (P_x B_x + C_x^T D_x)(D_x^T D_x)^{-1}(B_x^T P_x + D_x^T C_x) = 0 \end{aligned} \quad (8.48)$$

有结果

$$\lambda(A_{\text{xx}}^c) := \lambda\{A_x + \gamma^2 E_x E_x^T P_x - B_x (D_x^T D_x)^{-1}(B_x^T P_x + D_x^T C_x)\} \in \mathbb{C}^-$$

所以引理 8.2 的结论成立。◆

引理 8.3 令 (A, B, C) 是右可逆和最小相位系统, 其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是 ϵ 的参数化形式, 即

$$F(\epsilon) = N(\epsilon)\Gamma(\epsilon)T(\epsilon) + R(\epsilon) \quad (8.49)$$

其中 $N(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\Gamma(\epsilon) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $T(\epsilon) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $R(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。这里 $\Gamma(\epsilon)$ 也是非奇异的。更进一步, 假设下面的条件成立:

- (1) 对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, 其中 $\epsilon^* > 0$, $A + BF(\epsilon)$ 是渐近稳定的;
- (2) 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $T(\epsilon) \rightarrow WC$, 而 W 是 $p \times p$ 的非奇异矩阵;
- (3) 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $N(\epsilon)$ 趋向一个有限的矩阵 N , 使得 $C(sI - A)^{-1}BN$ 是可逆的;
- (4) 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $R(\epsilon)$ 趋向一个有限的矩阵 R ;
- (5) 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\Gamma^{-1}(\epsilon) \rightarrow 0$ 。

因此当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有 $\|C[sI - A - BF(\epsilon)]^{-1}\|_\infty \rightarrow 0$ 。♣

证明 这是由文献[120]给出的引理 2.2 的对偶, 引理的证明和文献[120]的论述类似。◆

现在我们可以证明定理 8.1 了。注意增益矩阵 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}})$ 是按照 ATEA 的标准过程构造的。利用 Chen^[79] 中有关奇异摄动理论的结果, 可以证明当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $A + BF(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}})$ 的特征值为 $\lambda(A_{\text{aaP}}^-) \in \mathbb{C}^-$, $\lambda(A_{\text{ccP}}^+) \in \mathbb{C}^-$, $\Lambda_{\text{dp}}/\epsilon \in \mathbb{C}^-$ 和 $\lambda(A_{\text{iiP}}^+) \in \mathbb{C}^-$ (见引理 8.2)。因此闭环系统内稳定。另根据 Chen^[79] 的结果, 可以证明 $\lambda_d \in \Lambda_{\text{dp}}/\epsilon \in \mathbb{C}^-$, 相应的右特征向量 $W(\epsilon)$ 满足

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(\epsilon) = \bar{W} \in \mathcal{S}^+(\Sigma_p) \quad (8.50)$$

实际上, 沿用同样的过程, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 可以证明 $A + \gamma^2 EE^T P(\gamma) + BF(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}})$ 的特征值为 $\lambda(A_{\text{aaP}}^-) \in \mathbb{C}^-$, $\lambda(A_{\text{ccP}}^+) \in \mathbb{C}^-$, $\Lambda_{\text{dp}}/\epsilon \in \mathbb{C}^-$ 和 $\lambda(A_{\text{xx}}^+) \in \mathbb{C}^-$, 其中 $P(\gamma)$ 的定义见式(8.24)。在后面其他定理的证明中会用到这些性质。这就证明了定理 8.1 的第二部分。

接下来证明状态反馈律 $u = F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}})x$, 使得

$\|T_{hw}\|_\infty = \|[C_2 + D_2 F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}})] \cdot [sI - A - BF(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}})]^{-1} E\|_\infty < \gamma$ 不失一般性但可带来简便, 假设非奇异变换为 $\Gamma_{\text{sp}} = I$ 和 $\Gamma_{\text{rp}} = I$, 即假设系统 $(A, B, \Gamma_{\text{op}}^{-1}C_2, \Gamma_{\text{op}}^{-1}D_2)$ 已经是特殊坐标基形式。根据式(8.14), 可以将 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}})$ 分解为

$$F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}}) = \bar{F}_0(\gamma) + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{\text{dp}}, \Delta_{\text{dp}}) \end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{F}_0(\gamma) = - \begin{bmatrix} C_{\text{oaP}}^+ + F_{\text{ao}}^+(\gamma) & C_{\text{obP}} + F_{\text{bo}}(\gamma) & C_{\text{oaP}}^- & C_{\text{ocP}} & C_{\text{odP}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP}) = - \begin{bmatrix} E_{dP}^+ + \tilde{F}_{a1}^+(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}) & E_{dP} + \tilde{F}_{b1}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}) & E_{dP}^- & E_{dP} & \tilde{F}_d(\epsilon, \Lambda_{dP}) + E_{dP} \\ & E_{cP}^+ & E_{cP} & E_{cP}^- & \Delta_{cP} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

则可得

$$\bar{C} = C_2 + D_2 F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP}) = \Gamma_{oP} \begin{bmatrix} -F_{a0}^+(\gamma) & -F_{b0}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{dP} \\ 0 & C_{bP} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{A} = A + B\bar{F}_0(\gamma), \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{cP} \\ B_{dP} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

基于这些定义, T_{hw} 可表示为

$$T_{hw} = \bar{C}[sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})]^{-1}E$$

根据式(8.51), 不难发现 $\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})$ 的形式为

$$\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP}) = N\Gamma(\epsilon)T(\epsilon) + R$$

其中

$$\Gamma(\epsilon) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\epsilon^{q_1}}, \frac{1}{\epsilon^{q_2}}, \dots, \frac{1}{\epsilon^{q_{m_{dP}}}} \right\}, \quad N = - \begin{bmatrix} I_{m_{dP}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$R = - \begin{bmatrix} E_{dP}^+ & E_{dbP} & E_{daP}^- & E_{dcP} & E_{dP} \\ E_{caP}^+ & E_{cbP} & E_{caP}^- & \Delta_{cP} & 0 \end{bmatrix}$$

$T(\epsilon)$ 在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时满足

$$T(\epsilon) \rightarrow TC_m$$

其中

$$T = \text{diag} \{ F_{1q_1}, F_{1q_2}, \dots, F_{m_{dP}q_{m_{dP}}} \}$$

和

$$C_m = [F_{a1}^+(\gamma) \quad F_{b1}(\gamma) \quad 0 \quad 0 \quad C_{dP}] \quad (8.53)$$

利用和 Chen 等^[75] 相同的论述, 很容易证明三元组 (\bar{A}, \bar{B}, C_m) 是右可逆和最小相位的。因此根据引理 8.3 可得, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\|C_m[sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})]^{-1}\|_\infty \rightarrow 0$$

注意采用相同的推理方法, 可以证明三元组 $(\bar{A} + \gamma^2 EE^T P(\gamma), \bar{B}, C_m)$ 是右可逆

和最小相位的, 而且当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\|C_m[sI - \bar{A} - \gamma^{-2}EE^T P(\gamma) - \bar{B}\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})]^{-1}\|_\infty \rightarrow 0 \quad (8.54)$$

下面令

$$\bar{C} = \Gamma_{oP} \begin{bmatrix} 0 \\ C_m \\ 0 \end{bmatrix} + C_e$$

其中

$$C_e = \Gamma_{oP} \begin{bmatrix} -F_{a0}^+(\gamma) & -F_{b0}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ -F_{a1}^+(\gamma) & -F_{b1}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{bP} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\|T_{hw}\|_\infty \rightarrow \|C_e[sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})]^{-1}E\|_\infty$$

沿用 Cheri^[79] 或 Saberi, Chen 和 Sannuti^[81] 的相同过程, 可以证明在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, s 逐点满足

$$C_e[sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})]^{-1}E \rightarrow \Gamma_{oP} \begin{bmatrix} -F_{11}(\gamma) \\ 0 & C_{bP} \end{bmatrix} (sI - A_{i1P})^{-1} \begin{bmatrix} E_{dP}^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.5.2 定理 8.2 的证明

不失一般性但却简便, 假设非奇异的状态和输入变换分别为 $\Gamma_{sP} = I$ 和 $\Gamma_{iP} = I$, 即由 $(A, B, \Gamma_{oP}^{-1}C_2, \Gamma_{oP}^{-1}D_2)$ 所表示的系统已经是特殊坐标基的形式。可以证明

$$A + BF(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP}) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ * & A_{aaP}^- & 0 & * \\ * & 0 & A_{ccP}^c & * \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

和

$$C_2 + D_2F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP}) = \Gamma_{oP} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $*$ 表示一些对证明无关紧要的子矩阵。因此对任意 $\alpha \in \lambda(A_{aaP}^-) \cup \lambda(A_{ccP}^c)$, 相应的右特征向量在 $C_2 + D_2F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})$ 的核空间中。这就证明了 α 是 T_{hw} 的输出解耦零点。

8.5.3 定理 8.3 的证明

为简便起见, 下面的证明中略去 $F(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dP}, \Delta_{dP})$ 和 $K(\gamma, \epsilon, \Lambda_{dQ}, \Delta_{dQ})$ 中的变

量。也在不失一般性的情况下假设 $\gamma = 1$ 。因此略去所有变量对 γ 的依赖。

首先不难验证式(8.24)所示的半正定矩阵 P 和式(8.26)所示的半正定矩阵 Q 分别满足

$$F_\gamma(P) := \begin{bmatrix} A^T P + PA + C_2^T C_2 + PEE^T P & PB + C_2^T D_2 \\ B^T P + D_2^T C_2 & D_2^T D_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

和

$$G_\gamma(Q) := \begin{bmatrix} AQ + QA^T + EE^T + QC_2^T C_2 Q & QC_2^T + ED_1^T \\ C_1 Q + D_1 E^T & D_1 D_1^T \end{bmatrix} \geq 0$$

即 P 和 Q 是矩阵不等式 $F_\gamma(P) \geq 0$ 和 $G_\gamma(Q) \geq 0$ 的正定解。而对于下面的辅助系统:

$$\Sigma_{PQ} : \begin{cases} \dot{x}_{PQ} = A_{PQ} x_{PQ} + B_{PQ} u + E_{PQ} w_{PQ} \\ y = C_{1P} x_{PQ} + D_{1PQ} w_{PQ} \\ h_{PQ} = C_{2P} x_{PQ} + D_{2P} u \end{cases} \quad (8.55)$$

其中

$$F_\gamma(P) = \begin{bmatrix} C_{2P}^T \\ D_{2P}^T \end{bmatrix} [C_{2P} \quad D_{2P}], \quad G_\gamma(Q) = \begin{bmatrix} E_Q \\ D_{1PQ} \end{bmatrix} [E_Q^T \quad D_{1PQ}^T]$$

和

$$\begin{cases} A_{PQ} := A + EE^T P + (I - QP)^{-1} QC_2^T C_{2P} \\ B_{PQ} := B + (I - QP)^{-1} QC_2^T D_{2P} \\ E_{PQ} := (I - QP)^{-1} E_Q \\ C_{1P} := C_1 + D_1 E^T P \end{cases} \quad (8.56)$$

具有下面的性质:①子系统 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{2P}, D_{2P})$ 是右可逆和最小相位的;②子系统 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 是左可逆和最小相位的。

下面的引理来自文献[22]。

引理 8.4 对于任意如下形式的补偿器 Σ_{cmp} :

$$\Sigma_{\text{cmp}} : \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}} v + B_{\text{cmp}} y \\ u = C_{\text{cmp}} v + D_{\text{cmp}} y \end{cases}$$

下面两个陈述等价:

(1) Σ_{cmp} 对式(8.23)所定义的系统 Σ 是内稳定的,所形成的从 w 到 h 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 1,即 $\|T_{hw}\|_\infty < 1$;

(2) Σ_{cmp} 对式(8.55)所定义的新系统 Σ_{PQ} 是内稳定的,所形成的从 w_{PQ} 到 h_{PQ} 的闭环传递函数的 H_∞ 范数小于 1,即 $\|T_{h_{PQ} w_{PQ}}\|_\infty < 1$ 。♣

因此,只要证明式(8.27)~式(8.30)所示的 Σ_{cmp} 作用于 Σ_{PQ} 时可以达到内稳定和几乎干扰解耦的话,就足以证明定理 8.3。注意到

$$C_{2P}^T C_{2P} = A^T P + PA + C_2^T C_2 + PEE^T P \quad \text{和} \quad C_{2P}^T C_{2P} = PB + C_2^T D_2$$

不难把式(8.28)所示的 A_{cmp} 重新表示为

$$A_{\text{cmp}} = A_{PQ} + B_{PQ}F + (I - QP)^{-1}KC_{1P}$$

现在很容易发现式(8.27)所示的 Σ_{cmp} 对 Σ_{PQ} 就是观测器型控制器,有状态反馈增益 F 和观测器增益 $(I - QP)^{-1}K$ 。因此著名的分离原理成立。同时,注意到 $(A_{PQ}, B_{PQ}, C_{2P}, D_{2P})$ 和 $(A_{PQ}, E_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 分别是最小相位、右可逆和左可逆的。所以为了证明定理 8.3,只要证明当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,有

- (1) $A_{PQ} + B_{PQ}F$ 是渐近稳定的;
- (2) $\|(C_{2P} + D_{2P}F)(sI - A_{PQ} - B_{PQ}F)^{-1}\|_\infty \rightarrow 0$;
- (3) $A_{PQ} + (I - QP)^{-1}KC_{1P}$ 是渐近稳定的;
- (4) $\|[sI - A_{PQ} - (I - QP)^{-1}KC_{1P}]^{-1}[E_{PQ} + (I - QP)^{-1}KD_{1PQ}]\|_\infty \rightarrow 0$ 。

我们要引入下面的引理以备后用。

引理 8.5 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,有

- (1) $A + EE^T P + BF$ 是渐近稳定的,且

$$\|(C_{2P} + D_{2P}F)(sI - A - EE^T P - BF)^{-1}\|_\infty \rightarrow 0 \quad (8.57)$$

- (2) $A + QC_2^T C_2 + KC_1$ 是渐近稳定的,且

$$\|(sI - A - QC_2^T C_2 - KC_1)^{-1}(E_Q + KD_{1PQ})\|_\infty \rightarrow 0 \quad (8.58)$$

注意上面两点的作用是互为对偶的。♣

证明 对 $\epsilon \rightarrow 0$,在定理 8.1 的证明中已经看出矩阵 $A + EE^T P + BF$ 是渐近稳定的。下面要证明式(8.57)。经过一些基本的推导,可以证明

$$C_{2P} = \Gamma_{\text{cP}} \begin{bmatrix} C_{0aP}^+ + F_{a0}^+ & C_{0bP} + F_{b0} & C_{0aP}^- & C_{0cP} & C_{0dP} \\ F_{a1}^+ & F_{b1} & 0 & 0 & C_{dP} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{\text{sP}}^{-1}$$

和

$$D_{2P} = D_2 = \Gamma_{\text{cP}} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{\text{sP}}^{-1}$$

而且

$$(C_{2P} + D_{2P}F)(sI - A - EE^T P - BF)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_m \\ 0 \end{bmatrix} (sI - \bar{A} - EE^T P - \bar{B}\bar{F})^{-1}$$

其中 \bar{A} 和 \bar{B} 由式(8.52)给出, \bar{F} 由式(8.51)给出, C_m 由式(8.53)给出。结论由式(8.54)可得。

引理 8.5 的第(2)项是第(1)项的对偶。因此结论成立。由此完成引理 8.5 的证明。◆

下面首先证明对于一些充分小的 ϵ , $A_{PQ} + B_{PQ}F$ 是渐近稳定的, 以及当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\|(C_{2P} + D_{2P}F)(sI - A_{PQ} - B_{PQ}F)^{-1}\|_\infty \rightarrow 0$$

根据引理 8.5, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, s 逐点满足

$$\begin{aligned} & sI - A_{PQ} - B_{PQ}F \\ &= sI - A - EE^T P - BF(I - QP)^{-1}QC_{2P}^T(C_{2P} + D_{xP}F) \\ &= [I - (I - QP)^{-1}QC_{2P}^T(C_{2P} + D_{xP}F)(sI - A - EE^T P - BF)^{-1}] \\ & \quad \cdot (sI - A - EE^T P - BF) \\ & \rightarrow sI - A - EE^T P - BF \end{aligned}$$

这表明对充分小的 ϵ , $A_{PQ} + B_{PQ}F$ 是渐近稳定的。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, s 逐点满足

$$\begin{aligned} & (C_{2P} + D_{xP}F)(sI - A_{PQ} - B_{PQ}F)^{-1} \\ &= (C_{2P} + D_{xP}F)(sI - A - EE^T P - BF)^{-1} \\ & \quad \cdot [I - (I - QP)^{-1}QC_{2P}^T(C_{2P} + D_{xP}F)(sI - A - EE^T P - BF)^{-1}]^{-1} \end{aligned} \tag{8.59}$$

同样的, 根据引理 8.5 和

$$\begin{aligned} C_{2P}^T C_{2P} &= A^T P + PA + C_2^T C_2 + PEE^T P \\ E_Q E_Q^T &= AQ + QA^T + EE^T + QC_2^T C_2 Q \end{aligned}$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, s 逐点满足下面的推导:

$$\begin{aligned} & (I - QP)[sI - A_{PQ} - (I - QP)^{-1}LC_{1P}] \\ &= (I - QP)(sI - A - EE^T P) - QC_{2P}^T C_{2P} - LC_1 - LD_1 E^T P \\ &= sI - A - EE^T P - QC_{2P}^T C_{2P} - LC_1 - LD_1 E^T P - sQP + QPA + QPEE^T P \\ &= sI - A - EE^T P - Q(A^T P + PA + C_2^T C_2 + PEE^T P) \\ & \quad - LC_1 - LD_1 E^T P - sQP + QPA + QPEE^T P \\ &= sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1 - (E_Q E_Q^T - AQ - QA^T - QC_2^T C_2)P \\ & \quad - LD_1 E^T P - QA^T P - sQP \\ &= sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1 - sQP + AQP + QC_2^T C_2 QP - E_Q E_Q^T LD_1 E^T P \\ &= (sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1)(I - QP) - (E_Q + LD_{1PQ})E_Q^T P \\ &= (sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1) \\ & \quad \cdot [(I - QP) - (sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1)^{-1}(E_Q + LD_{1PQ})E_Q^T P] \\ & \rightarrow (sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1)(I - QP) \end{aligned} \tag{8.60}$$

因此对充分小的 ϵ , $A_{PQ} + (I - QP)^{-1}KC_{1P}$ 是渐近稳定的。现根据式(8.60)可得当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, s 逐点满足

$$\begin{aligned} & [sI - A_{PQ} - (I - QP)^{-1}LC_{1P}]^{-1}[E_{PQ} + (I - QP)^{-1}LD_{1PQ}] \\ & \rightarrow (I - QP)^{-1}(sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1)^{-1}(I - QP)[E_{PQ} + (I - QP)^{-1}LD_{1PQ}] \end{aligned}$$

$$= (I - QP)^{-1} (sI - A - QC_2^T C_2 - LC_1)^{-1} (E_Q + LD_{1PQ})$$

$$\rightarrow 0$$

这就完成了定理 8.3 的证明。 ◆

8.5.4 定理 8.4 的证明

和前面的证明一样,为简单起见我们假设 $\gamma = 1$, 并令 $F = F(\gamma, \varepsilon, \Delta_{dP}, \Delta_{cP})$ 和 $K = K(\gamma, \varepsilon, \Delta_{dQ}, \Delta_{cQ})$ 。则闭环系统 $T_{hw}(s)$ 为

$$[C_2 \quad D_2 F] \left[sI - \begin{bmatrix} A & BF \\ -(I - QP)^{-1} KC_1 & A_{\text{cmp}} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} E \\ -(I - QP)^{-1} KD_1 \end{bmatrix}$$

根据定理 8.2 可得,对任意

$$\alpha \in \lambda(A_{\text{abP}}^-) \cup \lambda(A_{\text{ccP}}^c) \subset \lambda(A + BF)$$

有相应的右特征向量 W , 即 $(A + BF)W = \alpha W$, 满足 $(C_2 + D_2 F)W = 0$ 。而且很容易验证 $(C_{2P} + D_{2P} F)W = 0$ 和 $PW = 0$ 。

根据对偶可以证明对任意 $\beta \in \lambda(A_{\text{aaQ}}^-) \cup \lambda(A_{\text{ccQ}}^c)$, $\beta \in \lambda(A + KC_1)$, 相应的左特征向量 V , 即 $V^H(A + KC_1) = \beta V^H$, 满足 $V^H(E + KD_1) = 0$ 和 $V^H Q = 0$ 。根据式(8.28), 可得

$$A_{\text{cmp}} W = [A + EE^T P + BF + (I - QP)^{-1} QC_{2P}^T (C_{2P} + D_{2P} F) \\ + (I - QP)^{-1} KC_1 + (I - QP)^{-1} KD_1 E^T P] W \\ = (I - QP)^{-1} KC_1 W + (A + BF) W$$

$$V^H A_{\text{cmp}} = V^H (I - QP) [A + EE^T P + BF + (I - QP)^{-1} QC_{2P}^T (C_{2P} + D_{2P} F) \\ + (I - QP)^{-1} KC_1 + (I - QP)^{-1} KD_1 E^T P] \\ = V^H BF + V^H (A + KC_1)$$

因此

$$\begin{bmatrix} A & BF \\ -(I - QP)^{-1} KC_1 & A_{\text{cmp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + BF)W \\ A_{\text{cmp}} W - (I - QP)^{-1} KC_1 W \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix}$$

$$[C_2 \quad D_2 F] \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} = (C_2 + D_2 F)W = 0$$

这表明 α 是 $T_{hw}(s)$ 的一个输出解耦零点。类似的

$$\begin{bmatrix} V^H & -V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BF \\ -(I - QP)^{-1} KC_1 & A_{\text{cmp}} \end{bmatrix} \\ = [V^H (I - QP) [A + (I - QP)^{-1} KC_1] \quad V^H (BF - A_{\text{cmp}})] \\ = \beta [V^H \quad -V^H]$$

$$\begin{bmatrix} V^H & -V^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ -(I - QP)^{-1} KD_1 \end{bmatrix} = V^H (E + KD_1) = 0$$

这表明 β 是 $T_{hw}(s)$ 的一个输入解耦零点。

利用式(8.50)和

$$\text{Im}(P) = [\mathcal{S}^+(\Sigma_P)]^\perp$$

立即可以证明定理 8.4 第(3)项的第一部分。第二部分是第一种情况的对偶。证明结束。◆

8.5.5 定理 8.5 的证明

首先注意到① $(A_{PQ}, B_{PQ}, C_{2P}, D_{2P})$ 是右可逆和最小相位; ② $(A_{PQ}, B_{PQ}, C_{1P}, D_{1PQ})$ 是左可逆和最小相位。根据定理 8.5 可得存在增益矩阵 F 和 K_R , 使得降阶输出反馈控制律(8.44)可内稳定 Σ_{PQ} , 并且使得闭环传递矩阵的 H_∞ 范数严格小于任意给定的 ϵ 。定理 8.5 的第二个结果根据引理 8.4 可得。◆

第 9 章 连续时间 H_∞ 几乎干扰解耦

9.1 导 论

本章考虑和研究连续时间线性系统在测量反馈和内稳定约束下的 H_∞ 几乎干扰解耦问题。尽管从原理上讲这是个一般 H_∞ 控制的特殊问题,即 $\gamma^* = 0$ 的情况,但是几乎干扰解耦问题的发展历史由来已久,在现代控制理论中占有重要地位。一些重要的问题都可以转化成几乎干扰解耦问题,如鲁棒控制、分散控制(decentralized control)、非交互控制(non-interactive control)、模型参考(model reference)或跟踪控制、 H_2 和 H_∞ 控制问题。粗略地说,所谓几乎干扰解耦问题就是寻找一个输出反馈控制律,在保持内稳定的前提下使得闭环系统中的干扰被抑制(例如在 L_p 意义上)到预定的程度。该问题首先是由 Willems^[67,68] 提出,简记为 AD- $DPMS$ (almost disturbance decoupling problem with measurement feedback and internal stability, 测量反馈和内稳定下的几乎干扰解耦问题)。如果是在状态反馈情况下,上面的问题也称为 ADDPS(almost disturbance decoupling problem with internal stability, 内稳定下的几乎干扰解耦问题)。另外, H_∞ -AD- $DPMS$ 和 H_∞ -ADDPS 表明所对应的问题是在 L_2 意义上干扰解耦问题。

有很多文献是关于几乎干扰解耦问题的(如最近的研究[121]~[123],以及随附的参考文献)。其中,文献[121]总结了几种不同的干扰解耦问题以及其可解性条件,并针对严格正则连续时间系统(即没有从控制输入到被控输出和从扰动输入到测量输出的直接传输项)给出了 H_∞ -AD- $DPMS$ 和 H_∞ -ADDPS 可解性的充分和必要几何条件。在这些条件下,文献[122]构造了以单个 ϵ 为参数的反馈律,求解了 H_∞ -AD- $DPMS$ 和 H_∞ -ADDPS。这些结果随后在文献[123]中被推广到正则系统(有直接传输项)。我们要特别指出,在以上的所有结果中,闭环系统的内稳定性都是针对复平面上某个特定的闭集合而言。这种闭约束当然有利于得到相当完美的结果,但把扰动对系统的纯虚数不变零点动态的影响排除在外。只是最近由 Scherer 在文献[21]中去除了这个关于内稳定的“最终”约束,这样就容许扰动影响系统的纯虚数不变零点动态。尤其是对一般的正则线性系统,在关于开左半平面内稳定的约束下, Scherer^[21] 给出了一组 H_∞ -AD- $DPMS$ 和 H_∞ -ADDPS 可解性的充分和必要条件。当稳定性是针对开左半复平面而言时,我们也称所对应的 H_∞ -AD- $DPMS$ 和 H_∞ -ADDPS 为一般的问题。在 Scherer 的充分必要条件下, Chen 等最近在文献[124]中显式地构造了一般的 H_∞ -AD- $DPMS$ 和 H_∞ -ADDPS 反馈控制

律。本章的重点是：①给出一般 H_∞ -ADDPMS 和 H_∞ -ADDPS 可解性的可验证条件；②构造求解这些问题的显式算法。后者是 Chen 等^[124]的研究内容。

现在考虑具体的一般 H_∞ -ADDPMS 和一般 H_∞ -ADDPS，一般的连续时间系统为

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1x + D_1w \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (9.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态， $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入， $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出， $w \in \mathbb{R}^r$ 是扰动， $h \in \mathbb{R}^q$ 是被控输出。为了在后面引用方便，和前面一样，本章中定义 Σ_P 是由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所代表的子系统， Σ_Q 是由矩阵四元组 (A, E, C_1, D_1) 所代表的子系统。我们来看下面的动态反馈控制律：

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}v + B_{\text{cmp}}y \\ u = C_{\text{cmp}}v + D_{\text{cmp}}y \end{cases} \quad (9.2)$$

当把式(9.2)所示的 Σ_{cmp} 用来控制系统 Σ 时，若下面的矩阵是渐近稳定的

$$A_{\text{cl}} := \begin{bmatrix} A + BD_{\text{cmp}}C_1 & BC_{\text{cmp}} \\ B_{\text{cmp}} & A_{\text{cmp}} \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

即所有的特征值位于开左半复平面，则称控制器是可镇定的。另用 T_{hw} 表示相应的从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递函数矩阵。则一般 H_∞ -ADDPMS 和一般 H_∞ -ADDPS 问题可正式定义如下。

定义 9.1 对于连续时间系统(9.1)，在测量反馈和内稳定约束下， H_∞ 几乎于扰解耦问题(H_∞ -ADDPMS)可解的充分必要条件是对任意正数 $\gamma > 0$ ，至少存在一个式(9.2)所示的控制器，使得

(1) 在没有扰动的情况下，由系统(9.1)和式(9.3)所形成的闭环系统是渐近稳定的，即式(9.3)所示的矩阵是渐近稳定的；

(2) 闭环系统从扰动 w 到被控输出 h 的 L_2 增益小于等于 γ ，即

$$\|h\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w \in L_2, (x(0), v(0)) = (0, 0) \quad (9.4)$$

等价的，从 w 到 h 的闭环传递矩阵 T_{hw} 的 H_∞ 范数小于或等于 γ ，即 $\|T_{hw}\|_\infty \leq \gamma$ 。

当 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 时，上面定义的一般 H_∞ -ADDPMS 成为一般 H_∞ -ADDPS，这时只需要静态的状态反馈，而不需要式(9.2)所示的动态输出反馈。♣

显然，系统(9.1)的 H_∞ -ADDPMS 等价于 $\gamma^* = 0$ 时 Σ 的一般 H_∞ 控制问题。正如前面所提，本章的目的之一是在 Scherer^[21]的充分必要条件下，求解以上定义的一般系统的一般 H_∞ -ADDPMS 和一般 H_∞ -ADDPS，其中的子系统 Σ_P 和 Σ_Q 可能在虚轴上有不变零点。我们构造的反馈控制律是观测器型的及参数化的(以 ϵ 为参数)。首先构造一组以单个变量为参数的静态状态反馈律来解一般的 H_∞ -ADDPS。然后构造同样以 ϵ 为参数的一组观测器来实现状态反馈律，因而得到以

ϵ 为参数的一组动态测量反馈律来解一般 H_∞ -ADDPMS。构造这样一组反馈律的基本工具是:①第4章的特殊坐标基,这时的线性系统被分解到有限和无限零点结构,以及可逆结构的几个子系统。②第4章的块对角控制规范型,把虚轴上的不变零点动态变换到特殊的规范型,这时可以采用低增益设计技术。③ H_∞ 低-高增益设计技术。这样的 H_∞ 低-高增益设计技术源自于文献[125]和[126],背景是把特殊一类非线性系统的 H_∞ -ADDPMS 应用在开右半平面没有不变零点的 SISO(因而是方可逆)线性系统。

9.2 可解性条件

本节首先回顾 Scherer^[21]的一般 H_∞ -ADDPMS 和一般 H_∞ -ADDPS 可解的充分必要条件。然后利用特殊坐标基性质把 Scherer 的几何条件转变到容易检验的条件。下面对 Scherer^[21]的结果稍加推广。

定理 9.1 考虑一般的测量反馈系统(9.1)。具有内稳定的一般 H_∞ 几乎干扰解耦问题可解的充分必要条件是满足以下条件:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) (A, C_1) 可检测;
- (3) $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^\dagger D_2^T D_{22} D_1^T (D_1^T D_1)^\dagger$;
- (4) $\text{Im}(E + B S D_1) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P) \cap \{\bigcap_{\lambda \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P)\}$;
- (5) $\text{Ker}(C_2 + D_2 S C_1) \Leftrightarrow \mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \cup \{\bigcup_{\lambda \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q)\}$;
- (6) $\mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P)$ 。 ♣

注 9.1 注意如果 Σ_P 右可逆和最小相位, Σ_Q 左可逆和最小相位,则定理 9.1 的条件(4)~(6)自动满足。因此 H_∞ -ADDPMS 可解的条件成为

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) (A, C_1) 可检测;
- (3) $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^\dagger D_2^T D_{22} D_1^T (D_1^T D_1)^\dagger$ 。 ♣

注 9.2 当系统(9.1)的所有状态可测量时,即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$, 很容易验证一般 H_∞ -ADDPS 可解条件成为

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) $D_{22} = 0$;
- (3) $\text{Im}(E) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P) \cap \{\bigcap_{\lambda \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P)\}$ 。

而且在此种情况下,存在静态反馈律来解一般的 H_∞ -ADDPS, 即 $u = Fx$, 其中 F 可能是参数化定常矩阵。 ♣

定理 9.1 的几何条件是非常完美的,可是在数值上验证这些几何条件往往相

当困难。下面,我们对一般连续时间系统的 H_∞ -ADDPMS 给出一个简单的方法来检验这些可解性条件。

步骤 9.1 令 $S = -(D_2^T D_2)^\dagger D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^\dagger$ 。如果 $D_{22} + D_2 S D_1 \neq 0$, 算法停止。否则转向步骤 9.2。

步骤 9.2 计算 Σ_P , 即矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 的特殊坐标基(SCB)。为参考方便,我们对所有和 Σ_P 相关的 SCB 中子矩阵和变换都附上下标“P”, 如 Γ_{aP} 是 Σ_P 中 SCB 的状态变换, A_{aaP}^0 是 Σ_P 的虚轴上不变零点动态。

步骤 9.3 用 $\{\omega_{P1}, \omega_{P2}, \dots, \omega_{Pk_P}\}$ 表示 A_{aaP}^0 所有非负虚部的特征值的集合, 同时, 对 $i = 1, 2, \dots, k_P$, 选择复矩阵 V_{iP} 使得它的列构成以下特征空间

$$\{x \in \mathbb{C}^{n_{aP}^0} \mid x^H (\omega_{iP} I - A_{aaP}^0) = 0\} \quad (9.5)$$

的一组基。其中 n_{aP}^0 是 \mathcal{X}_{aP}^0 的维数。然后令

$$V_P := [V_{1P} \quad V_{2P} \quad \dots \quad V_{k_P P}] \quad (9.6)$$

同时计算 $n_{xP} := \dim(\mathcal{X}_{aP}^+) + \dim(\mathcal{X}_{bP})$ 和

$$\Gamma_{aP}^{-1} (E + BSD_1) := \begin{bmatrix} E_{aP}^- \\ E_{aP}^0 \\ E_{aP}^+ \\ E_{bP} \\ E_{cP} \\ E_{dP} \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

步骤 9.4 令 Σ'_Q 为系统 Σ_Q 的对偶, 即由四元组 (A^T, C_1^T, E^T, D_1^T) 构成的系统。我们计算 Σ'_Q 的特殊坐标基。同样为参考方便, 对于 Σ'_Q 的 SCB 中的子矩阵和变换都附上下标“Q”, 如 Γ_{aQ} 是 Σ'_Q 的 SCB 中的状态变换, A_{aaQ}^0 是 Σ'_Q 在虚轴上的不变零点动态。

步骤 9.5 用 $\{\omega_{Q1}, \omega_{Q2}, \dots, \omega_{Qk_Q}\}$ 表示 A_{aaQ}^0 所有非负虚部的特征值的集合, 同时, 对 $i = 1, 2, \dots, k_Q$, 选择复矩阵 V_{iQ} 使得它的列构成以下特征空间

$$\{x \in \mathbb{C}^{n_{aQ}^0} \mid x^H (\omega_{iQ} I - A_{aaQ}^0) = 0\} \quad (9.8)$$

的一组基。其中 n_{aQ}^0 是 \mathcal{X}_{aQ}^0 的维数。然后令

$$V_Q := [V_{1Q} \quad V_{2Q} \quad \dots \quad V_{k_Q Q}] \quad (9.9)$$

同时计算 $n_{xQ} := \dim(\mathcal{X}_{aQ}^+) + \dim(\mathcal{X}_{bQ})$ 和

$$\Gamma_{sQ}^{-1}(E + BSD_1) := \begin{bmatrix} E_{sQ}^- \\ E_{sQ}^0 \\ E_{sQ}^+ \\ E_{bQ} \\ E_{cQ} \\ E_{dQ} \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

步骤 9.6 最后计算

$$\Gamma_{sP}^{-1}(\Gamma_{sQ}^{-1})^T = \begin{bmatrix} X_a^{-0} & * & * \\ * & \Gamma & * \\ * & * & X_{cd} \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

其中 X_a^{-0} 和 X_{cd} 分别是 $(n_{aP}^- + n_{aP}^0) \times (n_{dQ}^- + n_{dQ}^0)$ 维和 $(n_{cP} + n_{dP}) \times (n_{cQ} + n_{dQ})$ 维的, Γ 是 $n_{sP} \times n_{sQ}$ 维的. ♣

我们有下面的性质.

性质 9.1 考虑一般的测量反馈连续时间系统(9.1), 具有内稳定的 H_∞ 几乎干扰解耦问题(H_∞ -ADDPMS), 即 $\gamma^* = 0$, 可解的充分必要条件是满足以下条件:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) (A, C_1) 可检测;
- (3) $D_{22} + D_2SD_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^{\dagger} D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^{\dagger}$;
- (4) $E_{aP}^+ = 0, E_{bP} = 0$ 和 $V_P^H E_{aP}^0 = 0$;
- (5) $E_{sQ}^+ = 0, E_{bQ} = 0$ 和 $V_Q^H E_{sQ}^0 = 0$;
- (6) $\Gamma = 0$. ♣

证明 不难看出前三个条件是系统(9.1)的 H_∞ -ADDPMS 可解的必要条件. 根据第4章特殊坐标基的性质, 可以看出几何条件

$$\text{Im}(E + BSD_1) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P) \cap \left\{ \bigcap_{\lambda \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P) \right\}$$

等价于: $E_{aP}^+ = 0, E_{bP} = 0$ 和 $V_P^H E_{aP}^0 = 0$. 对偶的, 几何条件

$$\text{Ker}(C_2 + D_2 S C_1) \supset \mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \cup \left\{ \bigcup_{\lambda \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q) \right\}$$

等价于: $E_{sQ}^+ = 0, E_{bQ} = 0$ 和 $V_Q^H E_{sQ}^0 = 0$.

同样的, 根据特殊坐标基的性质, 有

$$\mathcal{S}^+(\Sigma_P) = \text{Ker} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I_{n_P} & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{sP}^{-1} \right\}, \quad \mathcal{V}^+(\Sigma_Q) = \text{Im} \left\{ (\Gamma_{sQ}^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_{sQ}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

因此可直接验证 $\mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P)$ 等价于

$$\begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{sP}^{-1} (\Gamma_{sQ}^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_{xQ}} \\ 0 \end{bmatrix} = \Gamma = 0$$

因此结论得证。 ◆

9.3 全状态反馈的解

本节考虑具有内稳定和全状态反馈的一般 H_∞ 几乎干扰解耦反馈律, 其中的内稳定是关于开左半平面的, 即一般的 H_∞ -ADDPS。我们要特别给出一组参数化静态状态反馈律

$$u = F(\epsilon)x \tag{9.12}$$

的设计过程, 它可解下面系统的一般 H_∞ -ADDPS:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \tag{9.13}$$

即对充分小的 ϵ , 在这组状态反馈律下的闭环系统是渐近稳定的。当 ϵ 趋向零时, 从 w 到 h 的闭环传递矩阵 $T_{hw}(s, \epsilon)$ 的 H_∞ 范数趋向零, 其中

$$T_{hw}(s, \epsilon) = [C_2 + D_2F(\epsilon)][sI - A - BF(\epsilon)]^{-1}E + D_{22} \tag{9.14}$$

显然 $D_{22} = 0$ 是一般 H_∞ -ADDPS 可解性的必要条件。根据渐近时间尺度和特征结构配置(ATEA)过程, 我们给出得到 $F(\epsilon)$ 的算法。首先利用给定系统的特殊坐标基(见定理 4.5)、有限和无限零点结构以及可逆结构把系统分解成几个子系统, 算法中将出现一个新的组成部分, 即纯虚轴不变零点动态的低增益设计。我们可以清楚地看出, 当纯虚轴上不变零点的动态受到扰动影响时, 低增益部分就发挥重要的作用。特别要指出, 人们普遍认为处理受到扰动影响的纯虚轴零点动态是件非常困难的事情, 所以在文献中这种情况往往是不予考虑的。

我们有下面的逐步算法。

步骤 9.7(分解 Σ_P) 把 (A, B, C_2, D_2) 所表示的子系统 Σ_P 分解到定理 4.5 的特殊坐标基(SCB)。分别用 Γ_{sP}, Γ_{oP} 和 Γ_{IP} 表示状态、输出和输入变换矩阵。

步骤 9.8(和 \mathcal{X}_c 相关的子系统的增益矩阵) 令 F_c 是任意的 $m_c \times n_c$ 矩阵, 满足

$$A_{cc}^\epsilon = A_{cc} - B_c F_c \tag{9.15}$$

是稳定矩阵的约束。注意特殊坐标基的性质保证了这样 F_c 的存在性, 即 (A_{cc}, B_c) 是可控的。

步骤 9.9(和 $\mathcal{X}_a^+, \mathcal{X}_b$ 相关的子系统的增益矩阵) 令

$$F_{ab}^+ := \begin{bmatrix} F_{a0}^+ & F_{b0} \\ F_{ad}^+ & F_{bd} \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

是任意的 $(m_0 + m_d) \times (n_a^+ + n_b)$ 矩阵, 满足

$$A_{ab}^{+c} := \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & L_{ad}^+ \\ B_{0b} & L_{bd} \end{bmatrix} F_{ab}^+ \quad (9.17)$$

是稳定矩阵的约束。同样的, (A, B) 的可镇定性 and 特殊坐标基的性质 4.1 保证了 F_{ab}^+ 的存在性。为了后面的应用, 把 $[F_{ad}^+ \ F_{bd}]$ 划分为

$$[F_{ad}^+ \ F_{bd}] = \begin{bmatrix} F_{ad1}^+ & F_{bd1} \\ F_{ad2}^+ & F_{bd1} \\ \vdots & \vdots \\ F_{adm_d}^+ & F_{bdm_d} \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

其中 F_{adi}^+ 和 F_{bdi} 的维数分别是 $1 \times n_a^+$ 和 $1 \times n_b$ 。

步骤 9.10(和 \mathcal{X}_a^0 相关子系统的增益矩阵) 增益矩阵的构造由下面的分步骤组成。

步骤 9.10.1(预坐标变换) 回顾 (A_{con}, B_{con}) 的定义见式(4.36), 有

$$A_{con} - B_{con} \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_{ab}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & A_{aab}^- \\ 0 & A_{aa}^0 & A_{aab}^0 \\ 0 & 0 & A_{ab}^{+c} \end{bmatrix}, \quad B_{con} = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & L_{ad}^- \\ B_{0a}^0 & L_{ad}^0 \\ B_{0ab}^+ & L_{abd}^+ \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

其中

$$B_{0ab}^+ = \begin{bmatrix} B_{0a}^+ \\ B_{0b} \end{bmatrix}, \quad L_{abd}^+ = \begin{bmatrix} L_{ad}^+ \\ L_{bd} \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

$$A_{aab}^0 = \begin{bmatrix} 0 & L_{ab}^0 C_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{0a}^0 & L_{ad}^0 \end{bmatrix} F_{ab}^+ \quad (9.21)$$

和

$$A_{aab}^- = \begin{bmatrix} 0 & L_{ab}^- C_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{0a}^- & L_{ad}^- \end{bmatrix} F_{ab}^+ \quad (9.22)$$

$(A_{con} - B_{con} F_{ab}^+, B_{con})$ 显然还保持可镇定。构造下面的非奇异变换矩阵:

$$\Gamma_{ab} = \begin{bmatrix} I_{n_a^-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_a^+ + n_b} \\ 0 & I_{n_a^0} & T_a^0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (9.23)$$

其中 T_a^0 是 Lyapunov 方程

$$A_{aa}^0 T_a^0 - T_a^0 A_{ab}^{+c} = A_{aab}^0 \quad (9.24)$$

的唯一解。因为 A_{aa}^0 的所有特征值在虚轴上, A_{ab}^{+c} 的所有特征值在开左半平面, 所以 Lyapunov 方程唯一解总是存在的。现在容易验证

$$\Gamma_{ab}^{-1}(A_{con} - B_{con}F_{ab}^+)\Gamma_{ab} = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & A_{aab}^- & 0 \\ 0 & A_{ab}^{+c} & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa}^0 \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

$$\Gamma_{ab}^{-1}B_{con} = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & L_{ad}^- \\ B_{0ab}^+ & L_{ad}^+ \\ B_{0a}^0 + T_a^0 B_{0ab}^+ & L_{ad}^0 + T_a^0 L_{abd}^+ \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

因此矩阵对 (A_{aa}^0, B_a^0) 是可控的, 其中

$$B_a^0 = [B_{0a}^0 + T_a^0 B_{0ab}^+ \quad L_{ad}^0 + T_a^0 L_{abd}^+]$$

步骤 9.10.2(进一步的坐标变换) 根据定理 4.4 的证明思路, 找到非奇异变换矩阵 Γ_{sa}^0 和 Γ_{ia}^0 , 把 (A_{aa}^0, B_a^0) 变换到块对角控制规范型

$$(\Gamma_{sa}^0)^{-1}A_{aa}^0\Gamma_{sa}^0 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_l \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

和

$$(\Gamma_{sa}^0)^{-1}B_a^0\Gamma_{ia}^0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} & \cdots & B_{1l} & * \\ 0 & B_2 & \cdots & B_{2l} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_l & * \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

其中 l 为整数, 对于 $i = 1, 2, \dots, l$, 有

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{n_i}^i & -a_{n_i-1}^i & -a_{n_i-2}^i & \cdots & -a_i^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们注意到 A_i 的所有特征值在虚轴上。这里的 * 代表一些无关紧要的子矩阵。

步骤 9.10.3(子系统设计) 对每个 (A_i, B_i) , 令 $F_i(\epsilon) \in R^{1 \times n_i}$ 是状态反馈增益矩阵, 使得

$$\lambda\{A_i - B_i F_i(\epsilon)\} = -\epsilon + \lambda(A_i) \in C^- \quad (9.29)$$

注意 $F_i(\epsilon)$ 是唯一的。

步骤 9.10.4(合成和 \mathcal{X}_a^0 相关的子系统的增益矩阵) 令

$$F_a^0(\epsilon) := \Gamma_{in}^0 \begin{bmatrix} F_1(\epsilon) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F_2(\epsilon) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{l-1}(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F_l(\epsilon) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} (\Gamma_{sa}^0)^{-1} \quad (9.30)$$

其中 $\epsilon \in (0, 1]$ 是个待设计的参数, 后面会确定它的值。

对一些和 ϵ 无关的正常数 f_a^0 , 显然有

$$|F_a^0(\epsilon)| \leq f_a^0 \epsilon, \quad \epsilon \in (0, 1] \quad (9.31)$$

为了后面的应用, 我们定义并划分 $F_{ab}(\epsilon) \in \mathbb{R}^{(m_0+m_d) \times (n_a+n_b)}$ 为

$$F_{ab}(\epsilon) = \begin{bmatrix} F_{ab0}(\epsilon) \\ F_{abd}(\epsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{m_0 \times n_a^-} & 0_{m_0 \times (n_a^+ + n_b)} & F_{a0}^0(\epsilon) \\ 0_{m_d \times n_a^-} & 0_{m_d \times (n_a^+ + n_b)} & F_{ad}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \Gamma_{ab}^{-1} \quad (9.32)$$

和

$$F_{abd}(\epsilon) = \begin{bmatrix} F_{abd1}(\epsilon) \\ F_{abd2}(\epsilon) \\ \vdots \\ F_{abdm_d}(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

其中 $F_{a0}^0(\epsilon)$ 和 $F_{ad}^0(\epsilon)$ 被定义为

$$F_a^0(\epsilon) = \begin{bmatrix} F_{a0}^0(\epsilon) \\ F_{ad}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

把 $F_{ad}^0(\epsilon)$ 也分块为

$$F_{ad}^0(\epsilon) = \begin{bmatrix} F_{ad1}^0(\epsilon) \\ F_{ad2}^0(\epsilon) \\ \vdots \\ F_{adm_d}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (9.35)$$

步骤 9.11 (和 \mathcal{X}_d 相关子系统的增益矩阵) 这一步利用第 4 章式 (4.23) 所表示的子系统, $i=1, 2, \dots, m_d$ 。令 $\Lambda_i = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{iq_i}\}$ 是 \mathbb{C} 中的 q_i 个元素 ($i=1, 2, \dots, m_d$), 共轭成对出现, q_i 和 m_d 如定理 4.5 所定义, 但是和 Σ_P 的特殊坐标基相关联。令 $\Lambda_d := \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_{m_d}$ 。对 $i=1, 2, \dots, m_d$, 定义

$$p_i(s) := \prod_{j=1}^{q_i} (s - \lambda_{ij}) = s^{q_i} + F_{i1} s^{q_i-1} + \dots + F_{iq_{i-1}} s + F_{iq_i} \quad (9.36)$$

和

$$\tilde{F}_i(\epsilon) := \frac{1}{\epsilon^{q_i}} F_i S_i(\epsilon) \quad (9.37)$$

其中

$$F_i = [F_{i_i} \quad F_{i_{i-1}} \quad \cdots \quad F_{i1}], \quad S_i(\epsilon) = \text{diag}\{1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{q_i-1}\} \quad (9.38)$$

步骤 9.12(复合参数化增益矩阵 $F(\epsilon)$) 在这一步中, 将步骤 9.8~9.11 中计算出来的各种增益矩阵复合在一起, 形成复合状态反馈增益矩阵 $F(\epsilon)$ 。令

$$\tilde{F}_{abd}(\epsilon) := \begin{bmatrix} F_{abd1}(\epsilon)F_{1q_1}/\epsilon^{q_1} \\ F_{abd2}(\epsilon)F_{2q_2}/\epsilon^{q_2} \\ \vdots \\ F_{abdm_d}(\epsilon)F_{m_dq_{m_d}}/\epsilon^{q_{m_d}} \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

$$\tilde{F}_{ad}^+(\epsilon) := \begin{bmatrix} F_{ad1}^+F_{1q_1}/\epsilon^{q_1} \\ F_{ad2}^+F_{2q_2}/\epsilon^{q_2} \\ \vdots \\ F_{adm_d}^+F_{m_dq_{m_d}}/\epsilon^{q_{m_d}} \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

和

$$\tilde{F}_{bd}(\epsilon) := \begin{bmatrix} F_{bd1}F_{1q_1}/\epsilon^{q_1} \\ F_{bd2}F_{2q_2}/\epsilon^{q_2} \\ \vdots \\ F_{bdm_d}F_{m_dq_{m_d}}/\epsilon^{q_{m_d}} \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

然后定义状态反馈增益矩阵 $F(\epsilon)$ 为

$$F(\epsilon) := -\Gamma_{\text{IP}}[\tilde{F}_{abcd}^*(\epsilon) + \tilde{F}_{abcd}(\epsilon)]\Gamma_{\text{SP}}^{-1} \quad (9.42)$$

其中

$$\tilde{F}_{abcd}^*(\epsilon) = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^0 & C_{0a}^+ + F_{a0}^+ & C_{0b} + F_{b0} & C_{0c} & C_{0d} \\ E_{da}^- & E_{da}^0 & E_{da}^+ + \tilde{F}_{ad}^+(\epsilon) & E_{db} + \tilde{F}_{bd}(\epsilon) & E_{dc} & \tilde{F}_d(\epsilon) + E_d \\ E_{ca}^- & E_{ca}^0 & E_{ca}^+ & 0 & F_c & 0 \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

$$\tilde{F}_{abcd}(\epsilon) = \begin{bmatrix} F_{ab0}(\epsilon) & 0 & 0 \\ \tilde{F}_{abd}(\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

$$E_d = \begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1m_d} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{m_d1} & \cdots & E_{m_dm_d} \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

$$\tilde{F}_d(\epsilon) = \text{diag}\{\tilde{F}_1(\epsilon), \tilde{F}_2(\epsilon), \dots, \tilde{F}_{m_d}(\epsilon)\} \quad (9.46)$$

♣

我们有下面的定理。

定理 9.2 考虑满足评注 9.2 所有条件的系统(9.13)。当 $F(\epsilon)$ 由式(9.42)给出时,则静态状态反馈律 $u = F(\epsilon)x$ 和式(9.13)所形成的闭环系统具有下面的性质:对任意给定的 $\gamma > 0$, 存在一个 $\epsilon^* > 0$, 使得对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, 有

(1) 闭环系统是渐近稳定的, 即 $\lambda\{A + BF(\epsilon)\} \subset C^-$;

(2) 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ , 即 $\|T_{hw}(s, \epsilon)\|_\infty < \gamma$ 。

因此根据定义 9.1, 控制律 $u = F(\epsilon)x$ 解决了系统(9.13)的一般 H_∞ -ADDPS。♣

证明 见 9.5.1 节。◆

我们用下面的例子来演示上面的结果。

例 9.1 考虑系统(9.1), 其中 $C_1 = I, D_1 = 0$, 且

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

子系统 Σ_P 已经是特殊坐标基形式。不难验证:① (A, B) 可镇定;② Σ_P 在 0 处有三个不变零点, 在 -1 处有一个稳定的不变零点;③ Σ_P 有一个零阶的无限零点、一个一阶的无限零点;④ Σ_P 是左可逆的;⑤

$$\mathcal{S}^+(\Sigma_P) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (9.49)$$

和

$$\bigcap_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (9.50)$$

因此

$$\mathcal{S}^+(\Sigma_P) \cap \{ \bigcap_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P) \} = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (9.51)$$

显然, $\text{Im}(E) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P) \cap \{ \bigcap_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P) \}$, 根据评注 9.2, 对给定系统的 H_∞ -ADDPS 是可实现的。按照本节算法, 可得到状态反馈增益矩阵

$$F(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -2 \\ -\epsilon^2/3 - 1 & 2\epsilon^2/9 - \epsilon - 2 & 2\epsilon/3 - \epsilon^2/27 - 4 & -4 & -5 & -1/\epsilon - 6 \end{bmatrix} \quad (9.52)$$

闭环系统极点渐近地位于 $-1, -2, -\epsilon, -\epsilon, -\epsilon$ 和 $-1/\epsilon$ 。当 ϵ 越来越小时, 闭环传递矩阵 $T_{hw}(s, \epsilon)$ 的最大奇异值如图 9.1 所示, 显然表明 H_∞ -ADDPS 是可解的。

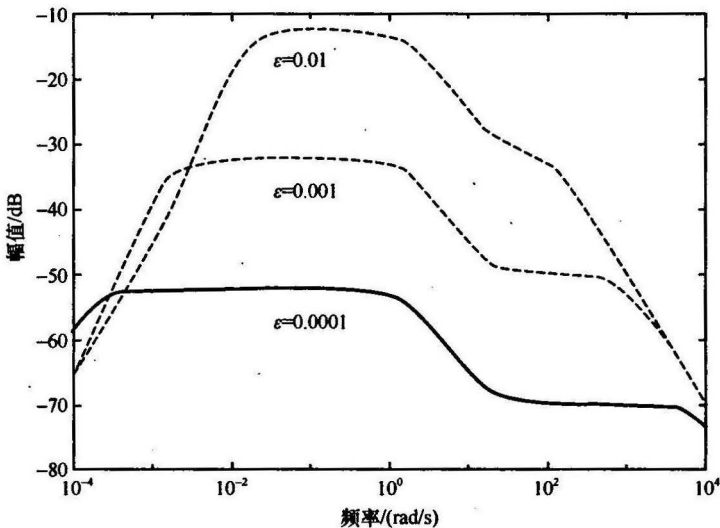


图 9.1 T_{hw} 的最大奇异值(状态反馈情况)

9.4 输出反馈的解

本节中,我们要设计全阶和降阶输出反馈控制器来解系统(9.1)的一般 H_∞ -ADDPMS。所谓全阶控制器,是指控制器的阶次恰好等于系统(9.1)的阶次,即 n 。而降阶控制器,是指控制器的动态阶次小于 n 。在不失一般性的情况下假设系统(9.1)中的 $D_{22} = 0$ 。

9.4.1 全阶输出反馈

下面的逐步算法构造了参数化的全阶输出反馈控制器来解一般的 H_∞ -ADDPMS。

步骤 9.13(构造增益矩阵 $F_P(\epsilon)$) 定义辅助系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (9.53)$$

然后对上面的系统进行 9.3 节的步骤 9.7~9.12,得到参数化的增益矩阵 $F(\epsilon)$, 令 $F_P(\epsilon) = F(\epsilon)$ 。

步骤 9.14(构造增益矩阵 $K_Q(\epsilon)$) 定义另一个辅助系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x + C_1^T u + C_2^T w \\ y = x \\ h = E^T x + D_1^T u + D_{22}^T w \end{cases} \quad (9.54)$$

然后对上面的系统进行步骤 9.7~9.12,得到参数化增益矩阵 $F(\epsilon)$, 令 $K_Q(\epsilon) = F(\epsilon)^T$ 。

步骤 9.15(构造全阶控制器 $\Sigma_{FC}(\epsilon)$) 最后得到参数化的全阶输出反馈控制器

$$\Sigma_{FC}(\epsilon): \begin{cases} \dot{v} = A_{FC}(\epsilon)v + B_{FC}(\epsilon)y \\ u = C_{FC}(\epsilon)v + D_{FC}(\epsilon)y \end{cases} \quad (9.55)$$

其中

$$\begin{cases} A_{FC}(\epsilon) := A + BF_P(\epsilon) + K_Q(\epsilon)C_1 \\ B_{FC}(\epsilon) := -K_Q(\epsilon) \\ C_{FC}(\epsilon) := F_P(\epsilon) \\ D_{FC}(\epsilon) := 0 \end{cases} \quad (9.56)$$

这就完成了构造全阶测量反馈控制器的算法。♣

定理 9.3 考虑 $D_{22} = 0$ 的系统(9.1), 满足定理 9.1 的所有条件。则由

式(9.1)和全阶输出反馈控制器(9.55)所形成的闭环系统具有下面的性质:对任意的 $\gamma > 0$, 存在一个 $\epsilon^* > 0$, 使得对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, 有

(1) 闭环系统是渐近稳定的;

(2) 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ , 即 $\|T_{hw}(s, \epsilon)\|_\infty < \gamma$.

根据定义 9.1, 控制律(9.5)解决了系统(9.1)的一般 H_∞ -ADDPMS. ♣

证明 见 9.5.2 节. ◆

我们用下面的例子来演示上面的结果.

例 9.2 考虑系统(9.1), A, B, E, C_2, D_2 和 D_{22} 如同例 9.1, 但是

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.57)$$

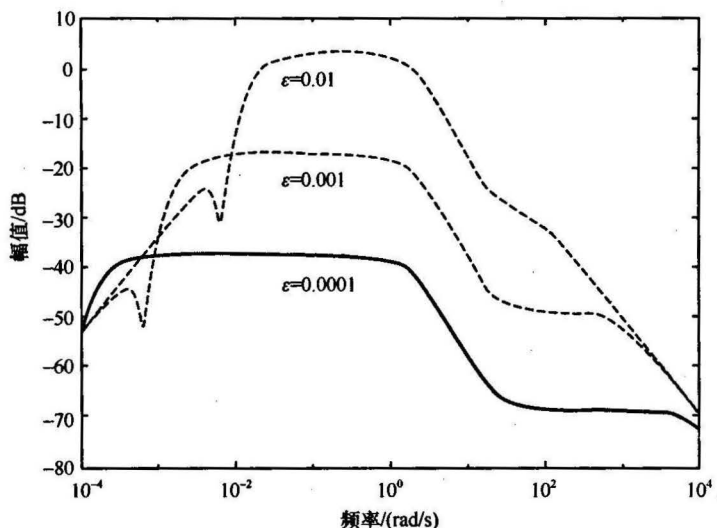
利用文献[74]中的软件工具(也可参见文献[127]和[128]), 可以很容易得到 Σ_Q 的以下性质:① (A, C_1) 可检测;② Σ_Q 在 -1 和 -0.5616 处有两个稳定的不变零点, 在 0 处有一个虚不变零点, 在 3.5616 处有一个不稳定的不变零点;③ Σ_Q 有一个零阶的无限零点、一个一阶的无限零点;④ Σ_Q 左可逆;⑤

$$\mathcal{V}^+(\Sigma_Q) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2808 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \bigcup_{\lambda \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (9.58)$$

不难看出 $\text{Ker}(C_2) \supset \mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \cup \{ \bigcup_{\lambda \in \mathcal{C}} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q) \}$ 和 $\mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P)$. 根据定理 9.1 可得给定系统的 H_∞ -ADDPMS 可解. 采用本节算法可得到如式(9.55)所示的全阶输出反馈控制器, $F_P(\epsilon)$ 由式(9.52)给出, 且

$$K_Q(\epsilon) = \begin{bmatrix} 2.4375 & 1 & 0.1813 \\ 2.4028 & 2 & -0.0808 \\ 0 & 0 & -3.1758 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -8.2462 & -5 \\ -3 & -2 & -1/\epsilon - 3 \end{bmatrix} \quad (9.59)$$

$A + K_Q(\epsilon)C_1$ 的闭环系统特征值被渐近地配置在 $-0.5616, -1, -4.2462, -4.2787, -\epsilon$ 和 $-1/\epsilon$. 闭环传递矩阵 $T_{hw}(s, \epsilon)$ 的最大奇异值如图 9.2 所示, 表明当 ϵ 趋向零时, H_∞ -ADDPMS 是可解的. ♣

图 9.2 T_{hw} 的最大奇异值(全阶输出反馈情况)

9.4.2 降阶输出反馈

本小节采用的是 Chen 等^[129,130]的方法来设计降阶输出反馈控制器。我们将证明只要适当地选择增益矩阵,这样的控制器结构也是可以解系统(9.1)的一般 H_∞ -ADDPMS。首先,不失一般性但从简,我们假设矩阵 C_1 和 D_1 已经具有形式

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad D_1 = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

其中 $k = l - \text{rank}(D_1)$, $D_{1,0}$ 满秩。系统(9.1)可表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} w \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} w \\ h = [C_{2,1} \quad C_{2,2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2 u + D_{22} w \end{cases} \quad (9.61)$$

原来的状态 x 被分为两个部分 x_1 和 x_2 ; y 被分为 y_0 和 y_1 , 其中 $y_1 \equiv x_1$ 。所以在降阶控制器的设计中,我们只需要估计状态变量 x_2 。接下来定义辅助系统 Σ_{QR} 表示由矩阵四元组 (A_R, E_R, C_R, D_R) 构成的系统,其中

$$(A_R, E_R, C_R, D_R) = \left(A_{22}, E_2, \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ E_1 \end{bmatrix} \right) \quad (9.62)$$

下面是对一般 H_∞ -ADDPMS 构造降阶输出反馈控制器的算法步骤。

步骤 9.16(构造增益矩阵 $F_P(\epsilon)$) 定义辅助系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (9.63)$$

然后对上面的系统进行 9.3 节的步骤 9.7~9.12, 得到参数化的增益矩阵 $F(\epsilon)$, 令 $F_P(\epsilon) = F(\epsilon)$.

步骤 9.17(构造增益矩阵 $K_R(\epsilon)$) 定义另一个辅助系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_R^T x + C_R^T u + C_{2,2}^T w \\ y = x \\ h = E_R^T x + D_R^T u + D_{22}^T w \end{cases} \quad (9.64)$$

然后对上面的系统进行 9.3 节的步骤 9.7~9.12, 得到参数化增益矩阵 $F(\epsilon)$, 令 $K_R(\epsilon) = F(\epsilon)^T$.

步骤 9.18(构造降阶控制器 $\Sigma_{RC}(\epsilon)$) 与划分 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 和 $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 相对应,

把 $F_P(\epsilon)$ 和 $K_R(\epsilon)$ 分划为

$$F_P(\epsilon) = [F_{P1}(\epsilon) \quad F_{P2}(\epsilon)] \quad \text{和} \quad K_R(\epsilon) = [K_{R0}(\epsilon) \quad K_{R1}(\epsilon)] \quad (9.65)$$

然后定义

$$G_R(\epsilon) = [-K_{R0}(\epsilon) \quad A_{21} + K_{R1}(\epsilon)A_{11} - (A_R + K_R(\epsilon)C_R)K_{R1}(\epsilon)] \quad (9.66)$$

最后参数化降阶输出反馈控制器为

$$\Sigma_{RC}(\epsilon): \begin{cases} \dot{v} = A_{RC}(\epsilon)v + B_{RC}(\epsilon)y \\ u = C_{RC}(\epsilon)v + D_{RC}(\epsilon)y \end{cases} \quad (9.67)$$

其中

$$\begin{cases} A_{RC}(\epsilon) := A_R + B_2 F_{P2}(\epsilon) + K_R(\epsilon)C_R + K_{R1}(\epsilon)B_1 F_{P2}(\epsilon) \\ B_{RC}(\epsilon) := G_R(\epsilon) + [B_2 + K_{R1}(\epsilon)B_1][0 \quad F_{P1}(\epsilon) - F_{P2}(\epsilon)K_{R1}(\epsilon)] \\ C_{RC}(\epsilon) := F_{P2}(\epsilon) \\ D_{RC}(\epsilon) := [0 \quad F_{P1}(\epsilon) - F_{P2}(\epsilon)K_{R1}(\epsilon)] \end{cases} \quad (9.68)$$

由此完成了降阶输出反馈控制器的构造算法。♣

我们有下面的定理。

定理 9.4 考虑 $D_{22} = 0$ 的系统(9.1), 满足定理 9.1 的所有条件。则由式(9.1)和降阶输出反馈控制器(9.67)所形成的闭环系统具有下面的性质: 对任意 $\gamma > 0$, 存在一个 $\epsilon^* > 0$, 使得对所有 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, 有

(1) 形成的闭环系统是渐近稳定的;

(2) 从 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ , 即 $\|T_{hw}(s, \epsilon)\|_\infty < \gamma$ 。

根据定义 9.1, 控制律(9.67)解决了系统(9.1)的一般 H_∞ -ADDPMS 问题。♣

证明 见 9.5.3 节。 ◆

下面用例子来演示以上结果。

例 9.3 还是考虑例 9.1 和例 9.2 的系统。定理 9.1 的五个条件都是满足的,利用降阶输出反馈控制器是可以解给定系统的 H_∞ -ADDPMS。下面要构造这样的控制器。首先得出变换 T_s 和 T_o 为

$$T_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.69)$$

可以把 C_1 和 D_1 变换到式(9.60)所示的形式,即

$$T_o^{-1}C_1T_s = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & C_{1,02} & & \\ \hline I_k & 0 & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9.70)$$

$$T_o^{-1}D_1 = \left[\begin{array}{c} D_{1,0} \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9.71)$$

而且有

$$T_s^{-1}AT_s = \left[\begin{array}{cc|cccc} A_{11} & A_{12} & & & & \\ \hline A_{21} & A_{22} & & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad (9.72)$$

$$T_s^{-1}B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \quad T_s^{-1}E = \left[\begin{array}{c} E_1 \\ \hline E_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9.73)$$

以及 $A_R = A_{22}$, $E_R = E_2$, 和

$$C_R = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.74)$$

根据本小节算法可得

$$F_P(\epsilon)T_s = [F_{P1}(\epsilon) \parallel F_{P2}(\epsilon)] \\ = \begin{bmatrix} -6 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1/\epsilon - 6 & \vdots & -\epsilon^2/3 - 1 & 2\epsilon^2/9 - \epsilon - 2 & 2\epsilon/3 - \epsilon^2/27 - 4 & -4 \end{bmatrix} \quad (9.75)$$

和

$$K_R(\epsilon) = [K_{R0}(\epsilon) \parallel K_{R1}(\epsilon)] = \begin{bmatrix} 1.2000 + 0.1219\epsilon & 0 & -0.6663 + 0.4025\epsilon \\ 0.8187 - 0.0609\epsilon & 0 & -0.8534 - 0.2012\epsilon \\ -0.1219\epsilon & 0 & -0.4025\epsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.76)$$

这就把 $A_R + K_R(\epsilon)C_R$ 的特征值配置在 -0.5616 、 -1 、 -3.8303 和 $-\epsilon$ 。我们也得到了形如式(9.67)所示的降阶输出反馈控制器,所有的子矩阵都如式(9.70)~式(9.76)所定义,而 $B_{RC}(\epsilon)$ 和 $D_{RC}(\epsilon)$ 修正为

$$B_{RC}(\epsilon) = G_R(\epsilon)T_o^{-1} + [B_2 + K_{R1}(\epsilon)B_1][0 \ F_{P1}(\epsilon) - F_{P2}(\epsilon)K_{R1}(\epsilon)]T_o^{-1} \quad (9.77)$$

和

$$D_{RC}(\epsilon) = [0 \ F_{P1}(\epsilon) - F_{P2}(\epsilon)K_{R1}(\epsilon)]T_o^{-1} \quad (9.78)$$

闭环传递矩阵 $T_{hw}(s, \epsilon)$ 的最大奇异值如图 9.3 所示,表明当 ϵ 趋于零时可解系统的 H_∞ -ADDPMS。 ♣

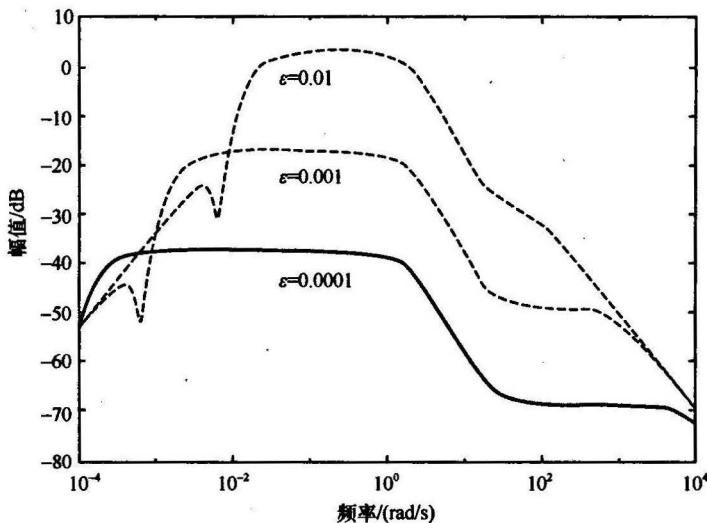


图 9.3 T_{hw} 的最大奇异值(降阶输出反馈情况)

9.5 主要结果的证明

本节是本章所有主要结果的证明。

9.5.1 定理 9.2 的证明

反馈控制律为 $u = F(\epsilon)x$, 在特殊坐标基下的闭环系统可表示为

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + B_{0a}^- h_0 + L_{ad}^- h_d + L_{ab}^- h_b + E_a^- w \quad (9.79)$$

$$\dot{x}_a^0 = A_{aa}^0 x_a^0 + B_{0a}^0 h_0 + L_{ad}^0 h_d + L_{ab}^0 h_b + E_a^0 w \quad (9.80)$$

$$\dot{x}_{ab}^+ = A_{ab}^{+c} x_{ab}^+ - B_{0ab}^+ F_{a0}^0(\epsilon)(x_a^0 + T_a^0 x_{ab}^+) + L_{abd}^+ [F_{ad}^+, F_{bd}^+] x_{ab}^+ + L_{abd}^+ h_d + E_{ab}^+ w \quad (9.81)$$

$$h_b = [0_{m_b \times n_a^+}, C_b] x_{ab}^+ \quad (9.82)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc}^c x_c + L_{c0} h_0 + L_{cb} h_b + L_{cd} h_d + E_c w \quad (9.83)$$

$$h_0 = -[F_{a0}^+, F_{b0}^+] x_{ab}^+ - F_{a0}^0(\epsilon)(x_a^0 + T_a^0 x_{ab}^+) \quad (9.84)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & A_{q_i} x_i + L_{i0} h_0 + L_{id} h_d - \frac{1}{\epsilon^{q_i}} B_{q_i} [F_{adi}^+ F_{i_i} x_a^+ + F_{adi} F_{i_i} x_b \\ & + F_{adi}^0(\epsilon) F_{i_i} (x_a^0 + T_a^0 x_{ab}^+) + F_i S_i(\epsilon) x_i] + E_i w \end{aligned} \quad (9.85)$$

$$h_i = C_{q_i} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_d \quad (9.86)$$

其中

$$x_{ab}^+ = \begin{bmatrix} x_a^+ \\ x_b \end{bmatrix} \quad (9.87)$$

B_{0ab}^+ 和 L_{abd}^+ 如同状态反馈设计算法的步骤 9.10.1 所定义。我们也利用了注 9.2 的条件(2), 即 $D_{22} = 0$, 而 $E_a^-, E_a^0, E_{ab}^+, E_b, E_c$ 和 $E_i (i = 1, 2, \dots, m_d)$ 的定义如下:

$$\Gamma_{sp}^{-1} E = [(E_a^-)^T \quad (E_a^0)^T \quad (E_{ab}^+)^T \quad E_c^T \quad E_1^T \quad E_2^T \quad \dots \quad E_{m_d}^T]^T \quad (9.88)$$

注 9.2 的条件(3)表明

$$E_{ab}^+ = 0 \quad (9.89)$$

和

$$\text{Im}(E_a^0) \subset \mathcal{S}(A_{aa}^0) := \bigcap_{w \in \lambda(A_{aa}^0)} \text{Im}\{wI - A_{aa}^0\} \quad (9.90)$$

为完成证明, 对闭环系统(9.79)~(9.86)进行两个状态变换。第一个状态变换为

$$\bar{x}_{ab} = \Gamma_{ab}^{-1} x_{ab}, \quad \bar{x}_c = x_c \quad (9.91)$$

对 $i = 1, 2, \dots, m_d$, 有

$$\bar{x}_{i1} = x_{i1} + F_{adi}^+ x_a^+ + F_{adi} x_b + F_{adi}^0(\epsilon)(x_a^0 + T_a^0 x_{ab}^+) \quad (9.92)$$

对 $j = 2, 3, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, m_d$, 有

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} \tag{9.93}$$

其中

$$x_{ab} = \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \\ x_{ab}^+ \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \bar{x}_{ab} = \begin{bmatrix} \bar{x}_a^- \\ \bar{x}_{ab}^+ \\ \bar{x}_a^0 \end{bmatrix} \tag{9.94}$$

对于新的状态变量(9.91)~(9.93), 闭环系统成为

$$\dot{\bar{x}}_a^- = A_{aa}^- \bar{x}_a^- + A_{aab}^- \bar{x}_{ab}^+ - [B_{0a}^-, L_{ad}^-] F_a^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + L_{ad}^- \bar{h}_d + E_a^- w \tag{9.95}$$

$$\dot{\bar{x}}_{ab}^+ = A_{aa}^+ \bar{x}_{ab}^+ - [B_{0ab}^+, L_{ad}^+] F_a^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + L_{abd}^+ \bar{h}_d \tag{9.96}$$

$$\dot{\bar{x}}_a^0 = [A_{aa}^0 - B_a^0 F_a^0(\epsilon)] \bar{x}_a^0 + (L_{ad}^0 + T_a^0 L_{abd}^+) \bar{h}_d + E_a^0 w \tag{9.97}$$

$$\dot{\bar{x}}_c = A_{cc}^c \bar{x}_c + (L_{ab}[0, C_b] - [L_{c0}, L_{cd}] F_{ab}^+) \bar{x}_{ab}^+ - [L_{c0}, L_{cd}] F_a^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + L_{cd} \bar{h}_d + E_c w \tag{9.98}$$

$$h_0 = - [F_{a0}^+, F_{b0}^+] \bar{x}_{ab}^+ - F_{a0}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 \tag{9.99}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i &= A_{q_i} \bar{x}_i - \frac{1}{\epsilon^{q_i}} B_{q_i} F_i S_i(\epsilon) \bar{x}_i + L_{iab}^+(\epsilon) \bar{x}_{ab}^+ + L_{ia}^{01}(\epsilon) F_a^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 \\ &\quad + L_{ia}^{02}(\epsilon) F_a^0(\epsilon) A_{aa}^0 \bar{x}_a^0 + \bar{L}_{id}(\epsilon) \bar{h}_d + \bar{E}_i(\epsilon) w \end{aligned} \tag{9.100}$$

$$\bar{h}_i = h_i + [F_{adi}^+, F_{bdi}^+] \bar{x}_{ab}^+ + F_{adi}^0 \bar{x}_a^0 = C_{q_i} \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_d \tag{9.101}$$

$$\bar{h}_d = [\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_{m_d}]^T \tag{9.102}$$

其中矩阵 $A_{aab}^-, A_{aab}^0, B_a^0$ 和 L_{abd}^+ 如状态反馈律设计的步骤 9.10.1 所定义, $L_{iab}^+(\epsilon)$ 、 $L_{ia}^{01}(\epsilon)$ 、 $L_{ia}^{02}(\epsilon)$ 、 $\bar{L}_{id}(\epsilon)$ 和 $\bar{E}_i(\epsilon)$ 显然由式(9.31)所定义, 对一些和 ϵ 无关的非负常数 $l_{iab}^+, l_{ia}^{01}, l_{ia}^{02}, \bar{l}_{id}$ 和 \bar{e}_i 满足

$$|L_{iab}^+(\epsilon)| \leq l_{iab}^+, \quad |L_{ia}^{01}(\epsilon)| \leq l_{ia}^{01}, \quad |L_{ia}^{02}(\epsilon)| \leq l_{ia}^{02} \tag{9.103}$$

和

$$|\bar{L}_{id}(\epsilon)| \leq \bar{l}_{id}, \quad |\bar{E}_i(\epsilon)| \leq \bar{e}_i, \quad \epsilon \in (0, 1] \tag{9.104}$$

我们现在构造第二个变换, 我们需要下面的来自文献[126]的预备结果。

引理 9.1 三元组 $(A_i, B_i, F_i(\epsilon))$ 由状态反馈算法中的步骤 9.10.2 和 9.10.3 给出, 则存在非奇异的状态变换矩阵 $Q_i(\epsilon) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, 使得

(1) $Q_i(\epsilon)$ 把 $A_i - B_i F_i(\epsilon)$ 变换到实 Jordan 型, 即

$$\begin{aligned} Q_i^{-1}(\epsilon) [A_i - B_i F_i(\epsilon)] Q_i(\epsilon) &= J_i(\epsilon) \\ &= \text{blkdiag}\{J_{i0}(\epsilon), J_{i1}(\epsilon), \dots, J_{ip_i}(\epsilon)\} \end{aligned} \tag{9.105}$$

其中

$$J_{i0}(\epsilon) = \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -\epsilon & 1 & \\ & & & & -\epsilon \end{bmatrix}_{r_{i0} \times r_{i0}} \tag{9.106}$$

对每个 $j = 1, 2, \dots, p_i$, 有

$$J_{ij}(\epsilon) = \begin{bmatrix} J_{ij}^*(\epsilon) & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & J_{ij}^*(\epsilon) & I_2 \\ & & & J_{ij}^*(\epsilon) \end{bmatrix}_{2r_{ij} \times 2r_{ij}}, \quad J_{ij}^*(\epsilon) = \begin{bmatrix} -\epsilon & \beta_{ij} \\ -\beta_{ij} & -\epsilon \end{bmatrix} \quad (9.107)$$

对所有的 $j = 1, 2, \dots, p_i$, 有 $\beta_{ij} > 0$, 对 $j \neq k$ 有 $\beta_{ij} \neq \beta_{ik}$ 。

(2) $|Q_i(\epsilon)|$ 和 $|Q_i^{-1}(\epsilon)|$ 都是有界的, 即对一些和 ϵ 无关的 θ_i , 有

$$|Q_i(\epsilon)| \leq \theta_i, \quad |Q_i^{-1}(\epsilon)| \leq \theta_i, \quad \epsilon \in (0, 1] \quad (9.108)$$

(3) 如果 $E_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q}$ 使得

$$\text{Im}(E_i) \subset \bigcap_{w \in \lambda(A_i)} \text{Im}(wI - A_i) \quad (9.109)$$

则存在一个和 ϵ 无关的 $\delta_i \geq 0$, 使得

$$|Q_i^{-1}(\epsilon)E_i| \leq \delta_i, \quad \epsilon \in (0, 1] \quad (9.110)$$

如果根据 $J_i(\epsilon)$ 把 $Q_i^{-1}(\epsilon)E_i$ 划分为

$$Q_i^{-1}(\epsilon)E_i = \begin{bmatrix} E_{i0}(\epsilon) \\ E_{i1}(\epsilon) \\ \vdots \\ E_{ip_i}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad E_{i0}(\epsilon) = \begin{bmatrix} E_{i01}(\epsilon) \\ E_{i02}(\epsilon) \\ \vdots \\ E_{i0r_{i0}}(\epsilon) \end{bmatrix}_{r_{i0} \times 1} \quad (9.111)$$

和

$$E_{ij}(\epsilon) = \begin{bmatrix} E_{ij1}(\epsilon) \\ E_{ij2}(\epsilon) \\ \vdots \\ E_{ijr_{ij}}(\epsilon) \end{bmatrix}_{2r_{ij} \times 1} \quad (9.112)$$

则存在和 ϵ 无关的 $\beta_i \geq 0$, 使得对每个 $j = 0, 1, \dots, p_i$, 有

$$|E_{ijr_{ij}}(\epsilon)| \leq \beta_i \epsilon \quad (9.113)$$

(4) 如果定义一个缩放矩阵 $S_{ai}(\epsilon)$ 为

$$S_{ai}(\epsilon) = \text{blkdiag}\{S_{ai0}(\epsilon), S_{ai1}(\epsilon), \dots, S_{aip_i}(\epsilon)\} \quad (9.114)$$

其中

$$S_{ai0}(\epsilon) = \text{diag}\{\epsilon^{r_{i0}^{-1}}, \epsilon^{r_{i0}^{-2}}, \dots, \epsilon, 1\} \quad (9.115)$$

对 $j = 1, 2, \dots, p_i$, 有

$$S_{aij}(\epsilon) = \text{blkdiag}\{\epsilon^{r_{ij}^{-1}}I_2, \epsilon^{r_{ij}^{-2}}I_2, \dots, \epsilon I_2, I_2\} \quad (9.116)$$

则存在和 ϵ 无关的 $\kappa_i \geq 0$, 使得

$$|F_i(\epsilon)Q_i(\epsilon)S_{ai}^{-1}(\epsilon)| \leq \kappa_i \epsilon, \quad |F_i(\epsilon)A_i S_{ai}^{-1}(\epsilon)| \leq \kappa_i \epsilon \quad (9.117)$$



证明 这个结果是文献[126]和[86]中的式(2.13)的综合。 ◆

引理 9.2 令

$$\tilde{J}_i(\epsilon) = \text{blkdiag}\{\tilde{J}_{i0}, \tilde{J}_{i1}(\epsilon), \dots, \tilde{J}_{ip_i}(\epsilon)\} \quad (9.118)$$

其中

$$\tilde{J}_{i0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}_{r_{i0} \times r_{i0}} \quad (9.119)$$

对每个 $j = 1, 2, \dots, p_i$, 有

$$J_{ij}(\epsilon) = \begin{bmatrix} J_{ij}^*(\epsilon) & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & J_{ij}^*(\epsilon) & I_2 \\ & & & J_{ij}^*(\epsilon) \end{bmatrix}_{2r_{ij} \times 2r_{ij}}, \quad J_{ij}^*(\epsilon) = \begin{bmatrix} -1 & \beta_{ij}/\epsilon \\ -\beta_{ij}/\epsilon & -1 \end{bmatrix} \quad (9.120)$$

对所有的 $j = 1, 2, \dots, p_i$ 有 $\beta_{ij} > 0$ 和对 $j \neq k$ 有 $\beta_j \neq \beta_k$. Lyapunov 方程

$$\tilde{J}_i(\epsilon)^T \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{J}_i(\epsilon) = -I \quad (9.121)$$

的唯一正定解 \tilde{P}_i 和 ϵ 无关。 ♣

证明 见文献[126]。 ◆

现在对闭环系统定义下面的第二个状态变换

$$\tilde{x}_a^- = \bar{x}_a^-, \quad \tilde{x}_{ab}^+ = \bar{x}_{ab}^+ \quad (9.122)$$

$$\tilde{x}_a^0 = [(\tilde{x}_{a1}^0)^T, (\tilde{x}_{a2}^0)^T, \dots, (\tilde{x}_{am}^0)^T]^T = S_a(\epsilon) Q^{-1}(\epsilon) (\Gamma_{aa}^0)^{-1} \bar{x}_a^0 \quad (9.123)$$

其中

$$S_a(\epsilon) = \text{blkdiag}\{S_{a1}(\epsilon), S_{a2}(\epsilon), \dots, S_{am}(\epsilon)\}$$

$$Q(\epsilon) = \text{blkdiag}\{Q_1(\epsilon), Q_2(\epsilon), \dots, Q_l(\epsilon)\}$$

和

$$\tilde{x}_c = \epsilon \bar{x}_c \quad (9.124)$$

$$\tilde{x}_d = [\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T, \dots, \tilde{x}_{m_d}^T]^T, \quad \tilde{x}_i^T = S_i(\epsilon) \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_d \quad (9.125)$$

在这些情况下闭环系统成为

$$\dot{\tilde{x}}_a^- = A_{aa}^- \tilde{x}_a^- + A_{aab}^-(\epsilon) \tilde{x}_{ab}^+ + A_{aa}^0(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + L_{ad}^- \tilde{h}_d + E_a^- w \quad (9.126)$$

$$\dot{\tilde{x}}_{ab}^+ = A_{ab}^+ \tilde{x}_{ab}^+ + A_{aba}^+(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + L_{abd}^+ \tilde{h}_d \quad (9.127)$$

$$\dot{\tilde{x}}_a^0 = \tilde{J}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + \tilde{B}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + \tilde{L}_{ad}^0 \tilde{h}_d + \tilde{E}_a^0(\epsilon) w \quad (9.128)$$

$$\dot{\tilde{x}}_c = A_{cc}^c \tilde{x}_c + \epsilon [A_{cab}^+ \tilde{x}_{ab}^+ + A_{ca}^0(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + L_{cd} \tilde{h}_d + E_c w] \quad (9.129)$$

$$h_0 = -[F_{a0}^+, F_{b0}^+] \tilde{x}_{ab}^+ - \tilde{F}_{a0}^0(\epsilon) \tilde{x}_a^0 \quad (9.130)$$

$$\epsilon \dot{\tilde{x}}_i = (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) \tilde{x}_i + \tilde{e} \tilde{L}_{iab}^+(\epsilon) \tilde{x}_{ab}^+ + \tilde{e} \tilde{L}_{ia}^0(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + \tilde{e} \tilde{L}_{id}(\epsilon) \tilde{h}_d + \tilde{e} \tilde{E}_i(\epsilon) w \quad (9.131)$$

$$\tilde{h}_i = \bar{h}_i = h_i + [F_{adi}^+, F_{bdi}] \tilde{x}_{ab}^+ + \tilde{F}_{adi}^0(\epsilon) \tilde{x}_a^0 = C_{q_i} \tilde{x}_i \quad (9.132)$$

和

$$\tilde{h}_d = [\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{m_d}]^T \quad (9.133)$$

其中

$$A_{aa}^{-0}(\epsilon) = -[B_{0a}^+, L_{ad}^-] F_a^0(\epsilon) \Gamma_{aa}^0 Q(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \quad (9.134)$$

$$A_{aba}^{+0}(\epsilon) = -[B_{0ab}^+, L_{abd}^+] F_a^0(\epsilon) \Gamma_{aa}^0 Q(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \quad (9.135)$$

$$\tilde{J}(\epsilon) = \text{blkdiag}\{\epsilon \tilde{J}_1(\epsilon), \epsilon \tilde{J}_2(\epsilon), \dots, \epsilon \tilde{J}_l(\epsilon)\} \quad (9.136)$$

$$\tilde{B}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_{12}(\epsilon) & \tilde{B}_{13}(\epsilon) & \dots & \tilde{B}_{1l}(\epsilon) \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{23}(\epsilon) & \dots & \tilde{B}_{2l}(\epsilon) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9.137)$$

对于 $j = 1, 2, \dots, l$ 和 $k = j+1, j+2, \dots, l$, 有

$$\tilde{B}_{jk}(\epsilon) = S_{a_j}(\epsilon) Q_j^{-1}(\epsilon) B_{jk} F_k(\epsilon) Q_k(\epsilon) S_{a_k}^{-1}(\epsilon) \quad (9.138)$$

和

$$\tilde{L}_{ad}^0(\epsilon) = S_a(\epsilon) Q^{-1}(\epsilon) (\Gamma_{aa}^0)^{-1} (L_{ad}^0 + T_a^0 L_{abd}^+) \quad (9.139)$$

$$\tilde{E}_a^0(\epsilon) = S_a(\epsilon) Q^{-1}(\epsilon) (\Gamma_{aa}^0)^{-1} E_a^0 = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{a1}^0(\epsilon) \\ \tilde{E}_{a2}^0(\epsilon) \\ \vdots \\ \tilde{E}_{ad}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (9.140)$$

$$A_{cab}^+ = L_{cb}[0, C_b] - [L_{ca}, L_{cd}] F_{ab}^+ \quad (9.141)$$

$$A_{ca}^0(\epsilon) = -[L_{ca}, L_{cd}] F_a^0(\epsilon) \Gamma_{aa}^0 Q(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \quad (9.142)$$

$$\tilde{F}_{a0}^0(\epsilon) = F_{a0}^0(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) Q(\epsilon) \Gamma_{aa}^0 \quad (9.143)$$

$$\tilde{L}_{ia}^0(\epsilon) = S_i(\epsilon) [L_{ia}^0(\epsilon) F_a^0(\epsilon) + L_{ia}^{02}(\epsilon) F_a^0(\epsilon) A_{aa}^0] \Gamma_{aa}^0 Q(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \quad (9.144)$$

$$\tilde{L}_{id}(\epsilon) = S_i(\epsilon) \tilde{L}_{id}(\epsilon), \quad \tilde{E}_i(\epsilon) = S_i(\epsilon) \tilde{E}_i(\epsilon) \quad (9.145)$$

$$\tilde{L}_{iab}^+(\epsilon) = S_i(\epsilon) L_{iab}^+(\epsilon), \quad \tilde{F}_{adi}^0(\epsilon) = F_{adi}^0(\epsilon) \Gamma_{aa}^0 Q(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \quad (9.146)$$

其中对 $i = 1, 2, \dots, l$, $\tilde{J}_i(\epsilon)$ 如引理 9.2 所定义。根据式 (9.31)、式 (9.103)、式 (9.104) 和引理 9.1, 对所有的 $\epsilon \in (0, 1]$, 有

$$|A_{aab}^-(\epsilon)| \leq a_{aab}^-, \quad |\tilde{L}_{ad}^0(\epsilon)| \leq \tilde{l}_{ad}^0, \quad |A_{cab}^+| \leq a_{cab}^+ \quad (9.147)$$

$$|A_{aa}^{-0}(\epsilon)| \leq a_{aa}^{-0} \epsilon, \quad |A_{aba}^{+0}(\epsilon)| \leq a_{aba}^{+0} \epsilon, \quad |A_{ca}^0(\epsilon)| \leq a_{ca}^0 \epsilon, \quad |\tilde{F}_{a0}^0(\epsilon)| \leq \tilde{f}_{a0}^0 \epsilon \quad (9.148)$$

对 $i = 1, 2, \dots, m_d$, 有

$$|\tilde{L}_{iab}^+(\epsilon)| \leq \tilde{l}_{ab}^+, \quad |\tilde{L}_{ia}^0(\epsilon)| \leq \tilde{l}_{ia}^0 \epsilon \quad (9.149)$$

和

$$|\tilde{L}_{id}(\epsilon)| \leq \bar{l}_d, \quad |\tilde{F}_{ad}^0(\epsilon)| \leq \tilde{f}_{ad}^0 \epsilon, \quad |\tilde{E}_i(\epsilon)| \leq \bar{e} \quad (9.150)$$

对 $i = 1, 2, \dots, l$, 有

$$|\tilde{E}_{ai}^0(\epsilon)| \leq \bar{e}_a^0 \epsilon \quad (9.151)$$

最后对 $j = 1, 2, \dots, l$ 和 $k = j + 1, j + 2, \dots, l$, 有

$$|\tilde{B}_{jk}(\epsilon)| \leq \bar{b}_{jk} \epsilon \quad (9.152)$$

其中 $a_{aab}^-, \bar{l}_{ad}^0, a_{cab}^+, a_{aa}^-, a_{aba}^+, \bar{e}_a^0, a_{ca}^0, \tilde{f}_{a0}^0, \bar{l}_{ab}^+, \bar{l}_a^0, \bar{l}_d, \tilde{f}_{ad}^0, \bar{e}$ 和 \bar{b}_{jk} 是一些和 ϵ 无关的正常数。

下面对闭环系统(9.126)~(9.133)构造一个 Lyapunov 函数。我们通过子系统的 Lyapunov 函数复合来实现这一点。对于子系统 \bar{x}_a , 选择 Lyapunov 函数

$$V_a^-(\bar{x}_a) = (\bar{x}_a)^T P_a^- \bar{x}_a \quad (9.153)$$

其中 $P_a^- > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{aa}^-)^T P_a^- + P_a^- A_{aa}^- = -I \quad (9.154)$$

的唯一解。对于子系统 \bar{x}_{ab}^+ , 选择 Lyapunov 函数

$$V_{ab}^+(\bar{x}_{ab}^+) = (\bar{x}_{ab}^+)^T P_{ab}^+ \bar{x}_{ab}^+ \quad (9.155)$$

其中 $P_{ab}^+ > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{ab}^+)^T P_{ab}^+ + P_{ab}^+ A_{ab}^+ = -I \quad (9.156)$$

的唯一解。 P_a^- 和 P_{ab}^+ 的存在性由 A_{aa}^- 和 A_{ab}^+ 的渐近稳定性得到保证。对于子系统

$$\bar{x}_a^0 = [(\bar{x}_{a1}^0)^T, (\bar{x}_{a2}^0)^T, \dots, (\bar{x}_{ad}^0)^T]^T \quad (9.157)$$

选择 Lyapunov 函数

$$V_a^0(\bar{x}_a^0) = \sum_{i=1}^l \frac{(\alpha_a^0)^{i-1}}{\epsilon} (\bar{x}_a^0)^T P_{ai}^0 \bar{x}_a^0 \quad (9.158)$$

其中 α_a^0 是一个正标量, 后面会确定它的数值, 每个 P_{ai}^0 是 Lyapunov 方程

$$\tilde{J}_i(\epsilon)^T P_{ai}^0 + P_{ai}^0 \tilde{J}_i(\epsilon) = -I \quad (9.159)$$

的唯一解, 根据引理 9.2 可知它与 ϵ 无关。类似的, 对于子系统 \bar{x}_c , 选择 Lyapunov 函数

$$V_c(\bar{x}_c) = \bar{x}_c^T P_c \bar{x}_c \quad (9.160)$$

其中 $P_c > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{cc}^c)^T P_c + P_c (A_{cc}^c) = -I \quad (9.161)$$

的唯一解。 P_c 的存在性依然由 A_{cc}^c 的渐近稳定性来保证。最后对子系统 \bar{x}_d 选择 Lyapunov 函数

$$V_d(\bar{x}_d) = \sum_{i=1}^{m_d} \bar{x}_i^T P_i \bar{x}_i \quad (9.162)$$

其中 P_i 是 Lyapunov 方程

$$(A_{qi} - B_{qi} F_i)^T P_i + P_i (A_{qi} - B_{qi} F_i) = -I \quad (9.163)$$

的唯一解。同样的, $A_{q_i} - B_{q_i}F$ 的渐近稳定性保证了 P_i 的存在性。

现在对闭环系统(9.126)~(9.133)构造一个 Lyapunov 函数

$$V(\bar{x}_a, \bar{x}_{ab}^+, \bar{x}_a^0, \bar{x}_c, \bar{x}_d) = V_a^-(\bar{x}_a^-) + \alpha_{ab}^+ V_{ab}^+(\bar{x}_{ab}^+) + V_a^0(\bar{x}_a^0) + V_c(\bar{x}_c) + \alpha_d V_d(\bar{x}_d) \quad (9.164)$$

其中 $\alpha_{ab}^+ = 2|P_a^-|^2(\alpha_{ab}^-)^2$, 而 α_d 的值待确定。

首先考虑 $V_a^0(\bar{x}_a^0)$ 沿着子系统 \bar{x}_a^0 轨迹的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_a^0(\bar{x}_a^0) &= \sum_{i=1}^l \left[-(\alpha_a^0)^{i-1} (\bar{x}_{ai}^0)^T \bar{x}_{ai}^0 + 2 \sum_{j=i+1}^l \frac{(\alpha_a^0)^{i-1}}{\epsilon} (\bar{x}_{ai}^0)^T P_{ai}^0 \tilde{B}_{ij}(\epsilon) \bar{x}_{aj}^0 \right] \\ &\quad + 2 \sum_{j=i+1}^l \frac{(\alpha_a^0)^{i-1}}{\epsilon} [(\bar{x}_{ai}^0)^T P_{ai}^0 \tilde{L}_{id}^0(\epsilon) \bar{h}_d + (\bar{x}_{ai}^0)^T P_{ai}^0 \tilde{E}_a^0(\epsilon) w] \end{aligned} \quad (9.165)$$

利用式(9.152), 不难验证对和 ϵ 无关的非负常数 α_1 和 α_2 , 存在一个正的 $\alpha_a^0 > 0$, 使得

$$\dot{V}_a^0(\bar{x}_a^0) \leq -\frac{3}{4} |\bar{x}_a^0|^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon} |\bar{x}_a^0| \cdot |\bar{h}_d| + \alpha_2 |w|^2 \quad (9.165)$$

根据式(9.166), V 在闭环系统(9.126)~(9.133)状态轨迹上的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\bar{x}_a^-)^T \bar{x}_a^- + 2(\bar{x}_a^-)^T P_a^- A_{aab}^-(\epsilon) \bar{x}_{ab}^+ + 2(\bar{x}_a^-)^T P_a^- A_{aa}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 \\ &\quad + 2(\bar{x}_a^-)^T P_a^- L_{ad}^- \bar{h}_d + 2(\bar{x}_a^-)^T P_a^- E_a^- w - \alpha_{ab}^+ (\bar{x}_{ab}^+)^T \bar{x}_{ab}^+ \\ &\quad + 2\alpha_{ab}^+ (\bar{x}_{ab}^+)^T P_{ab}^+ A_{aba}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + 2\alpha_{ab}^+ (\bar{x}_{ab}^+)^T P_{ab}^+ L_{abd}^+ \bar{h}_d \\ &\quad - \frac{3}{4} |\bar{x}_a^0|^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon} |\bar{x}_a^0| \cdot |\bar{h}_d| + \alpha_2 |w|^2 - \bar{x}_c^T \bar{x}_c \\ &\quad + 2\epsilon \bar{x}_c^T P_c [A_{cab}^+ \bar{x}_{ab}^+ + A_{ca}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + L_{cd} \bar{h}_d + E_c w] \\ &\quad + \alpha_d \sum_{i=1}^{m_d} \left[-\frac{1}{\epsilon} \bar{x}_i^T \bar{x}_i + 2\bar{x}_i^T P_i \tilde{L}_{iab}^+ \bar{x}_{ab}^+ \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{x}_i^T P_i \tilde{L}_{ia}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + 2\bar{x}_i^T P_i \tilde{L}_{id}(\epsilon) \bar{h}_d + 2\bar{x}_i^T P_i \tilde{E}_i(\epsilon) w \right] \end{aligned} \quad (9.167)$$

利用式(9.147)~式(9.151)的关系, 注意到式(9.164)的 α_{ab}^+ 定义, 很容易验证存在一个 $\alpha_d > 0$ 和一个 $\epsilon_1^* \in (0, 1]$, 使得对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon_1^*]$, 对和 ϵ 无关的常数 α_3 , 有

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} |\bar{x}_a^-|^2 - \frac{1}{2} |\bar{x}_{ab}^+|^2 - \frac{1}{2} |\bar{x}_a^0|^2 - \frac{1}{2\epsilon} |\bar{x}_d|^2 + \alpha_3 |w|^2 \quad (9.168)$$

根据式(9.168)可得在没有扰动 w 的情况下, 闭环系统是渐近稳定的。还需要证明对任意的 $\gamma > 0$, 存在一个 $\epsilon^* \in (0, \epsilon_1^*)$, 使得对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, 有

$$\|h\|_2 \leq \gamma \|w\|_2. \quad (9.169)$$

为达到这样的目的, 对式(9.168)的两边从 0 到 ∞ 进行积分。注意到 $V \geq 0$ 和 $t = 0$ 时 $V(t) = 0$, 有

$$\|\bar{h}_d\|_2 \leq (\sqrt{2\alpha_3\epsilon}) \|w\|_2 \quad (9.170)$$

应用于式(9.166)可得

$$\|\tilde{x}_a^0\|_2 \leq \left(\sqrt{\frac{2\alpha_1^2\alpha_3}{\epsilon} + \alpha_2} \right) \|w\|_2 \quad (9.171)$$

把 \tilde{h}_d 当成动态 \tilde{x}_{ab}^+ 的扰动可得对某些和 ϵ 无关的正常数 α_4 , 有

$$\|\tilde{x}_{ab}^+\|_2 \leq (\alpha_4 \sqrt{\epsilon}) \|w\|_2 \quad (9.172)$$

最后,已知

$$h = \Gamma_{op} \begin{bmatrix} h_0 \\ \tilde{h}_d - F_{ab}^+ \tilde{x}_{ab}^+ - \tilde{F}_{ad}^0(\epsilon) \tilde{x}_a^0 \\ h_b \end{bmatrix} \quad (9.173)$$

其中

$$\tilde{F}_{ad}^0(\epsilon) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{ad1}^0(\epsilon) \\ \tilde{F}_{ad2}^0(\epsilon) \\ \vdots \\ \tilde{F}_{adm_d}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (9.174)$$

其中每个 $\tilde{F}_{ad}^0(\epsilon)$ 满足式(9.149)和式(9.150),对某些和 ϵ 无关的正常数,有

$$\|h\|_2 \leq |\Gamma_{op}| (\sqrt{2\alpha_3\epsilon} + \alpha_4 |F_{ab}^+| \sqrt{\epsilon} + \alpha_5 \sqrt{2\alpha_1^2\alpha_3\epsilon + \alpha_2\epsilon^2}) \|w\|_2 \quad (9.175)$$

为完成证明,我们选择 $\epsilon^* \in (0, \epsilon_1^*)$, 使得

$$|\Gamma_{op}| (\sqrt{2\alpha_3\epsilon} + \alpha_4 |F_{ab}^+| \sqrt{\epsilon} + \alpha_5 \sqrt{2\alpha_1^2\alpha_3\epsilon + \alpha_2\epsilon^2}) \leq \gamma \quad (9.176)$$

为利用测量反馈结果的证明,从闭环系统方程(9.126)~(9.133)很容易验证从 $E_a^0 w$ 到 h 的传递函数为

$$T_{\infty}^0(s) = T_{\infty}(s, \epsilon) [sI - A_m^0 + B_m^0 F_m^0(\epsilon)]^{-1} \quad (9.177)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $T_{\infty}(s, \epsilon) \rightarrow 0$ 对 s 逐点成立。 ◆◆

9.5.2 定理 9.3 的证明

由给定系统(9.1)和全阶输出反馈控制器(9.55)所形成的闭环系统的稳定性是显而易见的。闭环极点为 $\lambda\{A + BF_p(\epsilon)\}$, 在定理 9.2 中已证明对充分小的 ϵ , 极点位于 C^- 。对充分小的 ϵ , 也可对偶地证明 $\lambda\{A + K_Q(\epsilon)C_1\}$ 位于 C^- 。我们在后面要证明全阶输出反馈控制器可实现系统(9.1)的 H_∞ -ADDPMS, 它满足定理 9.1 的所有条件。不失一般性但为了简便,后面一直假设四元组 (A, B, C_2, D_2) 的子系统 Σ_p 已经被转换到定理 4.5 的特殊坐标基。特别有

$$A = B_0 C_{2,0} + \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & 0 & L_{ad}^- C_d \\ 0 & A_{aa}^0 & 0 & L_{ab}^0 C_b & 0 & L_{ad}^0 C_d \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & 0 & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd} C_d \\ B_c E_{ca}^- & B_c E_{ca}^0 & B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d E_{da}^- & B_d E_{da}^0 & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix} \quad (9.178)$$

$$:= B_0 C_{2,0} + \tilde{A}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^0 & 0 & 0 \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0a}^0 \\ B_{0a}^+ \\ B_{0b} \\ B_{0c} \\ B_{0d} \end{bmatrix} \quad (9.179)$$

$$C_{2,0} = [C_{0a}^- \quad C_{0a}^0 \quad C_{0a}^+ \quad C_{0b} \quad C_{0c} \quad C_{0d}] \quad (9.180)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^0 & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.181)$$

$$\mathcal{S}^+(\Sigma_P) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right\} \quad (9.182)$$

不难发现定理 9.1 的条件(4)表明

$$E = \begin{bmatrix} E_a \\ E_a^0 \\ 0 \\ 0 \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} \quad (9.183)$$

下面对任意的 $\zeta \in \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q), \lambda \in \mathbb{C}^0$, 把 ζ 划分为

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ \zeta_a^0 \\ \zeta_a^+ \\ \zeta_b \\ \zeta_c \\ \zeta_d \end{bmatrix} \quad (9.184)$$

则从定理 9.1 的条件(5)可推出 $C_2 \zeta = 0$, 或等价的

$$C_{2,0} \zeta = 0, \quad C_b \zeta_b = 0 \quad \text{和} \quad C_d \zeta_d = 0 \quad (9.185)$$

从定义 3.13 可得对一些适当矢量 η , 有

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & E \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = 0 \quad (9.186)$$

显然从式(9.183)和式(9.186)可推出

$$(A - \lambda I) \zeta = -E \eta = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} \quad (9.187)$$

其中 * 是一些无关紧要的矢量。注意到式(9.185)表明

$$(A - \lambda I) \zeta = (B_0 C_{2,0} + \tilde{A} - \lambda I) \zeta = (\tilde{A} - \lambda I) \zeta$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ (A_{aa}^+ - \lambda I) \zeta_a^+ + L_{ab}^+ C_b \zeta_b + L_{ad}^+ C_d \zeta_d \\ (A_{bb} - \lambda I) \zeta_b + L_{bd} C_d \zeta_d \\ * \\ * \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ (A_{aa}^+ - \lambda I) \zeta_a^+ \\ (A_{bb} - \lambda I) \zeta_b \\ * \\ * \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.188)$$

从式(9.187)和式(9.188)可推出

$$(A_{aa}^+ - \lambda I) \zeta_a^+ = 0 \quad \text{和} \quad (A_{bb} - \lambda I) \zeta_b = 0 \quad (9.189)$$

因为 A_{aa}^+ 是不稳定的, 从 $(A_{aa}^+ - \lambda I)\zeta_a^+ = 0$ 可推出 $\zeta_a^+ = 0$ 。同样的, 因为 (A_{bb}, C_b) 是完全可观的, $(A_{bb} - \lambda I)\zeta_b = 0$ 和 $C_b\zeta_b = 0$ 表明 $\zeta_b = 0$ 。这样 ζ 就具有下面的性质:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ \zeta_a^0 \\ 0 \\ 0 \\ \zeta_c \\ \zeta_d \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^+(\Sigma_P) \quad (9.190)$$

显然, 从式(9.190)和定理 9.1 的条件(6)可推出

$$\mathcal{S}^+(\Sigma_P) \supset \mathcal{V} + (\Sigma_Q) \cup \{ \cup_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q) \} \quad (9.191)$$

接下来很容易验证 $A - sI$ 可被分解为

$$A - sI = X_1 + X_2 C_2 + X_3 + X_4 \quad (9.192)$$

其中

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_{aa}^- - sI & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & 0 & L_{ad}^- C_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c E_{ca}^- & B_c E_{ca}^0 & B_c E_{ca}^+ & L_{ab} C_b & A_{cc} - sI & L_{cd} C_d \\ B_d E_{da}^- & B_d E_{da}^0 & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd} - sI \end{bmatrix} \quad (9.193)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^0 & L_{ad}^0 & L_{ab}^0 \\ B_{0a}^+ & L_{ad}^+ & L_{ab}^+ \\ B_{0b} & L_{bd} & 0 \\ B_{0c} & 0 & 0 \\ B_{0d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.194)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ - sI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} - sI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.195)$$

和

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{nn}^0 - sI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.196)$$

不难发现

$$\text{Im}(X_1) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P) \cap \{\bigcap_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P)\} \quad (9.197)$$

和

$$\text{Ker}(X_3) \supset \mathcal{S}^+(\Sigma_P) \supset \mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \cup \{\bigcup_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q)\} \quad (9.198)$$

从定理 9.2 的证明可得, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\| [C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} \|_\infty < \kappa_P \quad (9.199)$$

其中 κ_P 是一个和 ϵ 无关的有限正常数。而且在定理 9.1 的条件(4)下, 有

$$[C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} E \rightarrow 0 \quad (9.200)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$[C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} X_1 \rightarrow 0 \quad (9.201)$$

对 s 逐点成立。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 根据式(9.180)可得

$$[C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} X_4 \rightarrow 0 \quad (9.202)$$

对 s 逐点成立。对偶地可以证明

$$\| [sI - A - K_Q(\epsilon) C_1]^{-1} [E + K_Q(\epsilon) D_1] \|_\infty < \kappa_Q \quad (9.203)$$

其中 κ_Q 是和 ϵ 无关的正常数。如果定理 9.1 的条件(5)得到满足, 则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 下面的结果对 s 逐点成立:

$$C_2 [sI - A - K_Q(\epsilon) C_1]^{-1} [E + K_Q(\epsilon) D_1] \rightarrow 0 \quad (9.204)$$

和

$$X_3 [sI - A - K_Q(\epsilon) C_1]^{-1} [E + K_Q(\epsilon) D_1] \rightarrow 0 \quad (9.205)$$

最后, 在全阶输出反馈控制器(9.55)下, 不难验证从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵为

$$\begin{aligned} T_{hw}(s, \epsilon) = & [C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} E \\ & + C_2 [sI - A - K_Q(\epsilon) C_1]^{-1} [E + K_Q(\epsilon) D_1] + [C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \\ & \cdot [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} (A - sI) [sI - A - K_Q(\epsilon) C_1]^{-1} [E + K_Q(\epsilon) D_1] \end{aligned}$$

利用式(9.192), $T_{hw}(s, \epsilon)$ 可重新表示为

$$\begin{aligned} T_{hw}(s, \epsilon) = & [C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} E \\ & + C_2 [sI - A - K_Q(\epsilon) C_1]^{-1} [E + K_Q(\epsilon) D_1] \\ & + [C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - B F_P(\epsilon)]^{-1} (X_1 + X_2 C_2 + X_3 + X_4) \end{aligned}$$

$$\cdot [sI - A - BF_P(\epsilon)]^{-1} [E + K_Q(\epsilon)D_1]$$

根据式(9.199)~式(9.205)和一些简单运算,不难证明当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $T_{hw}(s, \epsilon) \rightarrow 0$ 对 s 逐点成立,等价于当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\|T_{hw}\|_\infty \rightarrow 0$ 。如果定理 9.1 的所有条件都能满足,则全阶输出反馈控制器(9.55)解决了系统(9.1)的 H_∞ -ADDPMS。◆

9.5.3 定理 9.4 的证明

由于闭环极点 $\lambda\{A + BF_P(\epsilon)\}$ 和 $\lambda\{A_R + K_R(\epsilon)C_R\}$ 对充分小的 ϵ 是渐近稳定的,所以由系统(9.1)和降阶输出测量反馈控制器(9.67)所形成的闭环系统是稳定的。在降阶输出反馈控制器下的从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵为

$$\begin{aligned} T_{hw}(s, \epsilon) = & [C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - BF_P(\epsilon)]^{-1} E \\ & + [C_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [sI - A - BF_P(\epsilon)]^{-1} (A - sI) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} \\ & \cdot [sI - A_R - K_R(\epsilon)C_R]^{-1} [E_R + K_R(\epsilon)D_R] \\ & + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} [sI - A_R - K_R(\epsilon)C_R]^{-1} [E_R + K_R(\epsilon)D_R] \end{aligned}$$

Chen^[79](即性质 2.1)已经证明

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} \mathcal{V}^+(\Sigma_{QR}) = \mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \quad (9.206)$$

采用和 Chen^[79]中的相同方法,我们可以证明

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} U_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_{QR}) = U_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q) \quad (9.207)$$

因此

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} (\mathcal{V}^+(\Sigma_{QR}) \cup \{U_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_{QR})\}) = \mathcal{V}^+(\Sigma_Q) \cup \{U_{\lambda \in \mathcal{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q)\} \quad (9.208)$$

余下的证明和定理 9.3 相同。◆

第 10 章 连续时间系统的鲁棒和完全跟踪

10.1 导 论

本章中要阐述所谓的鲁棒和完全跟踪(robust and perfect tracking, RPT)问题,这是由 Liu、Chen 和 Lin^[131]提出来的。本章的内容和文献[131]的结果密切相关。鲁棒和完全跟踪问题是设计一个控制器使得闭环系统渐近稳定,在任何初始条件和外部扰动下,被控输出几乎完全跟踪给定的参考信号。而几乎完全跟踪是指在外部扰动和初始条件影响下,被控系统以任意快的响应时间跟踪参考信号。本章考虑下面的多变量线性时不变系统:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew, & x(0) = x_0 \\ y = C_1x + D_1w \\ h = C_2x + D_2u + D_{22}w \end{cases} \quad (10.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动, $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。我们也假设 (A, B) 可镇定, (A, C_1) 可检测。为了后面的参考,定义 Σ_p 和 Σ_q 分别表示由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 和 (A, E, C_1, D_1) 所代表的子系统。给定外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 和任何参考信号矢量 $r \in \mathbb{R}^l$, 其中 $r, \dot{r}, \dots, r^{(\kappa-1)}$ 是可以得到的, $\kappa \geq 1, r^{(\kappa)}$ 或者是脉冲函数矢量, 或者属于 L_p , 系统(10.1)的鲁棒完全跟踪(即 RPT)问题就是寻找一个以下形式的参数化动态测量控制律:

$$\begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}(\epsilon)v + B_{\text{cmp}}(\epsilon)y + G_0(\epsilon)r + \dots + G_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \\ u = C_{\text{cmp}}(\epsilon)v + D_{\text{cmp}}(\epsilon)y + H_0(\epsilon)r + \dots + H_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \end{cases} \quad (10.2)$$

使得系统(10.1)在控制律(10.2)的作用下,有

(1) 存在一个 $\epsilon^* > 0$, 在 $r = 0$ 和 $w = 0$ 时的闭环系统对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ 是渐近稳定的。

(2) 令 $h(t, \epsilon)$ 是闭环被控输出响应, 而 $e(t, \epsilon)$ 是跟踪误差, 即 $e(t, \epsilon) := h(t, \epsilon) - r(t)$ 。则对任意初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$J_p(x_0, w, r, \epsilon) := \|e\|_p \rightarrow 0 \quad (10.3)$$

除了参考信号 r 以外, 在上面的公式中还引入了其他信息作为附加的控制器输入, 即 $\dot{r}, \ddot{r}, \dots, r^{(\kappa-1)}$ 。通常情况下, 无需增加任何负担就可以产生这些附加信号: 例如, 如果 $r(t) = t^2 \cdot 1(t)$, 其中 $1(t)$ 是单位阶跃函数, 则很容易得到它的一阶导

数为

$$\dot{r}(t) = 2t \cdot 1(t) + t^2 \cdot \delta(t) = 2t \cdot 1(t) \quad (10.4)$$

其中 $\delta(t)$ 是单位脉冲函数, 它的二阶导数为

$$\ddot{r}(t) = 2 \cdot 1(t) \quad (10.5)$$

可以利用 $\dot{r}(t)$ 和 $\ddot{r}(t)$ 来全面改善跟踪性能, 而 $r^{(3)}(t) = 2 \cdot \delta(t)$ 在实际物理过程中不存在, 所以无法利用。注意公式(10.3)中包括了所有的 $r(t) = t^k$ 形式的可能参考信号 ($0 \leq k < \infty$)。因此本章方法可用于近似跟踪在 $t = 0$ 处展开的 Taylor 级数参考信号。这只要截断给定信号 Taylor 级数展开的高阶项就可实现。不难发现当 $r(t) \equiv 0$ 时, 问题就变成了测量反馈下的完全调节问题。

有必要简单回顾一些(几乎)完全调节和(几乎)完全跟踪问题的历史。完全调节以及相关的问题在 20 世纪 70 年代和 80 年代早期得到了极为深入的研究。状态反馈下的完全调节的研究者包括 Kwakernaak 和 Sivan^[132]、Francis^[133]、Kimura^[134]、Scherzinger 和 Davison^[135], 而完全得到解决则是由 Lin 等^[136]完成的(也可参见文献[87])。同样的, 只是在最近才由 Chen 等^[137]给出了一般线性系统测量输出反馈下的完全调节问题的解。完全跟踪问题有几种不同的形式(可见文献[138]和[139], 这些主要处理状态反馈情况, 以及文献[140], 还有它们的参考文献)。文献[131]中已经详细地阐明了它们所形成的问题和 RPT 问题有很大的不同。

本章中, 我们要推导出一组鲁棒和完全跟踪问题存在解的充分和必要条件。在这些条件下, 得到构造参数化的反馈律算法来解决所提问题。要强调的是, 在不对系统增加任何额外的积分器情况下, 本章所提出的方法和算法设计可以跟踪任何多项式信号。这是由于我们利用了所有从参考 $r(t)$ 可得到的信息。这一技术已经成功地用于许多实际问题, 如硬盘伺服系统, 这是第 16 章的内容。

10.2 可解性条件和解

下面给出主要结果, 首先导出系统(10.1)的鲁棒和完全跟踪(即 RPT)问题可解的充分和必要条件。实际上, 我们将构造两种类型的参数化控制律来证明这些条件的充分性, 一个是全阶的, 即动态阶次等于对象阶次 n , 另一个是降阶的, 即动态阶次小于 n 。

我们有下面的定理。

定理 10.1 考虑系统(10.1), 它的外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 初始条件 $x(0) = x_0$ 。对任何参考信号 $r(t)$, 若所有的 i 阶导数都是可以得到的 ($i = 0, 1, \dots, \kappa - 1, \kappa \geq 1$), $r^{(\kappa)}(t)$ 或者是脉冲函数矢量, 或者属于 L_p , 则在控制律(10.2)下鲁棒和完全跟踪(即 RPT)问题可解的充分和必要条件是:

- (1) (A, B) 可镇定, (A, C_1) 可检测;
- (2) $D_{22} + D_2SD_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} D_2^T (D_1 D_1^T)^+$;
- (3) Σ_P , 即 (A, B, C_2, D_2) , 是右可逆和最小相位的;
- (4) $\text{Ker}(C_2 + D_2SC_1) \supset C_1^{-1} \{\text{Im}(D_1)\}$. ♣

证明 我们首先证明定理中的条件(1)~(4)是必要的。首先考虑的是 $r(t) \equiv 0$ 的情况, 此时无疑任何阶的导数都是可得的。很容易发现所提的鲁棒和完全跟踪问题变成了完全调节问题。根据 Chen 等^[137]的结果, 我们可以把系统(10.1)的完全调节问题重提为下面系统的几乎干扰解耦问题(见 Willems^[67,68]的原问题):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + [E \ I]\tilde{w}, & x(0) = 0 \\ y = C_1x + [D_1 \ 0]\tilde{w} \\ h = C_2x + D_2u + [D_{22} \ 0]\tilde{w} \end{cases} \quad (10.6)$$

为引用方便, 令 $\tilde{\Sigma}_Q$ 表示由矩阵四元组 $(A, [E \ I], C_1, [D_1 \ 0])$ 所代表的子系统。根据几乎干扰解耦问题的结果(可参见第 9 章), 我们可以证明如果几乎干扰解耦对上面的系统是解的, 则下面的条件成立:

- (1) (A, B) 是可镇定的, (A, C_1) 是可检测的;
- (2) $D_{22} + D_2SD_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} D_2^T (D_1 D_1^T)^+$;
- (3) $\text{Im}([E + BSD_1 \ I]) \subset \mathcal{S}^+(\Sigma_P)$;
- (4) $\text{Ker}(C_2 + D_2SC_1) \supset \mathcal{V}^+(\tilde{\Sigma}_Q)$ 。

显然, 上面的第(3)条表明 $\mathcal{S}^+(\Sigma_P) = \mathbb{R}^n$, 所以 Σ_P 右可逆, 在 \mathbb{C}^+ 没有不变零点。由于 $\tilde{\Sigma}_Q$ 的特殊形式, 不难证明 $\mathcal{V}^+(\tilde{\Sigma}_Q) = C_1^{-1} \{\text{Im}(D_1)\}$ 。因此第(3)条和第(4)条分别等价于:

- (1) Σ_P 右可逆, 在 \mathbb{C}^+ 没有不变零点;
- (2) $\text{Ker}(C_2 + D_2SC_1) \supset C_1^{-1} \{\text{Im}(D_1)\}$ 。

下面只要证明如果 RPT 问题是可解的, 则子系统 Σ_P 必须是最小相位。我们来证明这个事实。

首先主要从第二个条件 $D_{22} + D_2SD_1 = 0$ 可推出, 如果对系统(10.1)采用预输出反馈律

$$u = Sy \quad (10.7)$$

那么所形成的新系统从 w 到 h 的直接传输部分就为零。因此不失一般性, 在后面的证明中就假设 $D_{22} = 0$ 。

下面证明对给定的非零参考输入 $r(t)$ 来说, 如果鲁棒和完全跟踪问题是可解的, Σ_P 就必须是最小相位, 即 Σ_P 在虚轴上不能有任何不变零点。实际上, 即使是 $w = 0$ 和 $x_0 = 0$ 时, 这一条件也必须成立, 也就是下面系统的鲁棒和完全跟踪问题:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C_1x \\ e = C_2x + D_2u - r = h - r \end{cases} \quad (10.8)$$

现在,如果把 r 当做外部扰动,则以上问题又等价于以下系统在测量反馈和内稳定约束下的几乎干扰解耦问题:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \bar{y} = \begin{bmatrix} C_1x \\ r \\ \vdots \\ r^{(k-1)} \end{bmatrix} \\ e = C_2x + D_2u - r \end{cases} \quad (10.9)$$

不失一般性,假设四元组 (A, B, C_2, D_2) 已经被变换到定理 4.5 的特殊坐标基形式,即

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix}, \quad x_a = \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_d \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_d \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 - r_0 \\ h_d - r_d \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

$$x_d = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m_d} \end{bmatrix}, \quad x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{i_i} \end{bmatrix}, \quad h_d = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{m_d} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

$$r_d = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{m_d} \end{bmatrix}, \quad u_d = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m_d} \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

和

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + B_{0a}^- h_0 + L_{ad}^- h_d \quad (10.14)$$

$$\dot{x}_a^0 = A_{aa}^0 x_a^0 + B_{0a}^0 h_0 + L_{ad}^0 h_d \quad (10.15)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc} x_c + B_{0c} h_0 + L_{cd} h_d + B_c (E_{ca}^- x_a^- + E_{ca}^0 x_a^0) + B_c u_c \quad (10.16)$$

$$e_0 = C_{2,0a}^- x_a^- + C_{2,0a}^0 x_a^0 + C_{2,0c} x_c + C_{2,0d} x_d + u_0 - r_0 \quad (10.17)$$

对 $i = 1, 2, \dots, m_d$, 有

$$\dot{x}_i = A_{q_i} x_i + L_{i0} h_0 + L_{id} h_d + B_{q_i} \left[u_i + E_{ia} x_a + E_{ic} x_c + \sum_{j=1}^{m_d} E_{ij} x_j \right] \quad (10.18)$$

$$h_i = C_{q_i} x_i = x_{i1}, \quad h_d = C_d x_d \quad (10.19)$$

最后有

$$e_i = h_i - r_i = C_{q_i} x_i - r_i, \quad e_d = h_d - r_d = C_d x_d - r_d \quad (10.20)$$

对于 $i = 1, 2, \dots, m_d$, 我们定义一组新的状态变量, 如果 $\kappa \geq q_i$, 则

$$\bar{x}_i := \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iq_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_i^{(q_i-1)} \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

如果 $\kappa < q_i$, 则

$$\bar{x}_i := \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iq_i} \\ x_{iq_i+1} \\ \vdots \\ x_{iq_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_i^{(\kappa-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

由此可得

$$e_i = C_{q_i} \bar{x}_i, \quad e_d = C_d \bar{x}_d \quad (10.23)$$

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + B_{0a}^- e_0 + L_{ad}^- e_d + [B_{0a}^- \quad L_{ad}^-] r \quad (10.24)$$

$$\dot{x}_a^0 = A_{aa}^0 x_a^0 + B_{0a}^0 e_0 + L_{ad}^0 e_d + [B_{0a}^0 \quad L_{ad}^0] r \quad (10.25)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc} x_c + B_{0c} e_0 + L_{cd} e_d + B_c (E_{ca}^- x_a^- + E_{ca}^0 x_a^0) + B_c u_c + [B_{0c} \quad L_{cd}] r \quad (10.26)$$

对一个适当维数矩阵 $C_{2,0d}^*$, 有

$$e_0 = C_{2,0a}^- x_a^- + C_{2,0a}^0 x_a^0 + C_{2,0c} x_c + C_{2,0d} \bar{x}_d + u_0 - r_0 + C_{2,0d}^* r_d \quad (10.27)$$

而对 $i = 1, 2, \dots, m_d$, 和适当维数的矩阵 E_{q_i} , 有

$$\dot{\bar{x}}_i = A_{q_i} \bar{x}_i + L_{i0} e_0 + L_{id} e_d + B_{q_i} \left(u_i + E_{ia} x_a + E_{ic} x_c + \sum_{j=1}^{m_d} E_{ij} \bar{x}_j \right) + E_{q_i} \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\kappa-1)} \end{bmatrix} \quad (10.28)$$

注意式(10.27)的扰动 r_0 和 r_d 可通过下面的预输出反馈去除:

$$u_0 = \bar{u}_0 + r_0 - C_{2,0d}^* r_d \quad (10.29)$$

而且从被控输入 $[u_0^T \quad u_d^T \quad u_c^T]^T$ 到误差输出 $[e_0^T \quad e_d^T]^T$ 的子系统已经是定理 4.5

的标准特殊坐标基形式了。则根据第 9 章的结果(即性质 9.1)可得,如果在测量反馈和内稳定的约束下,系统(10.9)的几乎干扰解耦问题是可解的话,则必然存在一个非零的矢量 ξ , 使得

$$\xi^H(\lambda I - A_{aa}^0) = 0 \quad \text{和} \quad \xi^H[B_{0a}^0 \quad L_{ad}^0] = 0 \quad (10.30)$$

从定理 3.5, 我们可知式(10.30)表明 $(A_{aa}^0, [B_{0a}^0 \quad L_{ad}^0])$ 不是完全可控的。根据第 4 章的特殊坐标基性质 4.1, $(A_{aa}^0, [B_{0a}^0 \quad L_{ad}^0])$ 的不可控性表明 (A, B) 对的不可镇定性, 这显然是个矛盾。因此 x_a^0 必不存在。根据特殊坐标基的性质 4.2 可得 Σ_P 是最小相位的。这就完成了必要性部分的证明。◆

对于 $D_1 = 0$ 的情况, 直接传输部分 D_{22} 也必须是个零矩阵, 定理 10.1 的最后一项, 即第(4)项就成为 $\text{Ker}(C_2) \supset \text{Ker}(C_1)$ 。

我们将通过参数化控制器的构造来证明定理 10.1 中条件的充分性, 在定理 10.1 的条件(1)~(4)下, 该控制器可解鲁棒和完全跟踪问题。在随后的小节中会进行这项工作。首先有以下有关状态反馈的推论。

推论 10.1 考虑系统(10.1), 外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 初始条件 $x(0) = x_0$ 。假设所有的状态可用于反馈, 即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 。对任意参考信号 $r(t)$, 若所有的 i 阶导数都是可以得到的 ($i = 1, 2, \dots, \kappa - 1, \kappa \geq 1$), $r^{(\kappa)}(t)$ 或者是一个脉冲向量函数, 或者属于 L_p , 则式(10.2)所示的控制律可解鲁棒和完全跟踪问题的充分和必要条件是当且仅当以下条件得到满足:

- (1) (A, B) 是可镇定的;
- (2) $D_{22} = 0$;
- (3) Σ_P , 即 (A, B, C_2, D_2) 是右可逆和最小相位的。♣

10.2.1 状态反馈下的解

当所有的状态都可测量并用于反馈, 则可用静态控制律来解决问题。本小节中构造一个参数化的状态反馈律:

$$u = F(\epsilon)x + H_0(\epsilon)r + \dots + H_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \quad (10.31)$$

该反馈律在推论 10.1 的条件下可解系统(10.1)的鲁棒和完全跟踪问题。不难注意到给定的参考可重写成下面的形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\kappa-2)} \\ r^{(\kappa-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_l & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\kappa-2)} \\ r^{(\kappa-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_l \end{bmatrix} r^{(\kappa)} \quad (10.32)$$

把式(10.32)和给定系统组合在一起可以得到下面的增广系统:

$$\Sigma_{\text{aug}}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ e = C_2x + D_2u \end{cases} \quad (10.33)$$

其中

$$w = \begin{bmatrix} w \\ r^{(\kappa)} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\kappa-2)} \\ r^{(\kappa-1)} \\ x \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & I_l \\ E & 0 \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

和

$$C_2 = [-I_l \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ C_2], \quad D_2 = D_2 \quad (10.36)$$

现在不难证明在增广系统(10.33)中,从 u 到 e 的子系统 (A, B, C_2, D_2) 是右可逆的,和 Σ_P 有同样的无限零点结构,而且它的不变零点包含了 Σ_P 的不变零点和额外的 $l \times \kappa$ 个位于 $s = 0$ 。下面给出算法步骤来构造式(10.31)所示形式的控制律。

步骤 10.1 这一步把增广系统(10.33)从 u 到 e 的子系统变换到定理 4.5 的特殊坐标基,即找到非奇异的状态、输入和输出变换 Γ_s, Γ_i 和 Γ_o 。把系统变换到定理 4.5 的结构形式,以及在式(4.29)~式(4.32)的简明形式上做一些小改动。对于式(10.33)所示的从 u 到 e 的子系统,可以证明式(4.29)~式(4.32)的简明形式可重新写为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{aa}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{aa}^- & 0 & L_{ad}^- C_d \\ B_c E_{ca}^0 & B_c E_{ca}^- & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d E_{da}^0 & B_d E_{da}^- & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix} \quad (10.37)$$

$$A_{aa}^0 = \begin{bmatrix} 0 & I_l & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix} \quad (10.38)$$

和

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{0a}^0 & C_{0a}^- & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & C_d \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.39)$$

步骤 10.2 选择一个具有适当维数的矩阵 F_c , 使得

$$A_{cc}^c = A_{cc} - B_c F_c \quad (10.40)$$

是渐近稳定的。(A_{cc}, B_c) 的完全能控性保证了矩阵 F_c 的存在。

步骤 10.3 对 x_d 中的每个 x_i , 它和 Σ_P 或式(10.33)所示的从 u 到 e 的子系统的无限零点结构相关, 我们选择一个 F_i , 使得

$$p_i(s) = \prod_{j=1}^{q_i} (s - \lambda_{ij}) = s^{q_i} + F_{i1} s^{q_i-1} + \cdots + F_{i,q_i-1} s + F_{iq_i} \quad (10.41)$$

所有的 λ_{ij} 都在 C^- 中。令

$$F_i = [F_{iq_i} \quad F_{i,q_i-1} \quad \cdots \quad F_{i1}], \quad i = 1, \dots, m_d \quad (10.42)$$

步骤 10.4 下面构造

$$F(\epsilon) = -\Gamma_i \begin{bmatrix} C_{0a}^0 & C_{0a}^- & C_{0c} & C_{0d} \\ E_{da}^0 & E_{da}^- & E_{dc} & E_d + F_d(\epsilon) \\ E_{ca}^0 & E_{ca}^- & F_c & 0 \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad (10.43)$$

其中

$$E_d = \begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1m_d} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{m_d 1} & \cdots & E_{m_d m_d} \end{bmatrix} \quad (10.44)$$

$$F_d(\epsilon) = \text{blkdiag} \left\{ \frac{F_1}{\epsilon^{q_1}} S_1(\epsilon), \frac{F_2}{\epsilon^{q_2}} S_2(\epsilon), \dots, \frac{F_{m_d}}{\epsilon^{q_{m_d}}} S_{m_d}(\epsilon) \right\} \quad (10.45)$$

其中

$$S_i(\epsilon) = \text{diag} \{1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{q_i-1}\} \quad (10.46)$$

步骤 10.5 最后进行划分

$$F(\epsilon) = [H_0(\epsilon) \quad \cdots \quad H_{r-1}(\epsilon) \quad F(\epsilon)] \quad (10.47)$$

$H_i(\epsilon) \in R^{m \times l}$, $F(\epsilon) \in R^{m \times n}$ 。算法结束。♣

我们有下面的结果。

定理 10.2 考虑给定系统(10.1), 外部扰动 $w \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, 它的初始条件为 $x(0) = x_0$ 。假设所有的状态都可测量并用于反馈, 即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 。如果推论 10.1 的条件(1)~(3)都满足, 且对任何参考信号 $r(t)$, 它的所有 i 阶导数都可以得到 ($i = 0, 1, \dots, \kappa - 1$), $r^{(i)}(t)$ 或者是脉冲函数向量, 或者属于 L_p , 则式(10.31)所示的控制律可解鲁棒和完全跟踪问题, 其中 $F(\epsilon)$ 和 $H_i(\epsilon)$ 由式(10.47)给出 ($i = 0, 1, \dots, \kappa - 1$)。♣

证明 见 10.4.1 节。◆

下面的评注给出了另外的方法通过全状态反馈来解鲁棒跟踪和完全跟踪问题。我们把这一方法的证明作为练习留给读者。

注 10.1 注意状态反馈 RPT 问题所需的增益矩阵可通过下面的 Riccati 方程的正定解 $P > 0$ 来计算:

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 - (PB + \tilde{C}_2^T \tilde{D}_2)(\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1}(PB + \tilde{C}_2^T \tilde{D}_2)^T = 0 \quad (10.48)$$

其中

$$\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ \epsilon I_{d+n} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_2 = \begin{bmatrix} D_2 \\ 0 \\ \epsilon I_m \end{bmatrix} \quad (10.49)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0 \\ & A \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_0 = -\epsilon I_{d+l} + \begin{bmatrix} 0 & I_l & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (10.50)$$

其中 B, C_2 和 D_2 如同式(10.35)和式(10.36)所定义。所需的增益矩阵为

$$\tilde{F}(\epsilon) = -(\tilde{D}_2^T \tilde{D}_2)^{-1}(PB + \tilde{C}_2^T \tilde{D}_2)^T = [H_0(\epsilon) \quad \cdots \quad H_{r-1}(\epsilon) \quad F(\epsilon)] \quad (10.51)$$

其中 $H_i(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times l}$ 和 $F(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。最后注意到对于小的 ϵ , Riccati 方程(10.48)可能会有比较麻烦的数值计算问题。 ♣

10.2.2 测量输出反馈下的解

我们将考虑两种类型的测量反馈控制律,一是全阶控制器,它和所给的系统有相同的动态阶次;另一个是降阶控制器,它的动态阶次小于所给的系统。不失一般性,本节中都假设 $D_{22} = 0$ 。如果它非零,则总可通过下面的预输出反馈使之为零:

$$u = Sy \quad (10.52)$$

其中 S 如同定理 10.1 的第(2)项。下面是在定理 10.1 的条件下,可解鲁棒和完全跟踪问题的全阶和降阶测量反馈控制器的构造性算法。

1. 全阶测量反馈

下面是构造可解鲁棒和完全跟踪问题参数化的全阶测量反馈控制器算法的步骤。

步骤 10.6 对于给定的参考信号 $r(t)$ 和系统(10.1),首先假设(10.1)的所有状态变量都是可测量的,根据 10.2.1 节的步骤,定义一个辅助系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ e = C_2 x + D_2 u \end{cases} \quad (10.53)$$

然后根据 10.2.1 节算法步骤 10.1~10.5, 构造一个状态反馈增益矩阵

$$F(\epsilon) = [H_0(\epsilon) \quad \cdots \quad H_{\kappa-1}(\epsilon) \quad F(\epsilon)] \quad (10.54)$$

步骤 10.7 令 Σ_{Q_n} 表示下面的矩阵四元组

$$(A_{Q_n}, E_{Q_n}, C_{Q_n}, D_{Q_n}) := (A, [E \quad I_n], C_1, [D_1 \quad 0]) \quad (10.55)$$

这一步是把 Σ_{Q_n} 变换到定理 4.5 的特殊坐标基。由于矩阵 Σ_{Q_n} 的特殊结构, 不难证明 Σ_{Q_n} 总是右可逆的, 没有不变零点。利用定理 4.5 的结果找到非奇异状态、输入和输出变换 Γ_{sQ} 、 Γ_{iQ} 和 Γ_{oQ} , 使得

$$\Gamma_{sQ}^{-1} A \Gamma_{sQ} = \begin{bmatrix} A_{ccQ} & L_{cdQ} \\ E_{dcQ} & A_{ddQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{ocQ} \\ B_{odQ} \end{bmatrix} [C_{ocQ} \quad 0] \quad (10.56)$$

$$\Gamma_{sQ}^{-1} E_{Q_n} \Gamma_{iQ} = \begin{bmatrix} B_{ocQ} & 0 & I_{n-k} & 0 \\ B_{odQ} & I_k & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.57)$$

和

$$\Gamma_{oQ}^{-1} C_1 \Gamma_{sQ} = \begin{bmatrix} C_{ocQ} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{oQ}^{-1} [D_1 \quad 0] \Gamma_{iQ} = \begin{bmatrix} I_{p-k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.58)$$

其中 $k = p - \text{rank}(D_1)$ 。可以证明 (A, C_1) 可检测的充分必要条件是

$$\left(A_{ccQ}, \begin{bmatrix} C_{ocQ} \\ E_{dcQ} \end{bmatrix} \right) \quad (10.59)$$

可检测。

步骤 10.8 令 K_{cQ} 是具有适当维数的定常矩阵, 使得矩阵

$$A_{ccQ}^c = A_{ccQ} - K_{cQ} \begin{bmatrix} C_{ocQ} \\ E_{dcQ} \end{bmatrix} = A_{ccQ} - [K_{coQ} \quad K_{cdQ}] \begin{bmatrix} C_{ocQ} \\ E_{dcQ} \end{bmatrix} \quad (10.60)$$

的所有特征值都在 C^- 。下面定义参数化的观测器增益矩阵:

$$K(\epsilon) = -\Gamma_{sQ} \begin{bmatrix} B_{ocQ} + K_{coQ} & L_{cdQ} + K_{cdQ}/\epsilon \\ B_{odQ} & A_{ddQ} + I_k/\epsilon \end{bmatrix} \Gamma_{oQ}^{-1} \quad (10.61)$$

步骤 10.9 最后, 得到下面的全阶测量反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}(\epsilon)v - K(\epsilon)y + BH_0(\epsilon)r + \cdots + BH_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \\ u = F(\epsilon)v + H_0(\epsilon)r + \cdots + H_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \end{cases} \quad (10.62)$$

其中 $A_{\text{cmp}}(\epsilon) = A + BF(\epsilon) + K(\epsilon)C_1$ 。这就完成了全阶测量反馈控制器的构造。



我们有下面的定理。

定理 10.3 考虑系统(10.1), 外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 初始条件为 $x(0) = x_0$ 。如果定理 10.1 的条件(1)~(4)能够满足, 对任意参考信号 $r(t)$, 若它的 i 阶导数都可以得到 ($i = 0, 1, \dots, \kappa-1, \kappa \geq 1$), $r^{(i)}(t)$ 或者是脉冲矢量, 或者属

于 L_p 。则参数化的全阶测量反馈控制律(10.62)可解鲁棒和完全跟踪问题。 ♣

证明 见 10.4.2 节。 ◆

下面的评注给出另外的方法来计算步骤 10.8 中的增益矩阵 $K(\epsilon)$ 。

注 10.2 步骤 10.8 中的增益矩阵 $K(\epsilon)$ 也可以通过解下面的 Riccati 方程的正定解 $Q > 0$ 得到:

$$AQ + QA^T + (EE^T + I) - (QC_1^T + ED_1^T)(D_1D_1^T + \epsilon I)^{-1}(C_1Q + D_1E^T) = 0 \quad (10.63)$$

所需的增益矩阵 $K(\epsilon)$ 为

$$K(\epsilon) = -(QC_1^T + ED_1^T)(D_1D_1^T + \epsilon I)^{-1} \quad (10.64)$$

同样的,当 ϵ 很小时可能会出现数值计算问题。 ♣

2. 降阶测量反馈

下面给出由降阶测量反馈控制律实现的鲁棒和完全跟踪。为简单起见,假设矩阵 C_1 和 D_1 已经被变换到下面的形式:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad D_1 = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.65)$$

其中 $D_{1,0}$ 是行满秩的。在给出构造参数化降阶测量反馈控制器的算法步骤之前,首先对下面的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + [E \quad I_n]\tilde{w} \\ y = C_1x + [D_1 \quad 0]\tilde{w} \end{cases} \quad (10.66)$$

进行和式(10.65)中的 C_1 和 D_1 结构相匹配的划分,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_1 & I_k & 0 \\ E_2 & 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \tilde{w} \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{w} \end{cases} \quad (10.67)$$

其中

$$\tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ x_0 \cdot \delta(t) \end{bmatrix} \quad (10.68)$$

显然 $y_1 = x_1$ 可直接得到,因而无需估计。接下来定义 Σ_{QR} 为

$$(A_R, E_R, C_R, D_R) = \left[A_{22}, [E_2 \quad 0 \quad I_{n-k}], \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{1,0} & 0 & 0 \\ E_1 & I_k & 0 \end{bmatrix} \right] \quad (10.69)$$

同样可以很容易地验证 Σ_{QR} 是右可逆的,没有有限和无限零点。而且 (A_R, C_R) 可检测的充分必要条件是 (A, C_1) 可检测。我们现在给出下面的算法。

步骤 10.10 对于给定的参考 $r(t)$ 和系统(10.1), 仍然假设系统(10.1)的所有状态变量都是可测的, 采用 10.2.1 节的步骤定义一个辅助系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ e = C_2x + D_2u \end{cases} \quad (10.70)$$

现在根据 10.2.1 节算法的步骤 10.1~10.5 构造一个状态反馈增益矩阵

$$F(\epsilon) = [H_0(\epsilon) \quad \cdots \quad H_{\kappa-1}(\epsilon) \quad F(\epsilon)] \quad (10.71)$$

把 $F(\epsilon)$ 进行和式(10.67)的 x_1 和 x_2 相对应的划分, 即

$$F(\epsilon) = [F_1(\epsilon) \quad F_2(\epsilon)] \quad (10.72)$$

步骤 10.11 令 K_R 是一个具有适当维数的定常矩阵, 使得矩阵

$$A_R + K_R C_R = A_{22} + [K_{R0} \quad K_{R1}] \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix} \quad (10.73)$$

的所有特征值都在 C^- 中。(A_R, C_R) 的可检测性保证了这一点。

步骤 10.12 令

$$G_R = [-K_{R0} \quad A_{21} + K_{R1}A_{11} - (A_R + K_R C_R)K_{R1}] \quad (10.74)$$

和

$$\begin{cases} A_{\text{cmp}}(\epsilon) = A_R + B_2 F_2(\epsilon) + K_R C_R + K_{R1} B_1 F_2(\epsilon) \\ B_{\text{cmp}}(\epsilon) = G_R + (B_2 + K_{R1} B_1) [0 \quad F_1(\epsilon) - F_2(\epsilon) K_{R1}] \\ C_{\text{cmp}}(\epsilon) = F_2(\epsilon) \\ D_{\text{cmp}}(\epsilon) = [0 \quad F_1(\epsilon) - F_2(\epsilon) K_{R1}] \end{cases} \quad (10.75)$$

步骤 10.13 最后得到下面的降阶测量反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}(\epsilon)v + B_{\text{cmp}}(\epsilon)y + G_0(\epsilon)r + \cdots + G_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \\ u = C_{\text{cmp}}(\epsilon)v + D_{\text{cmp}}(\epsilon)y + H_0(\epsilon)r + \cdots + H_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \end{cases} \quad (10.76)$$

其中对 $i = 0, 1, \dots, \kappa - 1$, 有

$$G_i(\epsilon) = (B_2 + K_{R1} B_1) H_i(\epsilon) \quad (10.77)$$

这就完成了降阶测量反馈控制器的构造。♣

定理 10.4 考虑给定系统(10.1), 外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 它的初始条件为 $x(0) = x_0$ 。如果定理 10.1 的条件(1)~(4)都能满足, 对任意参考输入信号 $r(t)$, 若它的所有 i 阶导数都能测量 ($i = 0, 1, \dots, \kappa - 1, \kappa \geq 1$), $r^{(\kappa)}(t)$ 或者是脉冲函数矢量, 或者属于 L_p , 则参数化的降阶测量反馈控制律(10.76)可解鲁棒和完全跟踪问题。♣

证明 见 10.4.3 节。◆

现在根据定理 10.3 和定理 10.4 的结果, 易见定理 10.1 的充分性。定理 10.1 的证明结束。◆◆

10.3 其他参考信号的鲁棒和完全跟踪

在控制系统设计中常常会遇到跟踪一些参考信号的情况,如属于 L_∞ 的正弦信号。如果被控输出的初始值和参考信号之间存在失配,则不可能使得跟踪误差的 L_∞ 范数任意小。另一个常见的情形是参考 $r(t)$ 的某些分量可能属于一个集合,如 L_{p_1} , 某些分量属于另一个集合,如 L_{p_2} , $p_1 \in [1, \infty)$, $p_2 \in [1, \infty)$ 。对这类参考信号,为了得到一些有意义的结果,我们需要对原问题进行一些调整。还是考虑式(10.1)所示的线性系统,具有外部扰动

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_q \end{bmatrix} \quad (10.78)$$

其中 $w_i \in L_{p_{w_i}}$, $p_{w_i} \in [1, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, q$ 。我们也考虑一个参考信号

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_l \end{bmatrix} \quad (10.79)$$

它具有以下性质:对 $i = 1, 2, \dots, l$, 我们有 $r_i, \dot{r}_i, \dots, r_i^{(\kappa_i-1)}$ 都可得到, $\kappa_i \geq 1$, $r_i^{(\kappa_i)}$ 或者是脉冲函数,或者属于 $L_{p_{r_i}}$, $p_{r_i} \in [1, \infty)$ 。则求解这类参考信号的一般鲁棒和完全跟踪(general RPT, GRPT)问题就是要找到一个具有以下形式的参数化动态测量反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}(\epsilon)v + B_{\text{cmp}}(\epsilon)y + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} G_{1,i}(\epsilon)r_1^{(i)} + \dots + \sum_{i=0}^{\kappa_l-1} G_{l,i}(\epsilon)r_l^{(i)} \\ u = C_{\text{cmp}}(\epsilon)v + D_{\text{cmp}}(\epsilon)y + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} H_{1,i}(\epsilon)r_1^{(i)} + \dots + \sum_{i=0}^{\kappa_l-1} H_{l,i}(\epsilon)r_l^{(i)} \end{cases} \quad (10.80)$$

当把控制律(10.80)应用到系统(10.1)时,有

(1)存在一个 $\epsilon^* > 0$ 使得所形成的闭环系统在 $r = 0$ 和 $w = 0$ 时对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ 是渐近稳定的;

(2)所形成闭环误差信号 e (明显是 ϵ 的函数)可被分解为

$$e = e_{r_1} + \dots + e_{r_l} + e_{w_1} + \dots + e_{w_q} + e_o \quad (10.81)$$

而当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,对所有的 $1 \leq p < \infty$ 和任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\tilde{J}(x_0, w, r, \epsilon) = \sum_{i=1}^l \|e_{r_i}\|_{p_{r_i}} + \sum_{i=1}^q \|e_{w_i}\|_{p_{w_i}} + \|e_o\|_p \rightarrow 0 \quad (10.82)$$

e_0 大致上是被控输出的初始值和参考之间的失配所产生的误差, 而 e_{r_i} ($i = 1, 2, \dots, l$) 和 e_{w_i} ($i = 1, 2, \dots, q$) 是相应于稳定状态的误差。

我们有下面的结果。

定理 10.5 考虑初始条件为 $x(0) = x_0$ 的给定系统(10.1)。同时考虑外部扰动 w , 它的分量 $w_i \in L_{p_{w_i}}, p_{w_i} \in [1, \infty), i = 1, 2, \dots, q$ 。则对任何式(10.79)所示形式的参考信号 $r(t)$, 其中 $r_i, \dot{r}_i, \dots, r_i^{(\kappa_i-1)}$ 是可得到的, $\kappa_i \geq 1, r_i^{(\kappa_i)}$ 或者是脉冲函数或者属于 $L_{p_{r_i}}, p_{r_i} \in [1, \infty), i = 1, 2, \dots, l$, 式(10.80)所示的控制律可解一般鲁棒和完全跟踪(GRPT)问题的充分和必要条件是定理 10.1 的所有四个条件成立。♣

证明 该定理的证明采用和定理 10.1 相同的推理路线, 只需稍加调整。10.2 节的构造性算法修改如下。

1. 状态反馈情况

在状态反馈情况下, 首先要得到增广系统

$$\tilde{\Sigma}_{\text{aug}}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = x \\ e = C_2x + D_2u \end{cases} \quad (10.83)$$

其中

$$e = h - r, \quad w := \begin{bmatrix} w \\ r^{(\kappa)} \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_l \\ x \end{bmatrix}, \quad r_i = \begin{bmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_i^{(\kappa_i-1)} \end{bmatrix} \quad (10.84)$$

然后采用 10.2.1 节相同的步骤 10.1~10.4 得到增益矩阵 $F(\epsilon)$ 并划分为

$$F(\epsilon) = [H_{1,0}(\epsilon) \quad \cdots \quad H_{1,\kappa_1-1}(\epsilon) \quad \cdots \quad H_{l,0}(\epsilon) \quad \cdots \quad H_{l,\kappa_l-1}(\epsilon) \quad F(\epsilon)] \quad (10.85)$$

状态反馈控制器为

$$u = F(\epsilon)x + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} H_{1,i}(\epsilon)r_1^{(i)} + \cdots + \sum_{i=0}^{\kappa_l-1} H_{l,i}(\epsilon)r_l^{(i)} \quad (10.86)$$

2. 全阶测量反馈

只要将 10.2.2 节算法的步骤 10.6 替换为上面的第 1 项就可以得到期望的 $F(\epsilon)$ 。而步骤 10.7 和 10.8 保持不变, 全阶测量输出反馈控制器为

$$\begin{cases} \dot{v} = A_{\text{amp}}v - K(\epsilon) + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} BH_{1,i}(\epsilon)r_1^{(i)} + \cdots + \sum_{i=0}^{\kappa_l-1} BH_{l,i}(\epsilon)r_l^{(i)} \\ u = F(\epsilon)v + \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} H_{1,i}(\epsilon)r_1^{(i)} + \cdots + \sum_{i=0}^{\kappa_l-1} H_{l,i}(\epsilon)r_l^{(i)} \end{cases} \quad (10.87)$$

其中 $A_{\text{cmp}} = A + BF(\epsilon) + K(\epsilon)C_1$ 。

3. 降阶测量反馈

类似的,我们只需要把 10.2.2 节的算法步骤 10.10 替换为上面的第 1 项,而步骤 10.11 和 10.12 保持不变,降阶测量反馈控制为式(10.80)所示的形式,参数化的矩阵如同式(10.75)中的 $A_{\text{cmp}}(\epsilon)$ 、 $B_{\text{cmp}}(\epsilon)$ 、 $C_{\text{cmp}}(\epsilon)$ 和 $D_{\text{cmp}}(\epsilon)$ 、 $H_{j,i}(\epsilon)$ 如式(10.85)所给 ($j = 1, 2, \dots, l; i = 1, 2, \dots, \kappa_j - 1$), 而

$$G_{j,i}(\epsilon) = (B_2 + K_{R1}B_1)H_{j,i}(\epsilon), \quad j = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, \kappa_j - 1 \quad (10.88)$$

这就完成了定理 10.5 的证明。◆

我们必须指出通常需要无限的增益来实现鲁棒和完全跟踪。在实际过程中为了设计物理上可实现的控制律,必须在跟踪性能和其他需求之间作出一些权衡。我们可以通过调整参数 ϵ 来实现这种调节。

最后给出一个数值例子来说明一般鲁棒和完全跟踪设计的结果。被控对象有两个被控输出,我们要设计一个 GRPT 控制器使得被控对象的第一个被控输出可以鲁棒地并且几乎完全地跟踪一个斜坡信号,而第二个将鲁棒地并且完全跟踪一个正弦函数。

例 10.1 考虑一个式(10.1)所示的线性系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.89)$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0 \quad (10.90)$$

为验证方便,假设外部扰动 w 为

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix} \cdot 1(t) \in L_\infty \quad (10.91)$$

令参考输入为

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \cos(2t) \end{bmatrix} \cdot 1(t) \quad (10.92)$$

注意到 $\dot{r}_1 = 1(t) \in L_\infty$ 。因此在不利用信息 \dot{r}_1 的情况下,我们可以对以上系统和参考信号实现 GRPT。

1) 状态反馈情况

首先考虑系统状态变量都是可测的情况,即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 。不难验证子系统 Σ_p 是可逆和最小相位的。在 $s = -1$ 处有一个不变零点,分别有两个 0 阶和 2

阶的无限零点。因此对于参考信号是稳定的系统,一般的鲁棒和完全跟踪问题是可解的。根据状态反馈情况下的构造算法,我们得到一个参数化的控制律:

$$u = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 - \frac{\epsilon}{2} & -1 - \frac{2}{\epsilon^2} & -\frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{\epsilon^2} \end{bmatrix} r \quad (10.93)$$

由给定系统和上面的控制律所形成的闭环系统极点位于 -1 和 $-1/\epsilon \pm j/\epsilon$ 。因此闭环系统极点对任意正的 ϵ 来说是稳定的。图 10.1 是在 $\epsilon = 0.1, 0.05$ 和 0.01 情况下的误差信号 $e_2(t) = h_2(t) - r_2(t)$ 的响应。注意对 $t \geq 0$ 有 $e_1(t) = h_1(t) - r_1(t) \equiv 0$ 。结果显然表明一般鲁棒和完全跟踪是可实现的。

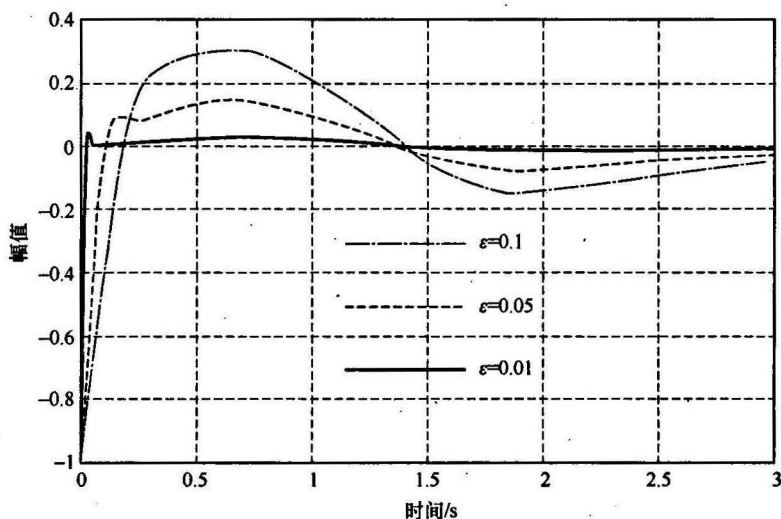


图 10.1 状态反馈下的跟踪误差 e_2

接下来考虑测量反馈下的鲁棒和完全跟踪。令测量输出为 $y = C_1 x + D_1 w$, 其中

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.94)$$

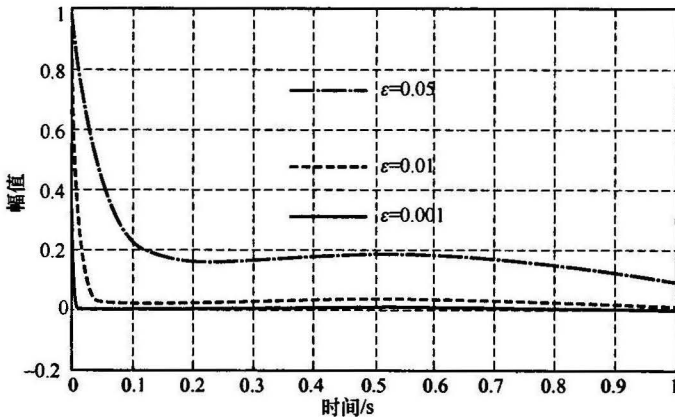
容易看出 $\text{Ker}(C_2) = \text{Ker}(C_1) = C_1^{-1} \{\text{Im}(D_1)\}$, 因此通过测量反馈可以解一般鲁棒和完全跟踪问题。有趣的是由四元组 (A, E, C_1, D_1) 所代表的子系统是非最小相位的, 在 $s = 1$ 处有一个不变零点。不像我们所想象的分离对称原理, 在解测量输出反馈下的鲁棒和完全跟踪时子系统 Σ_Q 不必是最小相位和/或左可逆, 这与 Σ_P 是不对称的。

2) 全阶测量反馈情况

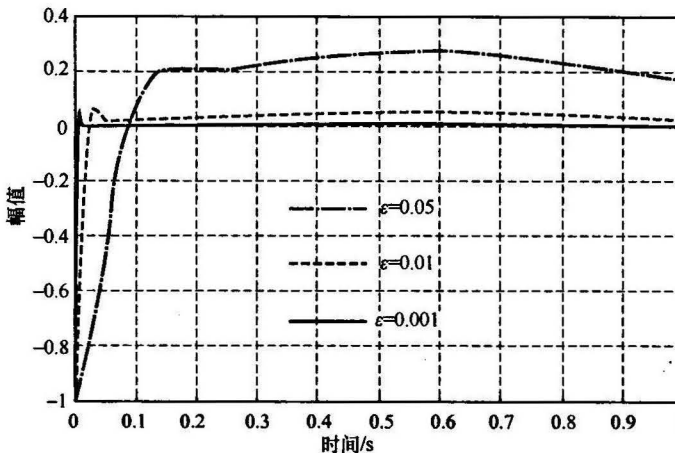
根据构造性算法, 我们得到下面的全阶测量反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{v} = \begin{bmatrix} -1-\frac{1}{\epsilon} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon} & 1 \\ 1-\frac{2}{\epsilon} & -1-\frac{1}{\epsilon}-\frac{2}{\epsilon^2} & -\frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{\epsilon^2} \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 1+\frac{1}{\epsilon} \end{bmatrix} y \\ u = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1-\frac{2}{\epsilon} & -1-\frac{2}{\epsilon^2} & -\frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{\epsilon^2} \end{bmatrix} r \end{cases} \quad (10.95)$$

容易验证闭环极点渐近位于 $-1, -1/\epsilon \pm j/\epsilon, -1, -1/\epsilon$ 和 $-1/\epsilon$ 。因此对所有 $\epsilon > 0$ ，由给定对象和全阶测量反馈控制律所形成的闭环系统是渐近稳定的。图 10.2 是在 ϵ



(a) 误差信号 e_1



(b) 误差信号 e_2

图 10.2 全阶测量反馈下的跟踪误差

$= 0.05, 0.01$ 和 0.001 时的全阶测量反馈控制律下的跟踪误差。显然一般鲁棒和完全跟踪是可实现的。

3) 降阶测量反馈情况

同样根据降阶测量反馈情况的构造性算法, 我们得到下面的一阶动态控制器:

$$\begin{cases} \dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -\frac{2}{\epsilon} & -1 - \frac{2}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{\epsilon^2} \end{bmatrix} r \\ u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 - \frac{2}{\epsilon} & -1 - \frac{2}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{\epsilon^2} \end{bmatrix} r \end{cases} \quad (10.96)$$

由给定对象和上面控制律所形成的闭环系统极点准确地位于 $-1, -1/\epsilon \pm j/\epsilon$ 和 -1 。因此对所有的 $\epsilon > 0$, 闭环系统是渐近稳定的。图 10.3 是分别在 $\epsilon = 0.1, 0.05$ 和 0.01 下的误差信号 $e_2(t)$ 的响应。和状态反馈情况一样, 对所有 $t \geq 0$, 降阶测量反馈情况下的 $e_1(t)$ 始终为零。结果显然表明一般的鲁棒和完全跟踪是可实现的。 ♣

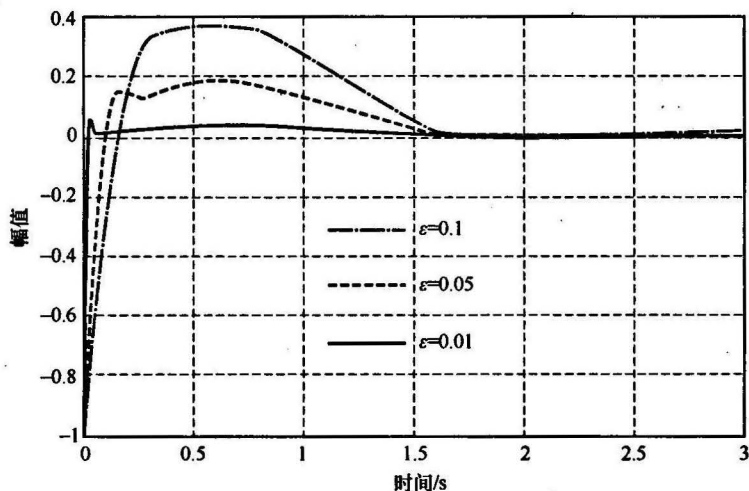


图 10.3 降阶测量反馈下的跟踪误差 e_2

10.4 主要结果的证明

10.4.1 定理 10.2 的证明

在 10.1 节的算法构造中已经提出, 根据定理 4.5, 我们可以把系统(10.33)变换到式(10.37)~式(10.39)所示的简明特殊坐标基形式。也就是存在非奇异状态、输入和输出变换 Γ_s, Γ_i 和 Γ_o , 使得

$$\begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \Gamma_s \begin{bmatrix} r \\ x_a^- \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{l \times l} & 0 \\ * & \tilde{\Gamma}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x_a^- \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} \quad (10.97)$$

$$e = \Gamma_o \begin{bmatrix} e_0 \\ e_d \end{bmatrix}, \quad u = \Gamma_i \begin{bmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix} \quad (10.98)$$

$$r = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \vdots \\ r^{(k-1)} \end{bmatrix}, \quad x_d = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m_d} \end{bmatrix}, \quad x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iq_i} \end{bmatrix} \quad (10.99)$$

$$e_d = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{m_d} \end{bmatrix}, \quad u_d = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m_d} \end{bmatrix} \quad (10.100)$$

和

$$\dot{r} = \begin{bmatrix} 0 & I_l & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_l \end{bmatrix} r^{(k)} \quad (10.101)$$

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + L_{ad}^- e_d + B_{0a}^- e_0 + E_a^- w + G_a^- r^{(k)} \quad (10.102)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc} x_c + L_{cd} e_d + B_{0c} e_0 + B_c (u_c + E_{ca}^0 r + E_{ca}^- x_a^-) + E_c w + G_c r^{(k)} \quad (10.103)$$

$$e_0 = C_{0a}^0 r + C_{0a}^- x_a^- + C_{0c} x_c + C_{0d} x_d + u_0 \quad (10.104)$$

对每个 $i = 1, \dots, m_d$, 有

$$\dot{x}_i = A_{q_i} x_i + L_{i0} e_0 + L_{id} e_d$$

$$+ B_{q_i} (u_i + E_{ia}^0 r + E_{ia}^- x_a^- + E_{ic} x_c + \sum_{j=1}^{m_d} E_{ij} x_j) + E_i w + G_i r^{(k)} \quad (10.105)$$

$$e_i = C_{q_i} x_i = x_{i1}, \quad e_d = C_d x_d \quad (10.106)$$

现在不难看出, 如果 $r^{(k)}$ 是脉冲函数矢量, 则 $G_a^- r^{(k)}$ 、 $G_c r^{(k)}$ 和 $G_i r^{(k)}$ 可当做分别加到原状态变量 x_a^- 、 x_c 和 x_d 上的另外的初始条件。如果 $r^{(k)}$ 属于 $L_p, p \in [1, \infty)$, 则可当做另外的扰动, 可以和原扰动 w 合并。因此在这两种情况下, 式(10.102)、式(10.103)和式(10.105)可写为

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + L_{ad}^- e_d + B_{0a}^- e_0 + \bar{E}_a^- \bar{w} \quad (10.107)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc} x_c + L_{cd} e_d + B_{0c} e_0 + B_c (u_c + E_{ca}^0 r + E_{ca}^- x_a^-) + \bar{E}_c \bar{w} \quad (10.108)$$

和

$$\dot{x}_i = A_{q_i} x_i + L_{id} e_d + B_{q_i} (u_i + E_{ia}^0 r + E_{ia}^- x_a^- + E_{ic} x_c + \sum_{j=1}^{m_d} E_{ij} x_j) + \bar{E}_i \bar{w} \quad (10.109)$$

其中 $\bar{w} \in L_p, p \in [1, \infty), \bar{E}_a^-, \bar{E}_c$ 和 \bar{E}_i 是一些适当的定常矩阵, 具有一个新的有界初始条件, 比如 \bar{x}_0 。

接下来注意到式(10.43)的增益矩阵 F 所代表的控制律 $u = Fx$ 可重写为

$$u_0 = -C_{0a}^0 r - C_{0a}^- x_a^- - C_{0c} x_c - C_{0d} x_d \quad (10.110)$$

$$u_c = -F_c x_c - E_{ca}^0 r - E_{ca}^- x_a^- \quad (10.111)$$

和

$$u_i = -E_{ia}^0 r - E_{ia}^- x_a^- - E_{ic} x_c - \sum_{j=1}^{m_d} E_{ij} x_j - \frac{F_i}{\epsilon^{q_i}} S_i(\epsilon) \bar{x}_i \quad (10.112)$$

因此由给定系统和以上控制律所形成的闭环系统可表示为

$$e_0 = 0 \quad (10.113)$$

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + L_{ad}^- e_d + \bar{E}_a^- \bar{w} \quad (10.114)$$

$$\dot{x}_c = (A_{cc} - B_c F_c) x_c + L_{cd} e_d + \bar{E}_c \bar{w} = A_{cc}^c x_c + L_{cd} e_d + \bar{E}_c \bar{w} \quad (10.115)$$

$$\dot{x}_i = A_{q_i} x_i - B_{q_i} \frac{F_i}{\epsilon^{q_i}} S_i(\epsilon) x_i + L_{id} e_d + \bar{E}_i \bar{w}, \quad e_i = C_{q_i} x_i \quad (10.116)$$

定义新的状态变换为

$$\bar{x}_a^- := x_a^-, \quad \bar{x}_c := x_c, \quad \bar{x}_d := \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{m_d} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_i := S_i(\epsilon) x_i, \quad i = 1, \dots, m_d \quad (10.117)$$

则有 $e_0 = 0$ 以及

$$\dot{\bar{x}}_a^- = A_{aa}^- \bar{x}_a^- + L_{ad}^- \bar{e}_d + \bar{E}_a^- \bar{w} \quad (10.118)$$

$$\dot{\bar{x}}_c = A_{cc}^c \bar{x}_c + L_{cd} \bar{e}_d + \bar{E}_c \bar{w} \quad (10.119)$$

$$\epsilon \dot{\bar{x}}_i = (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) \bar{x}_i + \epsilon \bar{L}_{id}(\epsilon) \bar{e}_d + \epsilon \bar{E}_i(\epsilon) \bar{w} \quad (10.120)$$

$$\bar{e}_i = e_i = C_{q_i} \bar{x}_i, \quad \bar{e}_d = e_d = C_d \bar{x}_d \quad (10.121)$$

$$\bar{L}_{id}(\epsilon) = S_i(\epsilon) L_{id}, \quad \bar{E}_i(\epsilon) = S_i(\epsilon) \bar{E}_i \quad (10.122)$$

不难证明对 $\epsilon \in (0, 1]$ 以及一些和 ϵ 无关的正常数 \bar{l}_d 和 θ_i , 有

$$|\bar{L}_{id}(\epsilon)| \leq \bar{l}_d, \quad |\bar{E}_i(\epsilon)| \leq \theta_i, \quad i = 1, \dots, m_d \quad (10.123)$$

下面对闭环系统(10.118)~(10.120)构造一个 Lyapunov 函数。我们通过子系统的 Lyapunov 函数的复合来实现这一点。对于子系统 \bar{x}_a 选择 Lyapunov 函数

$$V_a^-(\bar{x}_a) = (\bar{x}_a)^T P_a^- \bar{x}_a \tag{10.124}$$

其中 $P_a^- > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{aa}^-)^T P_a^- + P_a^- A_{aa}^- = -I \tag{10.125}$$

的唯一解。对子系统 \bar{x}_c , 我们选择一个 Lyapunov 函数

$$V_c(\bar{x}_c) = \bar{x}_c^T P_c \bar{x}_c \tag{10.126}$$

其中 $P_c > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{cc}^-)^T P_c + P_c A_{cc}^- = -I \tag{10.127}$$

的解。最后对子系统 \bar{x}_d , 我们选择一个 Lyapunov 函数

$$V_d(\bar{x}_d) = \sum_{i=1}^{m_d} \bar{x}_i^T P_i \bar{x}_i \tag{10.128}$$

其中 P_i 是 Lyapunov 方程

$$(A_{q_i} - B_{q_i})^T P_i + P_i (A_{q_i} - B_{q_i}) = -I \tag{10.129}$$

的解。由于 $A_{q_i} - B_{q_i}$ 是渐近稳定的, 保证了 P_i 的存在性。现在对闭环系统(10.118)~(10.120)选择下面的 Lyapunov 函数:

$$V(\bar{x}_a, \bar{x}_c, \bar{x}_d) = V_a^-(\bar{x}_a) + V_c(\bar{x}_c) + \alpha_d V_d(\bar{x}_d) \tag{10.130}$$

其中 α_d 有待确定。V 在闭环系统(10.118)~(10.120)轨迹上的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -(\bar{x}_a^-)^T \bar{x}_a^- + 2(\bar{x}_a^-)^T P_a^- (L_{ad} \bar{e}_d + \tilde{E}_a^- \bar{w}) - \bar{x}_c^T \bar{x}_c + 2\bar{x}_c^T P_c (L_{cd} \bar{e}_d + \tilde{E}_c^- \bar{w}) \\ & + \alpha_d \sum_{i=1}^{m_d} \left[-\frac{1}{\epsilon} \bar{x}_i^T \bar{x}_i + 2\bar{x}_i^T P_i \tilde{L}_{id}(\epsilon) \bar{e}_d + 2\bar{x}_i^T P_i \tilde{E}_i(\epsilon) \bar{w} \right] \end{aligned} \tag{10.131}$$

现在容易看出, 存在一个 $\alpha_d > 0$ 和 $\epsilon^* \in (0, 1]$, 使得对所有 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ 以及和 ϵ 无关的正常数 α_1 , 有

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} |\bar{x}_a^-|^2 - \frac{1}{2} |\bar{x}_c|^2 - \frac{1}{2\epsilon} |\bar{x}_d|^2 + \alpha_1 |\bar{w}|^2 \tag{10.132}$$

因此在没有扰动 w 和参考输入 r 时, 闭环系统是渐近稳定的。

现在还需要证明作为 ϵ 的函数, 跟踪误差 e 具有下面的性质:

$$\text{当 } \epsilon \rightarrow 0 \text{ 时, } J_p(x_0, w, r, \epsilon) = \|e\|_p \rightarrow 0 \tag{10.133}$$

首先假设 \bar{w} 不存在。根据式(10.132)可得对一些和 ϵ 无关的正标量 α_2 , 有

$$\dot{V} \leq -\alpha_2 V \tag{10.134}$$

从变换(10.117)可知存在一些和 ϵ 无关的 $\alpha_0 > 0$, 使得

$$|\bar{x}(0)| \leq \alpha_0 |\bar{x}_0| \tag{10.135}$$

其中 \bar{x}_0 是原系统初始条件 x_0 和由 $r^{(\omega)}$ 引入的另外的初始条件的组合, 所以

$$|V(0)| \leq \alpha_3 |\bar{x}_0|^2 \quad (10.136)$$

其中 $\alpha_3 > 0$ 和 ϵ 无关。根据标准比较定理, 从式(10.134)可得

$$V < V(0)e^{-\alpha_2 t} \quad (10.137)$$

结合式(10.136)可得

$$V \leq \alpha_3 e^{-\alpha_2 t} |\bar{x}_0|^2 \quad (10.138)$$

因此对一些和 ϵ 无关的正标量 α_4 和 α_5 , 有

$$|\tilde{x}_d(t)| \leq \alpha_4 e^{-\alpha_2 t} |\bar{x}_0| \quad \text{和} \quad |\bar{e}_d(t)| \leq \alpha_5 e^{-\alpha_2 t} |\bar{x}_0| \quad (10.139)$$

现在把 \bar{e}_d 当做系统(10.120)的 \tilde{x}_i 子系统的输入, 我们可以证明对一些和 ϵ 无关的正标量 $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ 和 β_1 , 有

$$|\tilde{x}_d(t)| \leq (\alpha_6 e^{-\alpha_8 t/\epsilon} + \alpha_7 \epsilon e^{-\alpha_2 t}) |\bar{x}_0| \quad (10.140)$$

和

$$|\bar{e}_d(t)| \leq \beta_1 (\alpha_6 e^{\alpha_8 t/\epsilon} + \epsilon e^{-\alpha_2 t}) |\bar{x}_0| \quad (10.141)$$

注意到

$$e = \Gamma_0 \begin{bmatrix} e_0 \\ e_d \end{bmatrix} \quad (10.142)$$

其中 $e_0 = 0$ 和 $e_d = \bar{e}_d$, 则有

$$|e| \leq |\Gamma_0| \beta_1 (e^{-\alpha_8 t/\epsilon} + \epsilon e^{-\alpha_2 t}) |\bar{x}_0| = \beta_2 (e^{-\alpha_8 t/\epsilon} + \epsilon e^{-\alpha_2 t}) |\bar{x}_0| \quad (10.143)$$

这样对所有的 $1 \leq p < \infty$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\|e\|_p \leq \left(\int_0^\infty [\beta_2 m_d (e^{-\alpha_8 t/\epsilon} + \epsilon e^{-\alpha_2 t}) |\bar{x}_0|]^p dt \right)^{1/p} \rightarrow 0 \quad (10.144)$$

接下来考虑扰动 $\bar{w} \in L_p, p \in [1, \infty)$, 但 $\bar{x}_0 = 0$ 。注意系统(10.120)中的 \bar{e}_d 是系统的部分状态变量, 对于充分小的 ϵ , 和 $A_{q_i} - B_{q_i} F_i$ 相比较, $\epsilon \tilde{E}_i(\epsilon)$ 可以忽略, 则子系统(10.120)可近似为

$$\dot{\tilde{x}}_i = \frac{1}{\epsilon} (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) \tilde{x}_i + \tilde{E}_i(\epsilon) \bar{w} \quad (10.145)$$

其中 $\bar{w} \in L_p$ 。所以对一些和 ϵ 无关的正标量 β_3 和 β_4 , 有

$$\begin{aligned} |e_i| = |\bar{e}_i| &\leq \int_0^T \left| C_{q_i} \exp \left[-\frac{1}{\epsilon} (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) \tau \right] \tilde{E}_i(\epsilon) \bar{w}(t-\tau) \right| d\tau \\ &\leq \beta_3 \int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} |\bar{w}(t-\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (10.146)$$

$p = 1$ 时的结果很显然。我们来证明 $1 < p < \infty$ 时的情况。利用著名的 Hölder 不等式, 即

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p^*}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \quad (10.147)$$

有

$$\begin{aligned}
 |e_i| = |\bar{e}_i| &\leq \beta_3 \int_0^\infty [(e^{-\beta_4 \tau/\epsilon})^{1/p} |\bar{w}(t-\tau)|] (e^{-\beta_4 \tau/\epsilon})^{1/p^*} d\tau \\
 &\leq \beta_3 \left[\int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} |\bar{w}(t-\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \left[\int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} d\tau \right]^{1/p^*} \\
 &= \beta_3 \left(\frac{\epsilon}{\beta_4} \right)^{1/p^*} \left[\int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} |\bar{w}(t-\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \quad (10.148)
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \|e_i\|_p^p &\leq \beta_3^p \left(\frac{\epsilon}{\beta_4} \right)^{p/p^*} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} |\bar{w}(t-\tau)|^p d\tau \right] dt \\
 &= \beta_3^p \left(\frac{\epsilon}{\beta_4} \right)^{p/p^*} \int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} \left[\int_0^\infty |\bar{w}(t-\tau)|^p dt \right] d\tau \quad (10.149)
 \end{aligned}$$

$$= \beta_3^p \left(\frac{\epsilon}{\beta_4} \right)^{p/p^*} \int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} \left[\int_0^\infty |\bar{w}(t)|^p dt \right] d\tau \quad (10.150)$$

$$\begin{aligned}
 &= \beta_3^p \left(\frac{\epsilon}{\beta_4} \right)^{p/p^*} \|\bar{w}\|_p^p \int_0^\infty e^{-\beta_4 \tau/\epsilon} d\tau \\
 &= \beta_3^p \left(\frac{\epsilon}{\beta_4} \right)^{1+p/p^*} \|\bar{w}\|_p^p \quad (10.151)
 \end{aligned}$$

注意我们利用了性质 $\bar{w}(t) = 0(t < 0)$ ，从式(10.149)得到式(10.150)。而式(10.148)~式(10.151)的证明也是受到 Desoer 和 Vidyasagar^[31]的相类似推理的启发。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时，显然有

$$\|e_i\|_p \leq \beta_3 \left(\frac{\epsilon}{\beta_4} \right)^{1/p+1/p^*} \|\bar{w}\|_p = \left(\frac{\beta_3}{\beta_4} \right) \epsilon \|\bar{w}\|_p \rightarrow 0 \quad (10.152)$$

根据式(10.144)和式(10.152)，鲁棒和完全跟踪问题已经得到解决。这就完成了定理 10.2 的证明。 ◆

10.4.2 定理 10.3 的证明

首先定义一个新的状态变量：

$$x_v = x - v \quad (10.153)$$

现在容易验证由给定系统(10.1)和全阶测量反馈律(10.62)所组成的闭环系统可重新表示为

$$\dot{x}_v = [A + K(\epsilon)C_1]x_v + [E + K(\epsilon)D_1]w \quad (10.154)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= [A + BF(\epsilon)]x - BF(\epsilon)x_v + BH_0(\epsilon)r + \dots + BH_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} + Ew \\
 &\quad (10.155)
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 \dot{h} &= [C_2 + D_2F(\epsilon)]x - D_2F(\epsilon)x_v + D_2H_0(\epsilon)r + \dots + D_2H_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \\
 &\quad (10.156)
 \end{aligned}$$

现在不难看出闭环系统的特征值 $\lambda\{A + BF(\epsilon)\}$, 在定理 10.2 中已经证明都位于 C^- 中, 而当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\lambda\{A + K(\epsilon)C_1\}$ 等价于

$$\lambda\left\{\begin{bmatrix} A_{ccQ} - K_{cdQ}C_{cdQ} & -K_{cdQ}/\epsilon \\ E_{dcQ} & -I_k/\epsilon \end{bmatrix}\right\} \rightarrow \lambda(A_{ccQ}^\epsilon) \cup \left\{-\frac{1}{\epsilon}, \dots, -\frac{1}{\epsilon}\right\} \quad (10.157)$$

所以当外部扰动 $w = 0$ 和参考输入 $r = 0$ 时, 对充分小的 ϵ , 闭环系统是渐近稳定的。

下面来研究子系统(10.154)中 x_v 的性质。首先利用非奇异的状态、输入和输出变换 Γ_{sQ} 、 Γ_{iQ} 和 Γ_{oQ} 把子系统(10.55)变换到定理 4.5 的特殊坐标基下。同时令

$$x_v = \Gamma_{sQ} \begin{bmatrix} x_{cQ} \\ x_{dQ} \end{bmatrix} \quad (10.158)$$

现在对一些和 ϵ 无关的、具有适当维数的矩阵 E_{cQ} 和 E_{dQ} , 可把系统(10.154)表示为

$$\dot{x}_{cQ} = (A_{ccQ} - K_{cdQ}C_{cdQ})x_{cQ} - \frac{K_{cdQ}}{\epsilon}x_{dQ} + E_{cQ}w \quad (10.159)$$

和

$$\dot{x}_{dQ} = -\frac{1}{\epsilon}x_{dQ} + E_{dcQ}x_{cQ} + E_{dQ}w \quad (10.160)$$

现在令

$$\tilde{x}_{cQ} = x_{cQ} - K_{dcQ}x_{dQ} \quad (10.161)$$

所以系统(10.159)和(10.160)可重新表示为

$$\dot{\tilde{x}}_{cQ} = A_{ccQ}^\epsilon \tilde{x}_{cQ} + A_{ccQ}^\epsilon K_{cdQ}x_{dQ} + (E_{cQ} - K_{cdQ}E_{dQ})w \quad (10.162)$$

和

$$\dot{x}_{dQ} = \left(-\frac{1}{\epsilon}I + E_{dcQ}K_{cdQ}\right)x_{dQ} + E_{dcQ}\tilde{x}_{cQ} + E_{dQ}w \quad (10.163)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 以上系统的极点显然渐近地为 $\lambda(A_{ccQ}^\epsilon)$, 在 $-1/\epsilon$ 处有 k 重根。这就证实了式(10.157)中的判断。和式(10.133)~式(10.152)有相类似的推断, 我们可以证明对任何有界的初始条件和 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 对一些和 ϵ 无关的正标量 β_c 和 β_d , 有

$$\|\tilde{x}_{cQ}\|_p \leq \beta_c \|w\|_p \quad \text{和} \quad \|x_{dQ}\|_p \leq \beta_d \epsilon \|w\|_p \quad (10.164)$$

所以存在一个和 ϵ 无关的正标量 β_v , 使得

$$\|x_v\|_p \leq \beta_v \|w\|_p \quad (10.165)$$

不难根据式(10.58)验证出

$$C_1^{-1}\{\text{Im}(D_1)\} = \text{Ker}\left(\Gamma_{sQ} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \Gamma_{sQ}^{-1}\right) = \text{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \Gamma_{sQ}^{-1}\right) \quad (10.166)$$

和

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \Gamma_{x_d}^{-1} \right) x_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cQ} \\ x_{dQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{dQ} \end{bmatrix} \quad (10.167)$$

所以定理 10.1 的最后条件 $\text{Ker}(C_2) \supset C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \}$ 表明对一些和 ϵ 无关的定常矩阵 M 和正标量 β_m , 有

$$C_2 x_v = M x_{dQ} \quad \text{和} \quad \|C_2 x_v\|_p \leq \beta_m \epsilon \|w\|_p \quad (10.168)$$

实际上对任意使得 $\text{Ker}(N) \supset \text{Ker}(C_2)$ 的适当矩阵 N 和与 ϵ 无关的正标量 β_n , 有

$$\|N x_v\|_p \leq |N| \cdot \beta_n \cdot \epsilon \cdot \|w\|_p \quad (10.169)$$

我们现在可以证明式(10.62)所示的全阶测量反馈控制律可解 RPT 问题。不难验证系统(10.155)和(10.156)可重新表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x - BF(\epsilon)x_v + Ew \\ e = (C_2 + D_2 F)x - D_2 F(\epsilon)x_v \end{cases} \quad (10.170)$$

其中 A, B, E, C_2 和 D_2 如同式(10.35)和式(10.36)所定义。不失一般性,后面都假设四元组 (A, B, C_2, D_2) 是特殊坐标基的形式。采用式(10.97)~式(10.116)的同样过程,对一些具有适当维数的、和 ϵ 无关的矩阵 N_a^- , N_c 和 N_i , 我们可以通过适当的变换把系统(10.170)变为下面的形式:

$$\dot{\tilde{x}}_a^- = A_{aa}^- \tilde{x}_a^- + L_{ad}^- \tilde{e}_d + \bar{E}_a^- \bar{w} + N_a^- x_v \quad (10.171)$$

$$\dot{\tilde{x}}_c = A_{cc} \tilde{x}_c + L_{cd} \tilde{e}_d + \bar{E}_c \bar{w} + N_c x_v \quad (10.172)$$

$$\dot{x}_i = A_{q_i} x_i - B_{q_i} \frac{F_i}{\epsilon^{q_i}} S_i(\epsilon) x_i + L_{id} \tilde{e}_d + \bar{E}_i \bar{w} + N_i x_v - \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{q_i} \frac{F_i}{\epsilon^{q_i}} S_i(\epsilon) \end{bmatrix} x_v \quad (10.173)$$

$$e_0 = -[C_{0a}^- \quad C_{0c} \quad C_{0d}] x_v, \quad e_i = C_{q_i} x_i \quad (10.174)$$

首先容易看出

$$\text{Ker}(-[C_{0a}^- \quad C_{0c} \quad C_{0d}]) \supset \text{Ker}(C_2) \quad (10.175)$$

由式(10.169)可得

$$\text{当 } \epsilon \rightarrow 0 \text{ 时, } \|e_0\|_p \rightarrow 0 \quad (10.176)$$

接下来和式(10.117)一样,定义

$$\tilde{x}_a^- := x_a^-, \quad \tilde{x}_c := x_c, \quad \tilde{x}_d := \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_i := S_i(\epsilon) x_i, \quad i = 1, \dots, m_d \quad (10.177)$$

则

$$\dot{\tilde{x}}_a^- = A_{aa}^- \tilde{x}_a^- + L_{ad}^- \tilde{e}_d + [\bar{E}_a^- \quad N_a^-] \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ x_v \end{bmatrix} \quad (10.178)$$

$$\dot{\tilde{x}}_c = A_{cc}^c \tilde{x}_c + L_{cd} \tilde{e}_d + [\bar{E}_c \quad N_c] \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ x_v \end{bmatrix} \quad (10.179)$$

$$\dot{\tilde{x}}_i = \frac{1}{\epsilon} (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) \tilde{x}_i + \tilde{L}_{id}(\epsilon) \tilde{e}_d + [\tilde{E}_i(\epsilon) \quad \tilde{N}_i(\epsilon)] \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ x_v \end{bmatrix} - [0 \quad 0 \quad \tilde{M}_i(\epsilon)] x_v \quad (10.180)$$

$$\tilde{e}_i = e_i = C_{q_i} \tilde{x}_i, \quad \tilde{e}_d = e_d = C_d \tilde{x}_d \quad (10.181)$$

其中

$$\tilde{M}_i(\epsilon) = S_i(\epsilon) B_{q_i} \frac{F_i}{\epsilon^{q_i}} S_i(\epsilon) \quad (10.182)$$

和

$$\tilde{L}_{id}(\epsilon) = S_i(\epsilon) L_{id}, \quad \tilde{N}_i(\epsilon) = S_i(\epsilon) N_i, \quad \tilde{E}_i(\epsilon) = S_i(\epsilon) \bar{E}_i \quad (10.183)$$

显然, $\tilde{L}_{id}(\epsilon)$ 、 $\tilde{N}_i(\epsilon)$ 和 $\tilde{E}_i(\epsilon)$ 的 2 范数都是有界的, 根据式(10.42)中 B_{q_i} 、 $S_i(\epsilon)$ 和 F_i 的特殊结构, 有

$$\begin{aligned} \tilde{M}_i(\epsilon) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{F_{iq_i}}{\epsilon} & F_{iq_{i-1}} & \cdots & \epsilon^{q_i-2} F_{i1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{F_{iq_i}}{\epsilon} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C_{q_i} \end{bmatrix} + \hat{M}_i(\epsilon) = \frac{F_{iq_i}}{\epsilon} \hat{C}_{q_i}(\epsilon) + \hat{M}_i(\epsilon) \end{aligned} \quad (10.184)$$

其中对某些和 ϵ 无关的正标量 ξ_i , 有 $|\hat{M}_i(\epsilon)| \leq \xi_i$ 。因此对某有界的 $\hat{N}_i(\epsilon)$, 式(10.180)可重新表示为

$$\dot{\tilde{x}}_i = \frac{1}{\epsilon} (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) \tilde{x}_i + \tilde{L}_{id}(\epsilon) \tilde{e}_d + [\tilde{E}_i(\epsilon) \quad \hat{N}_i(\epsilon)] \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ x_v \end{bmatrix} - \frac{F_{iq_i}}{\epsilon} [0 \quad 0 \quad \hat{C}_{q_i}] x_v \quad (10.185)$$

显然有

$$\text{Ker}([0 \quad 0 \quad \hat{C}_{q_i}]) \supset \text{Ker}(C_{q_i}) \quad (10.186)$$

根据式(10.169)可得对一些和 ϵ 无关的正标量 η_i , 有

$$\left\| \frac{F_{iq_i}}{\epsilon} [0 \quad 0 \quad \hat{C}_{q_i}] x_v \right\|_p \leq \eta_i \|w\|_p \quad (10.187)$$

因此可以把

$$\begin{bmatrix} \bar{w} \\ x_v \end{bmatrix} \text{ 和 } \frac{F_{q_i}}{\epsilon} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{C}_{q_i} \end{bmatrix} x_v \quad (10.188)$$

当成 L_p 信号, 它的 L_p 范数不超过一些和 ϵ 无关的正标量。然后根据式(10.124)~式(10.152)相类似的推导过程, 不难证明

$$\text{当 } \epsilon \rightarrow 0 \text{ 时, } \|e_d\|_p \rightarrow 0 \quad (10.189)$$

根据式(10.176)和式(10.189), 全阶测量反馈控制律(10.62)显然已经解决了鲁棒和完全跟踪问题。◆

10.4.3 定理 10.4 的证明

首先定义一新的状态变量:

$$x_s = x_2 - v + K_{R1} x_1 \quad (10.190)$$

容易验证由给定系统(10.1)和降阶测量反馈控制律(10.76)所形成的闭环系统可重新表示为

$$\dot{x}_s = (A_R + K_R C_R) x_s + \left[E_2 + K_R \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ E_1 \end{bmatrix} \right] w \quad (10.191)$$

$$\dot{x} = [A + BF(\epsilon)]x - BF_2(\epsilon)x_s + BH_0(\epsilon)r + \dots + BH_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} + Ew \quad (10.192)$$

和

$$h = [C_2 + D_2 F(\epsilon)]x - D_2 F_2(\epsilon)x_s + D_2 H_0(\epsilon)r + \dots + D_2 H_{\kappa-1}(\epsilon)r^{(\kappa-1)} \quad (10.193)$$

可见闭环系统对充分小的 ϵ 是渐近稳定的, 而闭环特征值由 $A + BF(\epsilon)$ 和 $A_R + K_R C_R$ 的特征值给出。

因为 $A_R + K_R C_R$ 是渐近稳定的, 所以对任何初始条件, 只要 $w \in L_p$ 就可使 $x_s \in L_p$ 。下面给出一个新的表示:

$$BF_2(\epsilon)x_s = BF(\epsilon) \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} \text{ 和 } D_2 F_2(\epsilon)x_s = D_2 F(\epsilon) \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} \quad (10.194)$$

则从式(10.65)可得

$$C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \} = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (10.195)$$

和

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \quad (10.196)$$

这样从定理 10.1 的最后一个条件 $\text{Ker}(C_2) \supset C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \}$ 可推出对任何具有适

当维数的矩阵 N 和 $\text{Ker}(N) \supset \text{Ker}(C_2)$, 有

$$C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \quad \text{和} \quad N \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \quad (10.197)$$

根据式(10.170)~式(10.189)的同样过程, 我们可以证明当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\|e\|_p \rightarrow 0 \quad (10.198)$$

因此降阶测量反馈控制律(10.76)可解鲁棒和完全跟踪问题。 ◆

第 11 章 离散时间 H_∞ 优化极小值

11.1 导 论

从本章开始到第 14 章,我们把着重点转移到离散时间系统的问题上。在这一章中,我们给出离散时间 H_∞ 最优控制问题中最小值的计算。本章的主要成果是对满足一些几何条件的系统采用非迭代的方法来计算精确的最小值。如果不满足这些几何条件,则必须在某降阶系统的基础上采用迭代的方法来近似这些最小值。本章的大部分结果都来源于文献[11]和[141]。

11.2 全信息反馈

考虑如下离散时间全信息反馈系统的最小值 γ^* 的计算问题:

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = C_2x(k) + D_2u(k) + D_{22}(k) \end{cases} \quad (11.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^r$ 是外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}^{n+q}$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。为了后面的参考方便,我们定义 Σ_P 为由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所代表的子系统。首先有下面的假设:

假设 11.1: (A, B) 是可镇定的;

假设 11.2: Σ_P 在单位圆上没有不变零点;

假设 11.3: $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) + \mathcal{S}^\circ(\Sigma_P)$;

假设 11.4: $D_{22} = 0$ 。 ♣

下面给出计算最小值 γ^* 的算法步骤。

步骤 11.1 不失一般性但可带来简便,假设四元组 (A, B, C_2, D_2) 所代表的 Σ_P 已经被划分成式(4.13)所示的形式。然后把 Σ_P 变换到第 4 章的特殊坐标基形式(关于特殊坐标基的简明形式也可见式(4.29)~式(4.32))。为了后面引用的方便,我们对状态变换 Γ , 引入另外的排列矩阵,使得新的状态变量的排序为

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ x_a^- \\ x_a^+ \\ x_d \\ x_b \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

接下来计算

$$\Gamma_s^{-1} E = \begin{bmatrix} E_c \\ E_a^- \\ E_a^+ \\ E_d \\ E_b \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

注意假设 11.3 等价于 $E_b = 0$ 。另为了记号的简洁,定义 $\mathbb{R}^n / \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P)$ 的维数为 n_x , 有 $n_x = n_a^+ + n_d + n_b$ 。注意当且仅当 Σ_P 是右可逆和最小相位、没有高于零阶的无限零点时, $n_x = 0$ 。

步骤 11.2 定义 $A_x, B_x, B_{x0}, B_{x1}, E_x, C_x$ 和 D_x 为

$$A_x := \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ad}^+ C_d & L_{ab}^+ C_b \\ B_d E_{da}^+ & A_{dd} & B_d E_{db} \\ 0 & L_{bd} C_d & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad E_x := \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_d \\ E_b \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

$$B_x := [B_{x0} \quad B_{x1}] := \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & 0 \\ B_{0d} & B_d \\ B_{0b} & 0 \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

和

$$C_x := \Gamma_o \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_d & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}, \quad D_x := \Gamma_o \begin{bmatrix} I_{m_d} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

从特殊坐标基的性质可推出 (A_x, B_x) 是可镇定的。接下来寻找一个矩阵 F_x 使得 $A_x + B_x F_x$ 在 -1 处没有特征值。然后定义 $\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{E}_x, \tilde{C}_x, \tilde{D}_x$ 和 \tilde{D}_{22} 为

$$\begin{cases} \tilde{A}_x := (A_x + B_x F_x + I)^{-1} (A_x + B_x F_x - I) \\ \tilde{B}_x := 2(A_x + B_x F_x + I)^{-2} B_x \\ \tilde{E}_x := 2(A_x + B_x F_x + I)^{-2} E_x \\ \tilde{C}_x := C_x + D_x F_x \\ \tilde{D}_x := D_x - (C_x + D_x F_x)(A_x + B_x F_x + I)^{-1} B_x \\ \tilde{D}_{22} := D_{22} - (C_x + D_x F_x)(A_x + B_x F_x + I)^{-1} E_x \end{cases} \quad (11.7)$$

步骤 11.3 解下面两个和 γ 无关的连续时代数 Riccati 方程和代数 Lya-

apunov 方程

$$0 = [\tilde{A}_x - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{C}_x] \tilde{S}_x + \tilde{S}_x [\tilde{A}_x - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{C}_x]^T - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{B}_x^T + \tilde{S}_x [\tilde{C}_x^T \tilde{C}_x - \tilde{C}_x^T \tilde{D}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{C}_x] \tilde{S}_x \quad (11.8)$$

$$0 = [\tilde{A}_x - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{C}_x] \tilde{T}_x + \tilde{T}_x [\tilde{A}_x - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{C}_x]^T - [\tilde{E}_x - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22}] [\tilde{E}_x - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22}]^T \quad (11.9)$$

的正定解 \tilde{S}_x 和半正定解 \tilde{T}_x 。为了后面的利用,定义

$$S_x := (A_x + B_x F_x + I) \tilde{S}_x (A_x^T + F_x^T B_x^T + I) / 2 \quad (11.10)$$

和

$$T_x := (A_x + B_x F_x + I) \tilde{T}_x (A_x^T + F_x^T B_x^T + I) / 2 \quad (11.11)$$

步骤 11.4 最小值 γ^* 为

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(\tilde{T}_x \tilde{S}_x^{-1})} = \sqrt{\lambda_{\max}(T_x S_x^{-1})} \quad (11.12)$$

现在已经完成了全信息反馈下的 γ^* 值计算。 ♣

我们有下面的定理。

定理 11.1 考虑式(11.1)所示的全信息系统。在假设 11.1~11.4 下,有

- (1) 由式(11.1)所计算出来的 γ^* 的确是 最小值;
- (2) 对于 $\gamma > \gamma^*$, 下式所给的半正定矩阵 $P(\gamma)$ 是满足定理 5.7 条件(2.1)~(2.3)的唯一解:

$$P(\gamma) = (\Gamma_s^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S_x - T_x/\gamma^2)^{-1} \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad (11.13)$$

而当 $\gamma < \gamma^*$ 时,这样的解 $P(\gamma)$ 并不存在。 ♣

证明 首先根据第 4 章的定理 4.5 和性质 4.4 可得 (A_x, B_x, C_x, D_x) 左可逆,在单位圆上没有不变零点。根据引理 6.3,可证明下面三个陈述是等价的:

- (1) 全信息系统(11.1)存在一个 γ 次优控制器。
- (2) 下面的辅助系统存在一个 γ 次优控制器:

$$\begin{cases} x_x(k+1) = A_x x_x(k) + B_x u_x(k) + E_x w_x(k) \\ y_x(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x_x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w_x(k) \\ h_x(k) = C_x x_x(k) + D_x u_x(k) + D_{22} w_x(k) \end{cases} \quad (11.14)$$

其中 A_x, B_x, E_x, C_x 和 D_x 如式(11.4)~式(11.6)所定义。根据假设, $D_{22} = 0$ 。

- (3) 下面的辅助系统存在一个 γ 次优控制器:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_x = \tilde{A}_x \tilde{x}_x + \tilde{B}_x \tilde{u}_x + \tilde{E}_x \tilde{w}_x \\ \tilde{y}_x = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tilde{w}_x \\ \tilde{h}_x = \tilde{C}_x \tilde{x}_x + \tilde{D}_x \tilde{u}_x + \tilde{D}_{22} \tilde{w}_x \end{cases} \quad (11.15)$$

其中 $\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{E}_x, \tilde{C}_x, \tilde{D}_x$ 和 \tilde{D}_{22} 如同式(11.7)所定义。

为了后面的应用,用 Σ_x 和 $\tilde{\Sigma}_x$ 分别表示矩阵四元组 (A_x, B_x, C_x, D_x) 和 $(\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{C}_x, \tilde{D}_x)$ 。根据推论 5.1 和定理 5.3,上面的第(2)条和第(3)条分别等价于:

(1)下面的离散时间代数 Riccati 方程存在一个解 $P_x > 0$:

$$P_x = A_x^T P_x A_x + C_x^T C_x - \begin{bmatrix} B_x^T P_x A_x + D_x^T C_x \\ E_x^T P_x A_x \end{bmatrix}^T G_x^{-1} \begin{bmatrix} B_x^T P_x A_x + D_x^T C_x \\ E_x^T P_x A_x \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

其中

$$G_x := \begin{bmatrix} D_x^T D_x + B_x^T P_x B_x & B_x^T P_x E_x \\ E_x^T P_x B_x & E_x^T P_x E_x + D_{22}^T D_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

使得下面的条件得以满足:

$$V_x := B_x^T P_x B_x + D_x^T D_x > 0 \quad (11.18)$$

$$R_x := \gamma^2 I - E_x^T P_x E_x + E_x^T P_x B_x V_x^{-1} B_x^T P_x E_x > 0 \quad (11.19)$$

(2)下面的连续时间代数 Riccati 方程存在一个解 $\tilde{P}_x > 0$:

$$0 = \tilde{P}_x \tilde{A}_x + \tilde{A}_x^T \tilde{P}_x + \tilde{C}_x^T \tilde{C}_x - \begin{bmatrix} \tilde{B}_x^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_x^T \tilde{C}_x \\ \tilde{E}_x^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_{22}^T \tilde{C}_x \end{bmatrix}^T \tilde{G}_x^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_x^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_x^T \tilde{C}_x \\ \tilde{E}_x^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_{22}^T \tilde{C}_x \end{bmatrix} \quad (11.20)$$

其中

$$\tilde{D}_{22}^T [I - \tilde{D}_x (\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T] \tilde{D}_{22} < \gamma^2 I \quad (11.21)$$

和

$$\tilde{G}_x := \begin{bmatrix} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_x & \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22} \\ \tilde{D}_{22}^T \tilde{D}_x & \tilde{D}_{22}^T \tilde{D}_{22} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

而且如果上面 Riccati 方程的解存在的话,则有关系

$$P_x = 2(A_x^T + I)^{-1} \tilde{P}_x (A_x + I)^{-1} \quad (11.23)$$

所以证明式(11.12)所示的 γ^* 是全信息系统(11.1)的最小值就等价于证明它是辅助系统(11.15)的最小值。可以首先证明辅助系统(11.15)的性质,然后利用第7章的结果。我们注意到算法步骤 11.2 中的矩阵 F_x 是预状态反馈,它只是为了应付 A_x 在 -1 处有特征值,使得 $I + A_x$ 的逆不存在的情况。为了简便但又不失一般性,后面假设 A_x 在 -1 处没有特征值和 $F_x = 0$ 。首先证明和辅助系统(11.15)相关的两个事实:对系统(11.15)存在一个下面的预扰动反馈:

$$\tilde{u}_x = \tilde{F}_w \tilde{w}_x + \tilde{v}_x \quad (11.24)$$

使得

$$(1) \tilde{D}_{22} + \tilde{D}_x \tilde{F}_w = 0;$$

$$(2) \text{Im}(\tilde{E}_x + \tilde{B}_x \tilde{F}_w) \subseteq \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_x) + \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_x).$$

实际上是要证明 \tilde{F}_w 为

$$\tilde{F}_w = -(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22} \quad (11.25)$$

为使证明简单,首先对式(11.14)中的系统应用预状态反馈律

$$u_x = F_x x_x + v_x = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E_{da}^+ & 0 & E_{db} \end{bmatrix} x_x + v_x \quad (11.26)$$

使得动态矩阵 $A_x + B_x F_x$ 具有下面的结构:

$$\begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ad}^+ C_d & L_{ab}^+ C_b \\ 0 & A_{dd} & 0 \\ 0 & L_{bd} C_d & A_{bb} \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

而系统(11.14)中的其他矩阵保持不变。所以假设 A_x 是式(11.27)所示的形式。不失一般性,也假设 A_{dd} 和 A_{bb} 在 -1 处没有特征值,则不难验证

$$(A_x + I)^{-1} = \begin{bmatrix} (A_{aa}^+ + I)^{-1} & X_1 & X_2 \\ 0 & (A_{dd} + I)^{-1} & 0 \\ 0 & -(A_{bb} + I)^{-1} L_{bd} C_d (A_{dd} + I)^{-1} & (A_{bb} + I)^{-1} \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

其中

$$X_1 = -(A_{aa}^+ + I)^{-1} [L_{ad}^+ - L_{ab}^+ C_b (A_{bb} + I)^{-1} L_{bd}] C_d (A_{dd} + I)^{-1} \quad (11.29)$$

$$X_2 = -(A_{aa}^+ + I)^{-1} L_{ab}^+ C_b (A_{bb} + I)^{-1} \quad (11.30)$$

和

$$\begin{aligned} \tilde{D}_x &= D_x - C_x (A_x + I)^{-1} B_x \\ &= \Gamma_o \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_{od} & -C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_d \\ X_3 & C_b (A_{bb} + I)^{-1} L_{bd} C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这里

$$X_3 = C_b (A_{bb} + I)^{-1} L_{bd} C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_{od} - C_b (A_{bb} + I)^{-1} B_{ob} \quad (11.31)$$

定义

$$\tilde{\Gamma}_o = \Gamma_o \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_{od} & -C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_d & 0 \\ X_3 & C_b (A_{bb} + I)^{-1} L_{bd} C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_d & I \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

注意 $\tilde{\Gamma}_o$ 是非奇异的。这是因为从特殊坐标基的性质(见定理 4.5)可得三元组 (A_{dd}, B_d, C_d) 是方可逆的,没有不变零点,因此 $C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_d$ 是非奇异的。然后有

$$\tilde{D}_x = \tilde{\Gamma}_0 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

和

$$\tilde{D}_{22} = -C_x(A_x + I)^{-1}E_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_d(A_{dd} + I)^{-1}E_d \\ C_b(A_{bb} + I)^{-1}L_{bd}C_d(A_{dd} + I)^{-1}E_d \end{bmatrix} = \tilde{\Gamma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ X_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

其中

$$X_4 = [C_d(A_{dd} + I)^{-1}B_d]^{-1}C_d(A_{dd} + I)^{-1}E_d \quad (11.35)$$

现在可见对系统(11.15)采用下面的预扰动反馈律:

$$\tilde{u}_x = \tilde{F}_w \tilde{w}_x + \tilde{v}_x = - \begin{bmatrix} 0 \\ X_4 \end{bmatrix} \tilde{w}_x + \tilde{v}_x \quad (11.36)$$

可保证 $\tilde{D}_{22} + \tilde{D}_x \tilde{F}_w = 0$ 。同时有

$$\tilde{E}_x + \tilde{B} \tilde{F}_w = 2(A_x + I)^{-2}(E_x + B_x \tilde{F}_w) = 2(A_x + I)^{-2} \begin{bmatrix} E_x^+ \\ E_d^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.37)$$

其中

$$E_d^* = E_d - B_d [C_d(A_{dd} + I)^{-1}B_d]^{-1}C_d(A_{dd} + I)^{-1}E_d \quad (11.38)$$

第一个事实得到证明。因为 \tilde{D}_x 有最大的列秩,所以上面的 \tilde{F}_w 等于 $-(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22}$ 。下面证明第二个事实,即

$$\text{Im}(\tilde{E}_x + \tilde{B}_x \tilde{F}_w) \subseteq \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_x) + \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_x)$$

现在对下面的系统进行几个非奇异的状态变换:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_x = \tilde{A}_x \tilde{x}_x + \tilde{B}_x \tilde{v}_x + (\tilde{E}_x + \tilde{B}_x \tilde{F}_w) \tilde{w}_x \\ \tilde{h}_x = \tilde{C}_x \tilde{x}_x + \tilde{D}_x \tilde{v}_x \end{cases} \quad (11.39)$$

把它变换到定理 4.5 的特殊坐标基的形式。首先定义一个状态变换

$$\tilde{T}_x = (A_x + I)^{-2} \quad (11.40)$$

尽管有些繁琐,由式(11.28)可得

$$\tilde{T}_x = \begin{bmatrix} (A_{aa}^+ + I)^{-2} & * & * \\ 0 & (A_{dd} + I)^{-2} & 0 \\ 0 & X_5 & (A_{bb} + I)^{-2} \end{bmatrix} \quad (11.41)$$

其中 * 代表无关紧要的矩阵,而

$$X_5 = -(A_{bb} + I)^{-1} [L_{bd}C_d(A_{dd} + I)^{-1} + (A_{bb} + I)^{-1}L_{bd}C_d] (A_{dd} + I)^{-1} \quad (11.42)$$

并且得到

$$\bar{A}_x := \tilde{T}_x^{-1} \tilde{A}_x \tilde{T}_x = (A_x - D)(A_x + D)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{aa}^+ - D)(A_{aa}^+ + D)^{-1} & * & 2(A_{aa}^+ + D)^{-1} L_{ab}^+ C_b (A_{bb} + D)^{-1} \\ 0 & (A_{dd} - D)(A_{dd} + D)^{-1} & 0 \\ 0 & 2(A_{bb} + D)^{-1} L_{bd} C_d (A_{dd} + D)^{-1} & (A_{bb} - D)(A_{bb} + D)^{-1} \end{bmatrix} \quad (11.43)$$

$$\bar{B}_x := \tilde{T}_x^{-1} \tilde{B}_x = 2\tilde{B}_x = 2 \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & 0 \\ B_{0d} & B_d \\ B_{0b} & 0 \end{bmatrix} \quad (11.44)$$

$$\bar{E}_x := \tilde{T}_x^{-1} (\tilde{E}_x + \tilde{B}_x \tilde{F}_w) = 2 \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_d^* \\ E_b \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } E_b = 0 \quad (11.45)$$

$$\bar{C}_x := \tilde{C}_x \tilde{T}_x$$

$$= \tilde{\Gamma}_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[C_d(A_{dd} + D)^{-1} B_d]^{-1} C_d (A_{dd} + D)^{-2} & 0 \\ 0 & -C_b (A_{bb} + D)^{-2} L_{bd} C_d (A_{dd} + D)^{-1} & C_b (A_{bb} + D)^{-2} \end{bmatrix} \quad (11.46)$$

$$\bar{D}_x := \tilde{D}_x = \tilde{\Gamma}_0 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.47)$$

为了把系统(11.39)变换到标准的特殊坐标基的形式,我们进行另一个状态变换以便使式(11.46)的 \bar{C}_x 右端项中的(3,2)块消失,下面的变换 \bar{T}_x 可满足这一点:

$$\bar{T}_x = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & L_{bd} C_d (A_{dd} + D)^{-1} & (A_{bb} + D)^2 \end{bmatrix} \quad (11.48)$$

可以非常容易地验证出

$$\hat{A}_x := \bar{T}_x^{-1} \bar{A}_x \bar{T}_x$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{aa}^+ - D)(A_{aa}^+ + D)^{-1} & * & 2(A_{aa}^+ + D) L_{ab}^+ C_b (A_{bb} + D) \\ 0 & (A_{dd} - D)(A_{dd} + D)^{-1} & 0 \\ 0 & 2(A_{bb} + D)^{-2} L_{bd} C_d (A_{dd} + D)^{-2} & (A_{bb} + D)^{-1} (A_{bb} - D) \end{bmatrix} \quad (11.49)$$

$$\hat{B}_x := \hat{B}_{x0} := \bar{T}_x^{-1} \bar{B}_x = 2 \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & 0 \\ B_{0d} & B_d \\ * & -(A_{bb} + D)^{-2} L_{bd} C_d (A_{dd} + D)^{-1} B_d \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

$$\begin{aligned}\hat{E}_x &:= \bar{T}_x^{-1} \bar{E}_x \\ &= 2 \begin{bmatrix} E_a^+ & & \\ & E_d^* & \\ (A_{bb} + I)^{-2} [E_b - L_{bd} C_d (A_{dd}^+ + I)^{-1} E_d^*] & & \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_d^* \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.51)$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_x &:= \begin{bmatrix} \hat{C}_{x0} \\ C_{x1} \end{bmatrix} := \bar{C}_x \bar{T}_x \\ &= \tilde{T}_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_d]^{-1} C_d (A_{dd} + I)^{-2} & 0 \\ 0 & \dots & C_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.52)$$

$$\hat{D}_x := \bar{D}_x = \tilde{D}_x \quad (11.53)$$

然后可得

$$\hat{A}_x - \hat{B}_{x0} \hat{C}_{x0} = \begin{bmatrix} (A_{aa}^+ - I)(A_{aa}^+ + I)^{-1} & * & 2(A_{aa}^+ + I)^{-1} L_{ab}^+ C_b (A_{bb} + I) \\ 0 & A_{aa}^* & 0 \\ 0 & 0 & (A_{bb} + I)^{-1} (A_{bb} - I) \end{bmatrix} \quad (11.54)$$

其中

$$A_{aa}^* = (A_{dd} - I)(A_{dd} + I)^{-1} + 2B_d [C_d (A_{dd} + I)^{-1} B_d]^{-1} C_d (A_{dd} + I)^{-2} \quad (11.55)$$

定义另一个非奇异状态变换:

$$\hat{T}_x = \begin{bmatrix} I & 0 & \hat{T}_* \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (11.56)$$

\hat{T}_* 是下面的一般 Lyapunov 方程的解:

$$\begin{aligned}(I - A_{aa}^+)(I + A_{aa}^+)^{-1} \hat{T}_* + \hat{T}_* (A_{bb} + I)^{-1} (A_{bb} - I) \\ = 2(A_{aa}^+ - I)^{-1} L_{ab}^+ C_b (A_{bb} + I)\end{aligned}$$

从文献[34]可知如果 A_{aa}^+ 和 A_{bb} 没有相同特征值, 则这样的解总是存在的。现在可以验证出式(11.54)中的 $\hat{A}_x - \hat{B}_{x0} \hat{C}_{x0}$ 中的(1,3)块被变换成0, 而其他块结构没有变化。由于 (A_{bb}, C_b) 的完全可观测性, $((A_{bb} + I)^{-1} (A_{bb} - I), C_b)$ 也是完全可观测的, 因此 \hat{T}_x 也把系统 $(\hat{A}_x, \hat{B}_x, \hat{C}_x, \hat{D}_x)$ 和 \hat{E}_x 变换到定理4.5的特殊坐标基的标准形式。现在根据特殊坐标基的性质可得

$$\text{Im}(\hat{E}_x) \subseteq \mathcal{V}^\circ(\hat{\Sigma}_x) + \mathcal{S}^\circ(\hat{\Sigma}_x) \quad (11.57)$$

其中 $\hat{\Sigma}_x$ 代表 $(\hat{A}_x, \hat{B}_x, \hat{C}_x, \hat{D}_x)$, 式(11.57)等价于

$$\text{Im}(\tilde{E}_x + \tilde{B}_x \tilde{F}_w) \subseteq \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_x) + \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_x)$$

第二个事实得证。

下面对辅助系统(11.15)应用预扰动反馈律:

$$\tilde{u}_x = \tilde{F}_w \tilde{w}_x + \tilde{v}_x = -(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22} \tilde{w}_x + \tilde{v}_x \quad (11.58)$$

同样的,该预反馈律不会影响系统(11.15)的 H_∞ 问题的解,或者方程(11.20)~(11.22)的解 \tilde{P}_x 。经过这个预反馈律后可得到下面的新系统:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_x = \tilde{A}_x \tilde{x}_x + \tilde{B}_x \tilde{v}_x + [\tilde{E}_x - \tilde{B}_x (\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22}] \tilde{w}_x \\ \tilde{y}_x = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tilde{w}_x \\ \tilde{h}_x = \tilde{C}_x \tilde{x}_x + \tilde{D}_x \tilde{v}_x + 0 \cdot \tilde{w}_x \end{cases} \quad (11.59)$$

现在根据定理 5.3 可知系统(11.59)的 γ 次优控制器存在条件等价于存在一个矩阵 $\tilde{P}_x > 0$, 使得

$$0 = \tilde{P}_x \tilde{A}_x + \tilde{A}_x^T \tilde{P}_x + \tilde{C}_x^T \tilde{C}_x - (\tilde{P}_x \tilde{B}_x + \tilde{C}_x^T \tilde{D}_x) (\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} (\tilde{P}_x \tilde{B}_x + \tilde{C}_x^T \tilde{D}_x)^T + \tilde{P}_x [\tilde{E}_x - \tilde{B}_x (\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22}] [\tilde{E}_x - \tilde{B}_x (\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22}]^T \tilde{P}_x / \gamma^2$$

得以满足。注意上面 Riccati 方程的解等同于满足方程(11.20)~(11.22)的解。

根据定理 4.7 可得 $(\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{C}_x, \tilde{D}_x)$ 是左可逆的,没有无限零点和稳定的不变零点,以及在单位圆上的不变零点。同时根据辅助系统(11.59)的第二个事实,它满足第 7 章中的假设 7.1~7.4。从第 7 章的结果可以很容易地证明

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(\tilde{T}_x \tilde{S}_x^{-1})} \quad (11.60)$$

对任何的 $\gamma > \gamma^*$, 方程(11.20)~(11.22)的正定解 \tilde{P}_x 为

$$\tilde{P}_x = (\tilde{S}_x - \tilde{T}_x / \gamma^2)^{-1} \quad (11.61)$$

则根据式(11.23)可得对任意 $\gamma > \gamma^*$, 方程(11.16)~(11.19)的正定解 P_x 为

$$P_x = 2(A_x^T + I)^{-1} (\tilde{S}_x - \tilde{T}_x / \gamma^2)^{-1} (A_x + I)^{-1} \quad (11.62)$$

因此 γ^* 也可通过下面的表达式计算出来:

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(T_x S_x^{-1})} \quad (11.63)$$

其中 S_x 和 T_x 分别由式(11.10)和式(11.11)所定义。而且易证

$$P(\gamma) = (\Gamma_s^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S_x - T_x / \gamma^2)^{-1} \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1}$$

是满足定理 5.7 条件(2.1)~(2.3)的唯一解。

最后注意到 $(\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{C}_x, \tilde{D}_x)$ 是左可逆的,没有无限零点和稳定的不变零点,以及在单位圆上的不变零点。因为 $(\tilde{A}_x, \tilde{B}_x)$ 是可控的,式(11.9)所示的 Lyapunov 方程的解 \tilde{T}_x 是半正定的,根据文献[115]可得式(11.8)所示的 Riccati 方程

解 \tilde{S}_x 是半正定的。实际上两个解是唯一的。由此完成算法的证明。 ◆

下面是一些评注。

注 11.1 在 $D_{22} \neq 0$ 的情况下, 假设 11.3 应该被下面的条件所取代:

(1) $\tilde{D}_{22} := D_{22} - C_x(A_x + I)^{-1}E_x$ 在 \tilde{D}_x 的值域空间中;

(2) $\text{Im}[\tilde{E}_x - \tilde{B}_x(\tilde{D}_x^T \tilde{D}_x)^{-1} \tilde{D}_x^T \tilde{D}_{22}] \subset \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_x) + \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_x)$ 。

算法可不受任何影响地进行。我们还要指出如果 (A, B, C_2, D_2) 是右可逆的, 那么 $(\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{C}_x, \tilde{D}_x)$ 就是可逆的, \tilde{D}_x 是非奇异方阵, $\mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_x) + \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_x) = \mathbb{R}^{n_x}$ 。因此上面两个条件自动得到满足。该结果首先由 Chen^[141] 得到。 ♣

注 11.2 如果假设 11.3 和 11.4 不满足, 则必须通过迭代的方法找到最小值 γ^* 的近似, 即找到最小的非负标量, 比如 $\tilde{\gamma}^* \geq 0$, 使得代数 Riccati 方程(11.20) 和(11.21)得到满足。 ♣

下面给出例子来演示上面的结果。

例 11.1 考虑一个全信息系统(11.1), 其参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.64)$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.65)$$

可以验证出 (A, B) 是可控的, (A, B, C_2, D_2) 既不是右可逆, 也不是左可逆的, 是非最小相位的, 在 0 和 2 处分别有两个不变零点。而且已经是定理 4.5 的特殊坐标基的形式, 由于 $E_b = 0$ 使得假设 11.3 满足。因此假设 11.1~11.4 全部满足。根据算法可得

$$\Gamma_s = I_5, \quad n_x = 3$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_x = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.50 & -0.50 & 0.50 \\ -0.25 & 0.75 & -0.25 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_x = \begin{bmatrix} 0.3125 & -0.1875 \\ -0.6250 & 1.3750 \\ 0.4375 & -1.0625 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_x = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.750 \\ -0.625 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{C}_x = C_x, \quad \tilde{D}_x = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 \\ 0.250 & -0.750 \\ -0.125 & 0.375 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.50 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

不难验证 $(\tilde{A}_x, \tilde{B}_x, \tilde{C}_x, \tilde{D}_x)$ 是左可逆的, 在 1 和 1/3 处分别有两个不变零点。解 Riccati 方程(11.8)和(11.9)可得

$$\tilde{S}_x = \begin{bmatrix} 0.227615 & -0.207890 & 0.019725 \\ -0.207890 & 1.202254 & -1.005636 \\ 0.019725 & -1.005636 & 1.014089 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{T}_x = \begin{bmatrix} 0.09375 & -0.062500 & 0.031250 \\ -0.062500 & 0.041667 & -0.020833 \\ 0.031250 & -0.020833 & 0.010417 \end{bmatrix}$$

最后得到

$$S_x = \begin{bmatrix} 0.562306 & -0.145898 & -0.145898 \\ -0.145898 & 0.618034 & -0.381966 \\ -0.145898 & -0.381966 & 0.618034 \end{bmatrix}, \quad T_x = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

及最小值

$$\gamma^* = 0.934173$$



11.3 输出反馈

本节对下面的离散时间测量反馈系统 Σ 给出一个非迭代算法来计算精确 γ^* :

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = C_1x(k) + D_1w(k) \\ h(k) = C_2x(k) + D_2u(k) + D_{22}w(k) \end{cases} \quad (11.66)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^r$ 是外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。为参考方便, 定义 Σ_p 为矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所代表的子系统, Σ_Q 为矩阵四元组 (A, E, C_1, D_1) 所代表的子系统。首先有下面

的假设:

假设 11.5: (A, B) 可镇定;

假设 11.6: Σ_P 在单位圆上没有不变零点;

假设 11.7: $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) + \mathcal{S}^\circ(\Sigma_P)$;

假设 11.8: (A, C_1) 可检测;

假设 11.9: Σ_Q 在单位圆上没有不变零点;

假设 11.10: $\text{Ker}(C_2) \supset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_Q) \cap \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q)$;

假设 11.11: $D_{22} = 0$.

♣

和 11.2 节一样,我们勾勒出计算 γ^* 的算法步骤。

步骤 11.5 对下面的系统定义另一个辅助全信息问题:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) + D_{22} w(k) \end{cases} \quad (11.67)$$

然后进行 11.2 节算法的步骤 11.1~11.3。为了后面的应用和避免记号上的混淆,我们把 Σ_P 的特殊坐标基的变换重命名为 Γ_{xP} , A_x 的维数为 n_{xP} , 还有式(11.10)所示的 S_x 和式(11.11)所示的 T_x 分别重命名为 S_{xP} 和 T_{xP} 。

步骤 11.6 对下面的系统定义另一个辅助全信息问题:

$$\begin{cases} x(k+1) = A^T x(k) + C_1^T u(k) + C_2^T w(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = E^T x(k) + D_1^T u(k) + D_{22}^T w(k) \end{cases} \quad (11.68)$$

再次进行 11.2 节的算法步骤 11.1~11.3。令 Σ'_Q 为 Σ_Q 的对偶系统,表示为 (A^T, C_1^T, E^T, D_1^T) 。我们把 Σ'_Q 的特殊坐标基状态变换重命名为 Γ_{xQ} , A_x 的维数为 n_{xQ} , 式(11.10)所示的 S_x 和式(11.11)所示的 T_x 分别重命名为 S_{xQ} 和 T_{xQ} 。

步骤 11.7 对以下矩阵

$$\Gamma_{xP}^{-1} (\Gamma_{xQ}^{-1})^T = \begin{bmatrix} * & * \\ * & \Gamma \end{bmatrix} \quad (11.69)$$

进行划分,其中 Γ 是一个 $n_{xP} \times n_{xQ}$ 矩阵,并定义一个定常矩阵

$$M = \begin{bmatrix} T_{xP} S_{xP}^{-1} + \Gamma S_{xQ}^{-1} \Gamma^T S_{xP}^{-1} & -\Gamma S_{xQ}^{-1} \\ -T_{xQ} S_{xQ}^{-1} \Gamma^T S_{xP}^{-1} & T_{xQ} S_{xQ}^{-1} \end{bmatrix} \quad (11.70)$$

步骤 11.8 最小值 γ^* 为

$$\gamma^* = \sqrt{\lambda_{\max}(M)} \quad (11.71)$$

其中 M 只有实和非负的特征值。

♣

证明 一旦对全信息情况得到了结果,算法的证明类似于第 7 章的 7.3 节中的证明。◆

下面是一些评注。

注 11.3 考虑满足假设 11.5~11.11 的离散时间系统(11.66)。则对任意 $\gamma > \gamma^*$, γ^* 由式(11.71)给出,下面的 $P(\gamma)$ 和 $Q(\gamma)$

$$P(\gamma) := (\Gamma_{xP}^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S_{xP} - T_{xP}/\gamma^2)^{-1} \end{bmatrix} \Gamma_{xP}^{-1} \quad (11.72)$$

和

$$Q(\gamma) := (\Gamma_{xQ}^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S_{xQ} - T_{xQ}/\gamma^2)^{-1} \end{bmatrix} \Gamma_{xQ}^{-1} \quad (11.73)$$

满足定理 5.7 的条件(2.1)~(2.7)。♣

注 11.4 对于离散时间 H_∞ 控制,无论 $D_{22} = 0$ 是否成立,全信息反馈系统的 γ^* 一般来说不同于全状态反馈系统。对于状态反馈情况,即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$,注意到子系统 Σ_Q 总是没有不变零点(因此没有单位圆上的不变零点)和左可逆。所以只要没有单位圆上的不变零点并满足假设 11.5~11.7,就可以应用上面的算法得到最小值 γ^* 。对该特殊情况,算法步骤 11.6 中的 Γ_{xQ} 、 n_{xQ} 、 S_{xQ} 和 T_{xQ} 可利用下面的简单过程直接得到:计算一个非奇异的变换 Γ_{xQ} ,使得

$$\Gamma_{xQ}^T E = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{E} \end{bmatrix} \quad (11.74)$$

其中 \hat{E} 是一个非奇异的 $n_{xQ} \times n_{xQ}$ 矩阵。则 S_{xQ} 和 T_{xQ} 分别为

$$S_{xQ} = (\hat{E}^{-1})^T \hat{E}^{-1} \quad \text{和} \quad T_{xQ} = 0 \quad (11.75)$$

因此

$$\gamma^* = [\lambda_{\max}(T_{xP} S_{xP}^{-1} + \Gamma S_{xQ}^{-1} \Gamma^T S_{xP}^{-1})]^{1/2} \quad (11.76)$$

一般情况下, $\gamma^* \geq \sqrt{\lambda_{\max}(T_{xP} S_{xP}^{-1})}$ 。♣

注 11.5 在 $D_{22} \neq 0$ 的情况下,假设 11.7 和 11.10 可以被注 11.1 中的和全信息系统(11.67)相关的条件,以及评注中的一组和全信息系统(11.68)相关的类似条件所替代。则求解过程可以同样进行并得到正确的结果。注意如果 Σ_P 是右可逆和 Σ_Q 是左可逆,则所有这些条件将自动满足。这就是文献[141]的结果。♣

注 11.6 如果几何条件假设 11.7、11.10 和 11.11 不满足,则需要用迭代的方法来确定最小值。可以通过找到最小的 $\tilde{\gamma}^*$,使得下面的条件能够满足:

(1) Riccati 方程

$$0 = \tilde{P}_x \tilde{A}_{xp} + \tilde{A}_{xp}^T \tilde{P}_x + \tilde{C}_{xp}^T \tilde{C}_{xp} - \begin{bmatrix} \tilde{B}_{xp}^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_{xp}^T \tilde{C}_{xp} \\ \tilde{E}_{xp}^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_{22p}^T \tilde{C}_{xp} \end{bmatrix}^T \\ \times \begin{bmatrix} \tilde{D}_{xp}^T \tilde{D}_{xp} & \tilde{D}_{xp}^T \tilde{D}_{22p} \\ \tilde{D}_{22p}^T \tilde{D}_{xp} & \tilde{D}_{22p}^T \tilde{D}_{22p} - (\tilde{\gamma}^*)^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{xp}^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_{xp}^T \tilde{C}_{xp} \\ \tilde{E}_{xp}^T \tilde{P}_x + \tilde{D}_{22p}^T \tilde{C}_{xp} \end{bmatrix}$$

有一个正定解 $\tilde{P}_x > 0$, 满足

$$\tilde{D}_{22p}^T [I - \tilde{D}_{xp} (\tilde{D}_{xp}^T \tilde{D}_{xp})^{-1} \tilde{D}_{xp}^T] \tilde{D}_{22p} < (\tilde{\gamma}^*)^2 I$$

注意上面 Riccati 方程中的所有子矩阵都在式 (11.7) 中定义, 只不过是步骤 11.5 中的辅助系统 (11.67)。

(2) Riccati 方程

$$0 = \tilde{Q}_x \tilde{A}_{xq} + \tilde{A}_{xq}^T \tilde{Q}_x + \tilde{C}_{xq}^T \tilde{C}_{xq} - \begin{bmatrix} \tilde{B}_{xq}^T \tilde{Q}_x + \tilde{D}_{xq}^T \tilde{C}_{xq} \\ \tilde{E}_{xq}^T \tilde{Q}_x + \tilde{D}_{22q}^T \tilde{C}_{xq} \end{bmatrix}^T \\ \times \begin{bmatrix} \tilde{D}_{xq}^T \tilde{D}_{xq} & \tilde{D}_{xq}^T \tilde{D}_{22q} \\ \tilde{D}_{22q}^T \tilde{D}_{xq} & \tilde{D}_{22q}^T \tilde{D}_{22q} - (\tilde{\gamma}^*)^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{xq}^T \tilde{Q}_x + \tilde{D}_{xq}^T \tilde{C}_{xq} \\ \tilde{E}_{xq}^T \tilde{Q}_x + \tilde{D}_{22q}^T \tilde{C}_{xq} \end{bmatrix}$$

具有正定解 $\tilde{Q}_x > 0$, 满足

$$\tilde{D}_{22q}^T [I - \tilde{D}_{xq} (\tilde{D}_{xq}^T \tilde{D}_{xq})^{-1} \tilde{D}_{xq}^T] \tilde{D}_{22q} < (\tilde{\gamma}^*)^2 I$$

同样注意到上面 Riccati 方程的子矩阵如同式 (11.7) 所定义, 只不过是步骤 11.6 中的辅助系统 (11.68)。

(3) 最后有耦合条件

$$\lambda_{\max} \{ \tilde{P}_x \Gamma \tilde{Q}_x \Gamma^T \} < (\tilde{\gamma}^*)^2 \quad (11.77)$$

其中 Γ 如同式 (11.69) 所定义。♣

下面给出例子演示本节算法。

例 11.2 考虑离散时间测量反馈系统 (11.66), 其中 A, B, E, C_2, D_2 和 D_{22} 如同 11.2 节中的例 11.1 所给。首先考虑全状态反馈情况, 即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 。根据算法以及评注 11.4 中的简化过程, 我们得到和全信息情况一样的矩阵, 以及

$$\Gamma_{sq} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad n_{xq} = 1$$

$$S_{xq} = 1, \quad T_{xq} = 0, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\gamma^* = 3.181043$$

现在考虑对给定系统测量输出为

$$C_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad D_1 = 0 \quad (11.78)$$

可以证明 (A, C_1) 是可检测的, (A, E, C_1, D_1) 是可逆的, 分别在 0, 0.618, -1.618 处有三个不变零点、一个 2 阶的无限零点。因此假设 11.10 自动满足。根据算法可得

$$M = \begin{bmatrix} 52.08746 & 76.55250 & 66.46233 & -0.95905 & 2.61803 & -4.23607 \\ 92.57546 & 138.46401 & 120.13777 & -1.65303 & 5.23607 & -7.85410 \\ 28.03444 & 42.12461 & 36.88854 & -0.69398 & 2.61803 & -2.61803 \\ 19.20270 & 29.28949 & 24.96658 & 0 & 0 & 1.44097 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -46.97871 & -70.77709 & -61.686918 & 0.95905 & -3.61803 & 4.23607 \end{bmatrix}$$

和

$$\gamma^* = 15.16907$$



11.4 在单位圆上有零点的对象

本节讨论测量反馈系统(11.66) γ^* 的非迭代算法, 它的子系统 Σ_P 和/或 Σ_Q 在单位圆上有不变零点。我们假设 (A, B) 可镇定和 (A, C_1) 可检测。令 F 和 K 是具有适当维数的矩阵, 使得 $A + BF$ 和 $A + KC_1$ 在 -1 处没有特征值, 定义

$$\begin{cases} \tilde{A}_P := (A + BF + I)^{-1}(A + BF - I) \\ \tilde{B}_P := 2(A + BF + I)^{-1}B \\ \tilde{E}_P := 2(A + BF + I)^{-1}E \\ \tilde{C}_{2P} := (C_2 + D_2F)(A + BF + I)^{-1} \\ \tilde{D}_{2P} := D_2 - (C_2 + D_2F)(A + BF + I)^{-1}B \\ \tilde{D}_{22P} := D_{22} - (C_2 + D_2F)(A + BF + I)^{-1}E \end{cases} \quad (11.79)$$

和

$$\begin{cases} \tilde{A}_Q := (A + KC_1 + I)^{-1}(A + KC_1 - I) \\ \tilde{C}_{1Q} := 2C_1(A + KC_1 + I)^{-1} \\ \tilde{C}_{2Q} := 2C_2(A + KC_1 + I)^{-1} \\ \tilde{E}_Q := (A + KC_1 + I)^{-1}(E + KD_1) \\ \tilde{D}_{1Q} := D_1 - C_1(A + KC_1 + I)^{-1}(E + KD_1) \\ \tilde{D}_{22Q} := D_{22} - C_2(A + KC_1 + I)^{-1}(E + KD_1) \end{cases} \quad (11.80)$$

令 $\tilde{\Sigma}_P$ 表示由 $(\tilde{A}_P, \tilde{B}_P, \tilde{C}_{2P}, \tilde{D}_{2P})$ 所组成的系统, $\tilde{\Sigma}_Q$ 表示由 $(\tilde{A}_Q, \tilde{C}_{1Q}, \tilde{E}_Q, \tilde{D}_{1Q})$ 所组成的系统。我们也给出下面的假设:

假设 11.12: $\text{Im}(\tilde{D}_{22P}) \subset \text{Im}(\tilde{D}_{2P})$;

假设 11.13: $\text{Im}[\tilde{E}_P - \tilde{B}_P(\tilde{D}_{2P}^T \tilde{D}_{2P})^\dagger \tilde{D}_{2P}^T \tilde{D}_{22P}] \subset \mathcal{V}^-(\tilde{\Sigma}_P) + \mathcal{S}^-(\tilde{\Sigma}_P)$;

假设 11.14: $\text{Im}(\tilde{D}_{22Q}^T) \subset \text{Im}(\tilde{D}_{1Q}^T)$;

假设 11.15: $\text{Im}[\tilde{C}_{2Q}^T - \tilde{C}_{1Q}^T(\tilde{D}_{1Q} \tilde{D}_{1Q}^T)^\dagger \tilde{D}_{1Q} \tilde{D}_{22Q}^T] \subset \mathcal{V}^-(\tilde{\Sigma}'_Q) + \mathcal{S}^-(\tilde{\Sigma}'_Q)$. ♣

可以证明假设 11.12~11.15 和式(11.79)、式(11.80)中的 F 和 K 的选择无关。对于子系统在单位圆上有不变零点的对象来说, γ^* 的计算只要对第 7 章的 7.4 节中的算法稍加修改即可。也就是步骤 7.8 和 7.12 中的 Σ_P 被 $\tilde{\Sigma}_P$ 所替代, 而式(7.92)被替换为

$$\Gamma_{sP}^{-1} [\tilde{E}_P - \tilde{B}_P (\tilde{D}_{2P}^T \tilde{D}_{2P})^\dagger \tilde{D}_{2P}^T \tilde{D}_{22P}] = \begin{bmatrix} E_{aP}^+ \\ E_{bP} \\ E_{aP}^0 \\ E_{aP}^- \\ E_{cP} \\ E_{dP} \end{bmatrix} \quad (11.81)$$

还有步骤 7.9 和 7.12 中的 Σ'_Q 被 $\tilde{\Sigma}'_Q$ 所替代, 而式(7.109)被替换为

$$\Gamma_{sQ}^{-1} [\tilde{C}_{2Q}^T - \tilde{C}_{1Q}^T (\tilde{D}_{1Q} \tilde{D}_{1Q}^T)^\dagger \tilde{D}_{1Q} \tilde{D}_{22Q}^T] = \begin{bmatrix} E_{sQ}^+ \\ E_{bQ} \\ E_{sQ}^0 \\ E_{sQ}^- \\ E_{cQ} \\ E_{dQ} \end{bmatrix} \quad (11.82)$$

算法的其余部分保持不变。

第 12 章 离散时间 H_∞ 问题的解

12.1 导 论

本章的内容是全状态反馈、全信息反馈和一般测量反馈情况下的离散时间 H_∞ 控制问题,目的是要得到离散时间 H_∞ 控制问题的解。一条路径是通过双线性变换(见第 4 章)把离散时间 H_∞ 最优控制问题转化到等价的连续时间 H_∞ 最优控制问题,然后可得到作为辅助问题解的连续时间控制器,再利用逆双线性变换(见第 4 章)把它变回到等价的离散时间系统;另一条路径是根据原系统的性能要求直接在离散时间框架下求解,这种方法使得直接观察某些物理参数的影响成为可能。最后,本章的新颖之处在于我们证明了如果某些状态或扰动能够直接观测到,则有可能得到一个降阶控制器。这一结果和第 8 章的连续时间降阶控制器相对应。实际上,可以认为本章的结果和第 8 章的结果相对应。

本章结果和文献[23]相类似,但是方式有很大的不同。本章所提出的方法在软件实现方面比较容易。

12.2 全信息和状态反馈

首先考虑下面的全信息反馈系统:

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) + D_{22} w(k) \end{cases} \quad (12.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}^{n+q}$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。同样定义 Σ_P 为矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所表示的子系统。假设 Σ_P 在单位圆上没有不变零点, H_∞ 范数的最小值为 γ^* 。我们要设计一个全信息状态反馈律

$$u(k) = F_1 x(k) + F_2 w(k) \quad (12.2)$$

当把该控制律应用于系统(12.1)时,所形成的闭环系统是渐近稳定的,从 w 到 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于给定的 $\gamma > \gamma^*$ 。

下面给出计算 F_1 和 F_2 的算法步骤。

步骤 12.1 不失一般性但为了简便起见,假设四元组 (A, B, C_2, D_2) 所代表

的 Σ_P 被划分为式(4.13)所示的形式。然后把 Σ_P 变换到第 4 章所描述的特殊坐标基下,即找到非奇异的变换 Γ_s, Γ_i 和 Γ_o , 使得

$$\Gamma_s^{-1}(A - B_0 C_{2,0})\Gamma_s = \begin{bmatrix} A_{cc} & B_c E_{ca}^- & B_c E_{ca}^+ & L_{cd} C_d & L_{cb} C_b \\ 0 & A_{aa}^- & 0 & L_{ad}^- C_d & L_{ab}^- C_b \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ad}^+ C_d & L_{ab}^+ C_b \\ B_d E_{dc} & B_d E_{da}^- & B_d E_{da}^+ & A_{dd} & B_d E_{db} \\ 0 & 0 & 0 & L_{bd} C_d & A_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_o^{-1} \begin{bmatrix} C_{2,0} \\ C_{2,1} \end{bmatrix} \Gamma_s = \begin{bmatrix} C_{0c} & C_{0a}^- & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_s^{-1} [B_0 \quad B_1] \Gamma_i = \begin{bmatrix} B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0d} & B_d & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o^{-1} D_2 \Gamma_i = \begin{bmatrix} I_{m_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意对原先 SCB 中的状态变换引入了另一个排列矩阵,使得新状态变量的排序为

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ x_a^- \\ x_a^+ \\ x_d \\ x_b \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

接下来计算

$$\Gamma_s^{-1} E / \gamma = \begin{bmatrix} E_c \\ E_a^- \\ E_a^+ \\ E_d \\ E_b \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

步骤 12.2 令 F_c 是任何使得 $A_{cc} - B_c F_c$ 的特征值在单位圆内的具有适当维数的矩阵。 (A_{cc}, B_c) 的完全能控性可保证这一点。

步骤 12.3 定义 A_x, B_x, E_x, C_x 和 D_x 为

$$A_x := \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ad}^+ C_d & L_{ab}^+ C_b \\ B_d E_{da}^+ & A_{dd} & B_d E_{db} \\ 0 & L_{bd} C_d & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad E_x := \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_d \\ E_b \end{bmatrix} \quad (12.5)$$

$$B_x := \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & 0 \\ B_{0d} & B_d \\ B_{0b} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22x} := D_{22}/\gamma \quad (12.6)$$

和

$$C_x := \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_d & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}, \quad D_x := \Gamma_0 \begin{bmatrix} I_{m_d} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

步骤 12.4 解下面的离散时间代数 Riccati 方程的解 $P_x > 0$:

$$P_x = A_x^T P_x A_x + C_x^T C_x - \begin{bmatrix} B_x^T P_x A_x + D_x^T C_x \\ E_x^T P_x A_x \end{bmatrix}^T G_x^{-1} \begin{bmatrix} B_x^T P_x A_x + D_x^T C_x \\ E_x^T P_x A_x \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

其中

$$G_x := \begin{bmatrix} D_x^T D_x + B_x^T P_x B_x & B_x^T P_x E_x \\ E_x^T P_x B_x & E_x^T P_x E_x + D_{22x}^T D_{22x} - I \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

由于 (A_x, B_x, C_x, D_x) 是左可逆的, 只有不稳定的不变零点, 只要 $\gamma > \gamma^*$ 就总能保证 P_x 的存在性。实际上可利用第 4 章的精确方法来得到 P_x 。为了后面的输出反馈情况的应用, 我们计算

$$X = (\Gamma_s^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_x \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad (12.10)$$

步骤 12.5 接下来计算

$$F_{1x} = (B_x^T P_x B_x + D_x^T D_x)^{-1} (B_x^T P_x A_x + D_x^T C_x) \quad (12.11)$$

和

$$F_{2x} = (B_x^T P_x B_x + D_x^T D_x)^{-1} (B_x^T P_x E_x + D_x^T D_{22x}) \quad (12.12)$$

然后把 F_{1x} 划分为

$$F_{1x} = \begin{bmatrix} F_{0ax}^+ & F_{0dx} & F_{0bx} \\ F_{dax}^+ & F_{ddx} & F_{dbx} \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

步骤 12.6 最后分别得到增益矩阵 F_1 和 F_2 分别为

$$F_1 = -\Gamma_i \begin{bmatrix} C_{0c} & C_{0a}^- & C_{0a}^+ + F_{0ax}^+ & C_{0d} + F_{0dx} & C_{0b} + F_{0bx} \\ E_{dc} & E_{da}^- & F_{dax}^+ & F_{ddx} & F_{dbx} \\ F_c & * & * & * & * \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad (12.14)$$

和

$$F_2 = -\Gamma_i \begin{bmatrix} F_{2x} \\ * \end{bmatrix} \gamma \quad (12.15)$$

其中 * 是具有适当维数的任意矩阵。



我们有下面的定理。

定理 12.1 考虑式(12.1)所示的全信息离散时间反馈系统。在全信息反馈律下,有

$$u(k) = F_1 x(k) + F_2 w(k) \quad (12.16)$$

F_1 和 F_2 分别由式(12.14)和式(12.15)给出,则闭环系统是渐近稳定的,从扰动 w 到被控输出 h 的 H_∞ 范数小于 γ 。♣

证明 不难知道由全信息系统(12.1)和控制律(12.16)所形成的闭环系统的极点由 $A_\infty - B_c F_c$ 、 A_m 和 $A_x - B_x F_{1x}$ 给出。注意到 $A_\infty - B_c F_c$ 和 A_m 都是渐近稳定的。因此闭环系统稳定的充分和必要条件是 $A_x - B_x F_{1x}$ 是稳定的。而且容易证明从 w 到 h 的闭环传递矩阵 T_{hw} 等于 $\gamma T_{h_x w_x}$, $T_{h_x w_x}$ 是以下闭环系统的从 w_x 到 h_x 的传递矩阵,辅助系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_x = A_x x_x + B_x u_x + E_x w_x \\ y_x = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x_x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w_x \\ h_x = C_x x_x + D_x u_x + D_{22x} w_x \end{cases} \quad (12.17)$$

和全信息控制律为

$$u_x = -F_{1x} x_x - F_{2x} w_x \quad (12.18)$$

因为 (A_x, B_x, C_x, D_x) 左可逆,只有不稳定的不变零点,根据文献[23]的结果,只要 $\gamma > \gamma^*$, Riccati 方程(12.8)就有正定解。而且有 $A_x - B_x F_{1x}$ 是渐近稳定的, $\|T_{h_x w_x}\|_\infty < 1$ 。因此定理 12.1 的结果得证。◆

下面给出数值例子演示上面的结果。

例 12.1 考虑一个离散时间全信息系统(12.1),矩阵 A, B, E, C_2, D_2 和 D_{22} 和 11 章的例 11.1 一样。该问题的最小值在例 11.1 中为 $\gamma^* = 0.934173$ 。我们选择一个稍大于 γ^* 的 $\gamma = 0.934174$ 。应用上面的算法得到

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.745354 & -1.078688 & -1.078688 \\ -1 & -1 & -1.412022 & -1.872678 & -1.872678 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -0.872677 \\ -1.206011 \\ 0 \end{bmatrix}$$

以及闭环系统极点 $\lambda(A + BF_1) = \{0, 0, 0, 0, 0.38197\}$ 。从 w 到 h 的闭环传递矩阵的奇异值如图 12.1 所示, H_∞ 范数显然小于给定的 $\gamma = 0.934174$ 。♣

在第 11 章已经指出对于离散时间系统、全信息反馈系统和下面的全状态反馈系统有不同的最小值,即

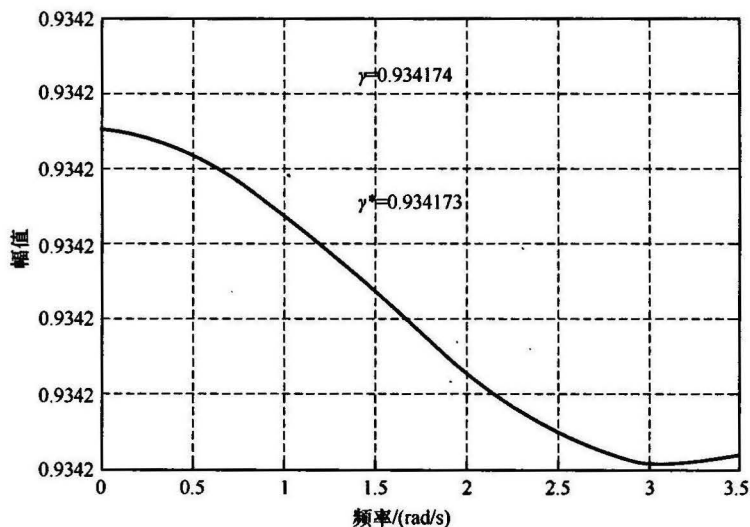


图 12.1 全信息反馈下的 T_{hw} 的奇异值

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = x(k) \\ h(k) = C_2x(k) + D_2u(k) + D_{22}w(k) \end{cases} \quad (12.19)$$

令 γ^* 为全状态反馈下的最小值。则对任何 $\gamma > \gamma^*$ ，下面的算法将产生一个静态的状态反馈律，使得闭环系统稳定，从 w 到 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数的界满足要求。

步骤 12.7~12.10 这些步骤分别等于步骤 12.1~12.4。

步骤 12.11 计算

$$H_x := B_x^T P_x B_x + D_x^T D_x + (B_x^T P_x E_x + D_x^T D_{22x}) \times (I - D_{22x}^T D_{22x} - E_x^T P_x E_x)^{-1} (E_x^T P_x B_x + D_{22x}^T D_x) \quad (12.20)$$

和

$$F_x := H_x^{-1} [B_x^T P_x A_x + D_x^T C_x + (B_x^T P_x E_x + D_x^T D_{22x}) \times (I - D_{22x}^T D_{22x} - E_x^T P_x E_x)^{-1} (E_x^T P_x A_x + D_{22x}^T C_x)] \quad (12.21)$$

然后把 F_x 进行如下划分：

$$F_x = \begin{bmatrix} F_{0ax}^+ & F_{0dx} & F_{0bx} \\ F_{dax}^+ & F_{ddx} & F_{dbx} \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

步骤 12.12 增益矩阵 F 为

$$F = -\Gamma_i \begin{bmatrix} C_{0c} & C_{0a}^- & C_{0a}^+ + F_{0ax}^+ & C_{0d} + F_{0dx} & C_{0b} + F_{0bx} \\ E_{dc} & E_{da}^- & F_{dax}^+ & F_{ddx} & F_{dbx} \\ F_c & * & * & * & * \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad (12.23)$$

其中 $*$ 是一些具有适当维数的任意矩阵。 ♣

和定理 12.1 的证明中的推理相类似, 对于静态控制律

$$u(k) = Fx(k) \quad (12.24)$$

其中 F 由式(12.23)给出, 我们可以证明该控制可以实现闭环稳定性, 并且使得从 w 到 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于给定的 γ 。我们用下面的例子来演示。

例 12.2 考虑离散时间全状态反馈系统(12.19), 矩阵 A 、 B 、 E 、 C_2 、 D_2 和 D_{22} 和第 11 章的例 11.1 一样。例 11.2 计算了该问题的最小值 $\gamma^* = 3.181043$, 稍大于 γ^* 。根据上面的算法得到

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.432563 & -0.885373 & -0.885373 \\ -1 & -1 & -1.479753 & -1.914538 & -1.914538 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

闭环系统极点为 $\lambda(A+BF) = \{0, 0, 0, 0.27093, 0.38197\}$, 从 w 到 h 的闭环传递矩阵的奇异值如图 12.2 所示, 很显然 H_∞ 范数小于给定的 $\gamma = 3.181044$ 。 ♣

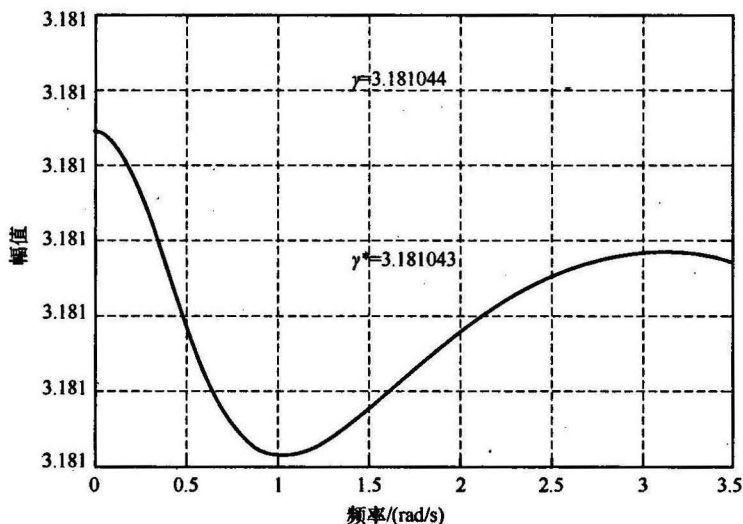


图 12.2 状态反馈下的 T_{hw} 奇异值

12.3 全阶输出反馈

对下面的测量反馈系统构造离散时间 H_∞ 控制问题的解:

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = C_1x(k) + D_1w(k) \\ h(k) = C_2x(k) + D_2u(k) + D_{22}w(k) \end{cases} \quad (12.25)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^r$ 是 Σ 的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^l$ 是外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}^l$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。同样为了参照方便, 定义 Σ_P 为由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所表示的子系统, Σ_Q 为由矩阵四元组 (A, E, C_1, D_1) 所表示的子系统。本节中假设 Σ_P 和 Σ_Q 在单位圆上没有不变零点。

令 γ^* 为式(12.25)所示的系统 Σ 的 H_∞ 范数最小值。给定一个标量 $\gamma > \gamma^* \geq 0$, 下面的算法可得到一个测量反馈控制律, 使得闭环系统是内稳定的, 并且 $\|T_{hw}\|_\infty < \gamma$ 。

步骤 12.13 对下面的系统定义一个辅助的全信息问题:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = C_2x(k) + D_2u(k) + D_{22}w(k) \end{cases} \quad (12.26)$$

然后进行 12.2 节的算法步骤 12.1~12.4, 得到一个半正定矩阵 X 。令 $P := X$, 并计算

$$V := B^T P B + D_2^T D_2, \quad (12.27)$$

和

$$R := \gamma^2 I - D_{22}^T D_{22} - E^T P E + (E^T P B + D_{22}^T D_2) V^\dagger (B^T P E + D_{22}^T D_{22}) \quad (12.28)$$

其中 \dagger 表示 Moore-Penrose(伪)逆。可以证明 $R > 0$ 。接下来计算

$$A_s := A - B V^\dagger (B^T P A + D_{22}^T C_2) \quad (12.29)$$

$$C_s := C_2 - D_2 V^\dagger (B^T P A + D_{22}^T C_2) \quad (12.30)$$

和

$$A_P := A + E R^{-1} (E^T P A_s + D_{22}^T C_s)$$

$$E_P := E R^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_{1P} := C_1 + D_1 R^{-1} (E^T P A_s + D_{22}^T C_s)$$

$$C_{2P} := (V^{\frac{1}{2}})^\dagger [B^T P A + D_{22}^T C_2 + (B^T P E + D_{22}^T D_{22}) R^{-1} (E^T P A_s + D_{22}^T C_s)]$$

$$D_{1P} := D_1 R^{-\frac{1}{2}}$$

$$D_{2P} := V^{\frac{1}{2}}$$

$$D_{22P} := (V^{\frac{1}{2}})^\dagger (B^T P E + D_{22}^T D_{22}) R^{-\frac{1}{2}}$$

步骤 12.14 对下面的系统定义另一个辅助系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A^T x(k) + C_1^T u(k) + C_2^T w(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = E^T x(k) + D_1^T u(k) + D_{22}^T w(k) \end{cases} \quad (12.31)$$

再次进行 12.2 节的算法步骤 12.1~12.4, 得到另一个半正定矩阵 X , 并令 $Q := X$ 和

$$Y := (\gamma^2 I - QP)^{-1}Q \quad (12.32)$$

步骤 12.15 接下来计算

$$\begin{cases} W_P := D_{1P}D_{1P}^T + C_{1P}YC_{1P}^T \\ S_P := (C_{2P}YC_{1P} + D_{22P}D_{1P}^T)W_P^\dagger(C_{1P}YC_{2P} + D_{1P}D_{22P}^T \\ \quad + \gamma^2 I - D_{22P}D_{22P}^T - C_{2P}YC_{2P}^T) \\ A_Z := A_P - (A_PYC_{1P}^T + E_P D_{1P}^T)W_P^\dagger C_{1P} \\ E_Z := E_P - (A_PYC_{1P}^T + E_P D_{1P}^T)W_P^\dagger D_{1P} \end{cases} \quad (12.33)$$

和

$$\begin{cases} A_{PY} := A_P + (A_ZYC_{2P}^T + E_Z D_{22P}^T)S_P^{-1}C_{2P} \\ B_{PY} := B + (A_ZYC_{2P} + E_Z D_{22P}^T)S_P^{-1}D_{2P} \\ E_{PY} := [(A_ZYC_{2P} + E_Z D_{22P}^T)S_P^{-1}(C_{2P}YC_{1P} + D_{22P}D_{1P}^T) \\ \quad + A_PYC_{1P}^T + E_P D_{1P}^T](W_P^{\frac{1}{2}})^\dagger \\ C_{2PY} := S_P^{-\frac{1}{2}}C_{2P} \\ D_{1PY} := W_P^{\frac{1}{2}} \\ D_{2PY} := S_P^{-\frac{1}{2}}D_{2P} \\ D_{22PY} := S_P^{-\frac{1}{2}}(C_{2P}YC_{1P}^T + D_{22P}D_{1P}^T)(W_P^{\frac{1}{2}})^\dagger \end{cases} \quad (12.34)$$

我们可以证明 ① $(A_{PY}, B_{PY}, C_{2PY}, D_{2PY})$ 是右可逆和最小相位, 没有无限零点; ② $(A_{PY}, B_{PY}, C_{1PY}, D_{1PY})$ 是左可逆和最小相位, 没有无限零点, 而且存在一个适当的定常矩阵 X_{PY} , 使得 $D_{2PY} + D_{2PY}X_{PY}D_{1PY} = 0$ 。

步骤 12.16 令

$$F_{1PY} := -D_{2P}^\dagger C_{2P} + (I - D_{2P}^\dagger D_{2P})F_0 \quad (12.35)$$

$$F_{2PY} := -D_{2P}^\dagger C_{22PY} \quad (12.36)$$

其中 F_0 使得 $A_P + BF_{1PY} = A_{PY} + B_{PY}F_{1PY}$ 的所有特征值在单位圆内。同时令

$$K_{1PY} := -E_{PY}D_{1PY}^\dagger + K_0(I - D_{1PY}D_{1PY}^\dagger) \quad (12.37)$$

$$K_{2PY} := -D_{1PY}^\dagger \quad (12.38)$$

其中 K_0 使得 $A_{PY} + K_{1PY}C_{1P}$ 是稳定的。我们要指出计算上述增益矩阵的系统化过程将在下一章给出。

步骤 12.17 最后得到测量输出反馈控制律:

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}}v(k) + B_{\text{cmp}}y(k) \\ u(k) = C_{\text{cmp}}v(k) + D_{\text{cmp}}y(k) \end{cases} \quad (12.39)$$

其中

$$\begin{cases} D_{\text{cmp}} := -F_{2PY}K_{2PY} \\ C_{\text{cmp}} := F_{1PY} - D_{\text{cmp}}C_{1P} \\ B_{\text{cmp}} := B_{PY}D_{\text{cmp}} - K_{1PY} \\ A_{\text{cmp}} := A_{PY} + B_{PY}C_{\text{cmp}} + K_{1PY}C_{1P} \end{cases} \quad (12.40)$$

显然 $v \in \mathbb{R}^n$, 即控制器 Σ_{cmp} 和系统 Σ 有相同的动态阶次。 ♣

我们有下面的定理。

定理 12.2 考虑式(12.25)给定的离散时间系统 Σ 和式(12.39)给定的控制器 Σ_{cmp} , 其中 $A_{\text{cmp}}, B_{\text{cmp}}, C_{\text{cmp}}$ 和 D_{cmp} 由式(12.40)给出。同时令 $\gamma > \gamma^*$ 给定, 则

- (1) 由 Σ 和 Σ_{cmp} 所形成的闭环系统是渐近稳定的;
- (2) 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ 。 ♣

证明 定理的证明可分为两步: 第一步是证明以下两点等价:

(1) 由式(12.25)给定的系统 Σ 和式(12.39)给定的控制器 Σ_{cmp} 所形成的闭环系统是内稳定的, 从 w 到 h 的闭环传递矩阵 $T_{hw}(\Sigma \times \Sigma_{\text{cmp}})$ 的 H_∞ 范数小于 γ 。

(2) 由辅助系统 Σ_{PY} 和式(12.39)给定的控制器 Σ_{cmp} 是内稳定的, Σ_{PY} 为

$$\begin{cases} x_{PY}(k+1) = A_{PY}x_{PY}(k) + B_{PY}u(k) + E_{PY}w_{PY}(k) \\ y(k) = C_{1P}x_{PY}(k) + D_{1PY}w_{PY}(k) \\ h_{PY}(k) = C_{2PY}x_{PY}(k) + D_{2PY}u(k) + D_{22PY}w_{PY}(k) \end{cases} \quad (12.41)$$

从 w_{PY} 到 h_{PY} 的闭环传递矩阵 $T_{h_{PY}w_{PY}}(\Sigma_{PY} \times \Sigma_{\text{cmp}})$ 的 H_∞ 范数小于 γ 。

第二步是证明在 Σ_{PY} 和 Σ_{cmp} 所组成的闭环系统中, 从 w_{PY} 到 h_{PY} 的闭环系统是内稳定的, 实际上是对所有频率响应都为零, 即 $T_{h_{PY}w_{PY}}(\Sigma_{PY} \times \Sigma_{\text{cmp}}) \equiv 0$ 。显然 $\|T_{h_{PY}w_{PY}}(\Sigma_{PY} \times \Sigma_{\text{cmp}})\|_\infty = 0 < \gamma$ 。因此 $\Sigma_{PY} \times \Sigma_{\text{cmp}}$ 是内稳定的且 $\|T_{hw}(\Sigma \times \Sigma_{\text{cmp}})\|_\infty < \gamma$ 。对更加详细证明感兴趣的读者可以参考文献[23]。 ◆

注 12.1 从上面的证明中已经可以清楚地看出, 对原系统(12.25)设计一个 γ 次优控制律等价于对辅助系统(12.41)解具有内稳定的 H_∞ 干扰解耦问题。我们可以应用第 13 章的系统化步骤来找到这样的控制律。 ♣

下面是一个演示例子。

例 12.3 考虑离散时间系统(12.25), $A, B, E, C_2, D_2, D_{22}$ 和第 11 章的例 11.1 一样, 且

$$C_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad D_1 = 0 \quad (12.42)$$

该问题的最小值在例 11.2 中计算为 $\gamma^* = 15.16907$ 。我们选择一个正标量 $\gamma = 15.17$ 。根据本节算法可得到一个全阶测量反馈控制律(12.39), 其中

$$A_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.005710 & 1.003592 & -9.516228 \\ 0 & 0 & 0.005710 & 1.003592 & -3.303781 \\ 0 & 0 & 0.691710 & 0.191432 & -1.876073 \\ 0 & 0 & -0.310193 & -0.809744 & 3.217071 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3.281899 \end{bmatrix}$$

$$B_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 10.519757 \\ 4.307309 \\ 2.067505 \\ -4.026815 \\ 4.281899 \end{bmatrix}, \quad D_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} -4.043756 \\ -14.546573 \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.314000 & -0.812097 & 3.231659 \\ -1 & -1 & -1.315903 & -1.813273 & 12.733300 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从 w 到 h 的闭环传递矩阵的奇异值图 12.3 可得

$$\|T_{hw}(\Sigma \times \Sigma_{\text{cmp}})\|_\infty < \gamma = 15.17 \quad (12.43)$$

闭环系统的极点为 $-0.596025, 0.618045, 0.433068, 0.382376, -0.237186, -0.000212, 0, 0, 0$ 和 0 , 这些全部在单位圆内。 ♣

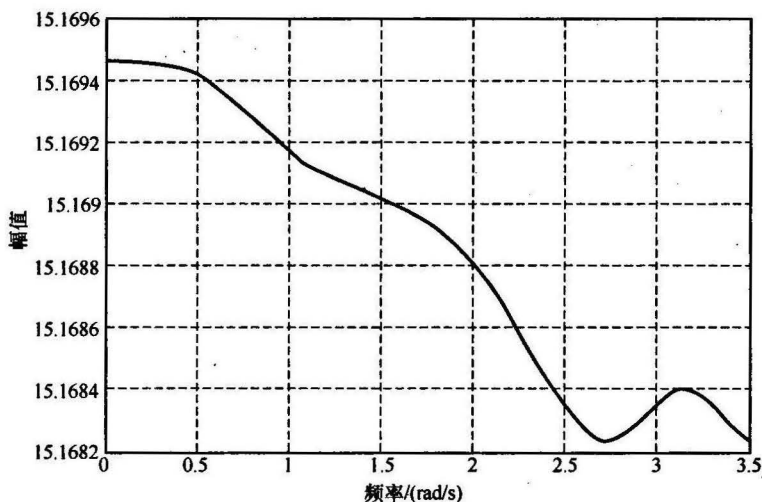


图 12.3 全阶输出反馈下的 T_{hw} 的奇异值

12.4 降阶输出反馈

本节中,我们证明对于一般化 H_∞ 控制问题,总可以找到动态阶次小于对象阶次的次优控制器,而且是降阶观测器型结构。这一结果类似于第 8 章所得到的对连续时间问题的结果。不失一般性,对 12.3 节的系统 Σ_{PY} 定义一个降阶的观测器型控制器:

$$\begin{cases} x_{PY}(k+1) = A_{PY}x_{PY}(k) + B_{PY}u(k) + E_{PY}w_{PY}(k) \\ y(k) = C_{1P}x_{PY}(k) + D_{1PY}w_{PY}(k) \\ h_{PY}(k) = C_{2PY}x_{PY}(k) + D_{2PY}u(k) + D_{22PY}w_{PY}(k) \end{cases} \quad (12.44)$$

存在一个定常的输出预反馈律 $X_{PY}y$, 应用该反馈控制律以后, 即

$$u \rightarrow X_{PY}y + u \quad (12.45)$$

可使从 w_{PY} 到 h_{PY} 的直接传输项消失。因此不失一般性, 在后面都假设 $D_{22PY} = 0$ 。

存在一个“最优”的状态反馈增益 F_{PY} , 使得

$$(C_{2PY} + D_{2PY}F_{PY})(sI - A_{PY} - B_{PY}F_{PY})^{-1}E_{PY} \equiv 0$$

其中 $A_{PY} + B_{PY}F_{PY}$ 是稳定的。我们需要构造一个低阶的观测器。不失一般性但却简便, 假设矩阵 $C_{1P}D_{1PY}$ 的形式已经是

$$C_{1P} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_{p-m_0} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad D_{1PY} = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.46)$$

其中 m_0 是 D_{1PY} 的秩, $D_{1,0}$ 是满秩。则给定系统 Σ_{PY} 可表示为

$$\begin{cases} \delta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} w_{PY} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_{p-m_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} w_{PY} \\ h_{PY} = C_{2PY} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_{2PY}u \end{cases} \quad (12.47)$$

其中

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_{PY} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = y \quad (12.48)$$

注意到 $y_1 \equiv x_1$ 。所以我们只要有一个估计 x_2 的降阶估计器。采用文献[118]的结果, 首先根据测量输出 y_1 和状态 x_2 重新表示 x_1 的状态方程:

$$y_1(k+1) = A_{11}y_1(k) + A_{12}x_2(k) + E_1w_{PY}(k) + B_1u(k) \quad (12.49)$$

其中 y_1 和 u 已知。 x_2 的观测通过 y_0 进行, 而

$$\hat{y}_1(k) = A_{12}x_2(k) + E_1w_{PY}(k) = y_1(k+1) - A_{11}y_1(k) - B_1u(k) \quad (12.50)$$

一个估计状态 x_2 的降阶系统为

$$\begin{cases} x_2(k+1) = A_Rx_2(k) + E_Rw_{PY}(k) + [A_{21} \quad B_2] \begin{bmatrix} y_1(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \\ y_R(k) = C_Rx_2(k) + D_Rw_{PY}(k) \end{cases} \quad (12.51)$$

其中

$$A_R := A_{22}, \quad E_R := E_2, \quad C_R := \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix}, \quad D_R := \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ E_1 \end{bmatrix} \quad (12.52)$$

根据系统(12.51),我们可以构造一个 x_2 的降阶观测器:

$$\hat{x}_2(k+1) = A_R \hat{x}_2(k) + \begin{bmatrix} A_{21} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + K_R [C_R \hat{x}_2(k) - y_R(k)] \quad (12.53)$$

K_R 是观测器增益矩阵,必须满足 $A_R + K_R C_R$ 是渐近稳定的要求,并且

$$(zI - A_R - K_R C_R)^{-1} (E_R - K_R D_R) \equiv 0 \quad (12.54)$$

根据文献[79]的结果(即性质 2.2.1),我们可以证明只要四元组 $(A_{PY}, E_{PY}, C_{PY}, D_{PY})$ 是左可逆和最小相位的,没有无限零点,则 (A_R, E_R, C_R, D_R) 是左可逆和最小相位的,没有无限零点。 K_R 的系统化计算可利用第 13 章中的过程得到。

现在已经有了降阶的观测器和最优的状态反馈。但是 y_R 包含了一个超前的测量值,即式(12.50)中的 $y_1(k+1)$ 。我们采用一个变换来消除这一项。把降阶观测器的增益进行分块 $K_R = [K_{R0} \quad K_{R1}]$,这和输出 $[y_0^T \quad \bar{y}_1^T]^T$ 的维数相适应,同时定义一个新的状态变量:

$$v := \hat{x}_2 + K_{R1} \bar{y}_1$$

现在可以得到下面的降阶估计器型控制器:

$$\begin{cases} v(k+1) = (A_R + K_R C_R)v(k) + (B_2 + K_{R1} B_1)u(k) + G_R y(k) \\ \hat{x}_{PY}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-p+m_0} \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -K_{R1} \end{bmatrix} y(k) \\ u(k) = F_{PY} \hat{x}_{PY}(k) + X_{PY} y(k) \end{cases} \quad (12.55)$$

其中

$$G_R = [-K_{R0} \quad A_{21} + K_{R1} A_{11} - (A_R + K_R C_R)K_{R1}]$$

F_{PY} 是状态反馈增益, X_{PY} 是输出预反馈增益。

注 12.2 有趣的是式(12.55)所示的降阶估计器型控制器的状态空间表示可能不是最小的,因此控制器的 McMillan 阶必小于式(12.55)的状态空间表示的阶次。这是由于经过预输出反馈律(12.45)之后,稳定的动态在被控输出 h_{PY} 中是不可观测的。

一个非常有趣的实例是 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 的状态反馈情况。此时可选择式(12.45)的预输出反馈 X_{PY} ,使得应用之后有 $C_{2PY} = 0$ 和 A_{PY} 是稳定的。因此可选择 $F_{PY} = 0$,但这意味着降阶估计器型控制器(12.45)的 McMillan 阶等于零,即成为一个静态状态反馈解 $u = X_{PY} y$ 。♣

最后指出降阶输出反馈控制律(12.55)可重新表示为下面的标准形式:

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}} v(k) + B_{\text{cmp}} y(k) \\ u(k) = C_{\text{cmp}} v(k) + D_{\text{cmp}} y(k) \end{cases} \quad (12.56)$$

其中

$$\begin{cases} A_{\text{cmp}} := (A_R + K_R C_R) + (B_2 + K_{R1} B_1) F_{PY} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ B_{\text{cmp}} := (B_2 + K_{R1} B_1) \left(F_{PY} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -K_{R1} \end{bmatrix} + X_{PY} \right) + G_R \\ C_{\text{cmp}} := F_{PY} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ D_{\text{cmp}} := F_{PY} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -K_{R1} \end{bmatrix} + X_{PY} \end{cases} \quad (12.57)$$

我们有下面的定理。

定理 12.3 考虑式(12.25)所示的离散时间系统 Σ 。令 $\gamma > \gamma^*$ 是给定的。则存在增益矩阵 X_{PY} 、 F_{PY} 和 K_R 使得式(12.56)所示的控制器 Σ_{cmp} 和由式(12.57)给出的 A_{cmp} 、 B_{cmp} 、 C_{cmp} 和 D_{cmp} 具有下面的性质：

- (1) 由 Σ 和 Σ_{cmp} 所形成的闭环系统是渐近稳定的；
- (2) 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_{∞} 范数小于 γ 。 ♣

证明 因为 Σ_{PY} 具有下面的性质：

- (1) 存在一个定常矩阵 X_{PY} ，使得 $D_{2PY} + D_{2PY} X_{PY} D_{1PY} = 0$ ；
- (2) $(A_{PY}, B_{PY}, C_{2PY}, D_{2PY})$ 是右可逆和最小相位的，没有无限零点；
- (3) $(A_{PY}, B_{PY}, C_{2PY}, D_{2PY})$ 是左可逆和最小相位的，没有无限零点；

所以结论显然成立。计算 X_{PY} 、 F_{PY} 和 K_R 的系统化步骤可在第 13 章中找到。 ◆

下面的例子演示了本节的结果。

例 12.4 考虑式(12.25)所示的离散时间系统，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12.58)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.59)$$

和

$$C_2 = [0.8 \quad 0.9], \quad D_2 = 0, \quad D_{22} = 1 \quad (12.60)$$

容易验证子系统 (A, B, C_2, D_2) 是可逆的，在 1.5714 处有一个不稳定的不变零点，子系统 (A, E, C_1, D_1) 是左可逆，在 2 处有不稳定的不变零点。利用第 11 章的算法来计算 γ^* ，可得精确的最小值为

$$\gamma^* = 3.9631638$$

下面对 $\gamma = 3.963164$ 设计一个 γ 次优测量输出控制律，采用上述过程得到辅助系统(12.44)，其中

$$A_{PY} = \begin{bmatrix} 1.14353033 & 1.18520854 \\ 2.34861499 & 3.46328599 \end{bmatrix}, \quad B_{PY} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.96422578 \end{bmatrix}$$

$$E_{PY} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1.65382390 \\ 4.83262217 \end{bmatrix}, \quad C_{IP} = \begin{bmatrix} 0.14353033 & 1.18520854 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{IPY} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1.65382390 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{2PY} = -3297.4252$$

$$C_{2PY} = [-1.74280115 \quad -2.36309110], \quad D_{2PY} = 0.30400789$$

最后控制器参数为

$$A_{\text{cmp}} = 0, \quad B_{\text{cmp}} = [0.06254887 \quad 0.05328328]$$

$$C_{\text{cmp}} = 0, \quad D_{\text{cmp}} = [6.55844429 \quad 4.79141397]$$

由上面的系统和控制器所形成的闭环系统极点为 0 和 $0.4878 \pm j0.1199$, 所以它们显然是稳定的。图 12.4 是从 w 到 h 的闭环传递矩阵的奇异值图, 结果显示 $\|T_{hw}(\Sigma \times \Sigma_{\text{cmp}})\|_\infty$ 的确小于给定的 γ 。♣

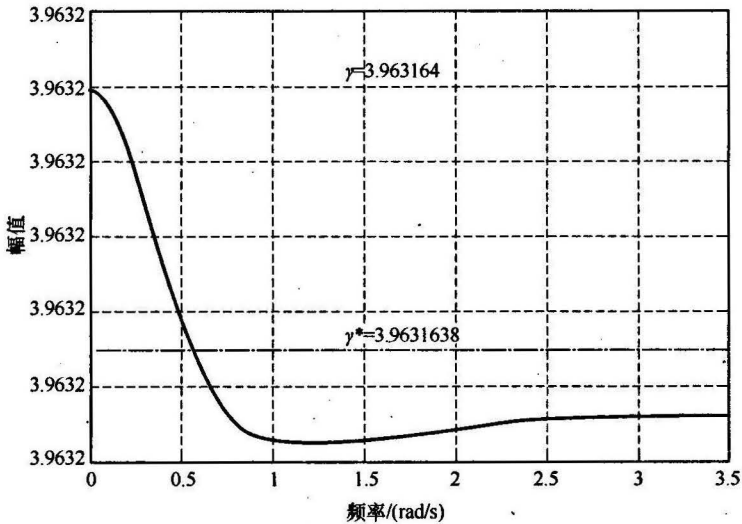


图 12.4 降阶输出反馈下的 T_{hw} 的奇异值

第 13 章 离散时间 H_∞ 几乎干扰解耦

13.1 导 论

本章考虑一般离散时间系统的 H_∞ 几乎干扰解耦问题 (H_∞ -ADDPMS), 而系统的子系统在复平面有单位圆上的极点。离散时间系统的稳定区域定义为通常的开单位圆。和连续时间的情况不同, 一般离散时间的几乎干扰解耦问题很少得到研究。在 1996 年, 对于给定对象的子系统在单位圆上没有不变零点的 H_∞ -ADDPMS, Chen 等^[11] 给出了一组可解性条件。只是在最近才由 Chen 等^[142] 导出了一般离散时间系统的 H_∞ -ADDPMS 的充分和必要条件。Lin 和 Chen^[143] 则给出了一般 H_∞ 几乎干扰解耦问题的解。本章的核心是由文献^[142]和^[143]的结果构成的。

具体就是考虑下面的线性时不变离散时间系统:

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = C_1x(k) + D_1w(k) \\ h(k) = C_2x(k) + D_2u(k) + D_{22}w(k) \end{cases} \quad (13.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $y \in \mathbb{R}^l$ 是测量, $w \in \mathbb{R}^q$ 是扰动, $h \in \mathbb{R}^p$ 是被控输出。和前面一样, 定义 Σ_P 和 Σ_Q 分别为由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 和 (A, E, C_1, D_1) 所表示的子系统。我们研究下面的动态控制律:

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}}v(k) + B_{\text{cmp}}y(k) \\ u(k) = C_{\text{cmp}}v(k) + D_{\text{cmp}}y(k) \end{cases} \quad (13.2)$$

如果下面的矩阵是渐近稳定的, 即所有特征值都在复平面上开单位圆内:

$$A_{\text{cl}} := \begin{bmatrix} A + BD_{\text{cmp}}C_1 & BC_{\text{cmp}} \\ B_{\text{cmp}}C_1 & A_{\text{cmp}} \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

则称式(13.2)所示的控制器 Σ_{cmp} 可使系统 Σ 内稳定。以 T_{hw} 表示从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵。则对一般离散时间系统的 H_∞ 几乎干扰可解性的定义如下。

定义 13.1 对系统(13.1)的具有测量反馈和内稳定约束的一般 H_∞ 几乎干扰解耦问题 (H_∞ -ADDPMS) 可解条件如下: 对任何给定正标量 $\gamma > 0$, 至少存在一个形如式(13.2)所示的控制器, 使得

(1) 在没有扰动时, 由系统(13.1)和控制器(13.2)所形成的闭环系统是渐近稳定的, 即式(13.3)所示的矩阵 A_{cl} 是渐近稳定的;

(2) 闭环系统从扰动 w 到被控输出 h 的 L_2 增益小于或等于 γ , 即

$$\|h\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w \in L_2 \text{ 和 } (x(0), v(0)) = (0, 0) \quad (13.4)$$

等价的, 从 w 到 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于或等于 γ , 即 $\|T_{hw}\|_\infty \leq \gamma$. ♣

状态反馈或全信息反馈下的 H_∞ 几乎干扰解耦可以相同的方式直接定义。本章的目的是探究这些问题的可解性条件, 若解是存在的, 则构造它。本章的内容结构是: 13.2 给出了一般离散时间系统 H_∞ -ADDPMS 的可解性条件。13.3 节和 13.4 节给出了在解存在的情况下, 一般离散时间 H_∞ -ADDPMS 解的构造性算法。这一章的所有主要结果的证明都安排在 13.5 节中, 这样显得清晰。

13.2 可解性条件

本节给出具有内稳定的一般 H_∞ 几乎干扰解耦问题的可解性条件, 考虑三种情况: 全信息反馈、全状态反馈和测量反馈。这些条件都根据几何子空间来表示。我们也给出不用计算任何几何子空间的数值算法来检验这些条件。这一节主要结果的证明都安排在 13.5 节中。

首先考虑全信息情况, 我们有下面的结果。

定理 13.1 考虑式 (13.1) 所示的离散时间线性时不变系统 Σ , 测量输出为

$$y = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad \text{或} \quad C_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

即所有的状态变量和扰动(全信息)是可测并可用于反馈。对给定系统具有内稳定和全信息反馈的 H_∞ 几乎干扰解耦问题可解的充分和必要条件是:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) $\text{Im}(D_{22}) \subset \text{Im}(D_2)$, 即 $D_{22} + D_2 S = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22}$;
- (3) $\text{Im}(E + BS) \subset \{\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) + B \text{Ker}(D_2)\} \cap \{\bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{L}_\lambda(\Sigma_P)\}$. ♣

证明 见 13.5.1 节。◆

对于一般的正则测量反馈情况见下面的定理。

定理 13.2 考虑式 (13.1) 所示的离散时间线性时不变系统 Σ 。对系统 13.1) 的具有测量反馈和内稳定的 H_∞ 几乎干扰解耦问题可解的充分和必要条件是:

- (1) (A, B) 是可镇定的;
- (2) (A, C_1) 是可检测的;
- (3) $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^+$;
- (4) $\text{Im}(E + B S D_1) \subset \{\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) + B \text{Ker}(D_2)\} \cap \{\bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{L}_\lambda(\Sigma_P)\}$;
- (5) $\text{Ker}(C_2 + D_2 S C_1) \supset \{\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \cap C_1^{-1} \{\text{Im}(D_1)\}\} \cup \{\bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q)\}$;
- (6) $\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P)$. ♣

证明 见 13.5.2 节。 ◆

下面的定理处理控制器结构为严格正则的情况,即 $D_{\text{cmp}} = 0$ 时的控制器 (13.2)。

定理 13.3 考虑式(13.1)所示的离散时间线性时不变系统 Σ 。在严格正则测量反馈和内稳定约束下,对系统(13.1)的 H_∞ 几乎干扰解耦问题可解的充分和必要条件是:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) (A, C_1) 可检测;
- (3) $D_{22} = 0$;
- (4) $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \cap \{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P) \}$;
- (5) $\text{Ker}(C_2) \subset \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \cup \{ \bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q) \}$;
- (6) $\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P)$;
- (7) $A \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P)$ 。 ♣

证明 见 13.5.5 节。 ◆

下面是一些评注。

注 13.1 如果 Σ_P 是最小相位和右可逆,没有无限零点, Σ_Q 是最小相位和左可逆,没有无限零点。则定理 13.2 的条件(4)~(6)自动满足。这时的 H_∞ -ADDPMS可解条件变成:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) (A, C_1) 可检测;
- (3) $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^\dagger D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^\dagger$ 。 ♣

注 13.2 对于系统(13.1)的状态都可测量并可用于反馈的特殊情况,即 $y = x$,从定理 13.2 可容易地导出在全状态反馈和内稳定约束下, H_∞ 几乎干扰解耦问题可解的充分和必要条件是:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) $D_{22} = 0$;
- (3) $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \cap \{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P) \}$ 。 ♣

接下来在没有计算任何 Σ_P 或 Σ_Q 的几何子空间情况下,我们给出数值算法来验证定理 13.2 的可解性条件。

步骤 13.1 令 $S = -(D_2^T D_2)^\dagger D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^\dagger$ 。如果 $D_{22} + D_2 S D_1 \neq 0$,则系统(13.1)的 H_∞ -ADDPMS 是不可解的,算法终止,否则转向下一步。

步骤 13.2 计算矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所代表系统 Σ_P 的特殊坐标基(SCB)。为参考方便,把和 Σ_P 相关的 SCB 中的所有子矩阵和变换都附上下标“P”,如 Γ_{sp} 是 Σ_P 的 SCB 中的状态变换, B_{sp} 代替子矩阵 B_d , A_{ssp}^0 和 Σ_P 在单位圆上的不变零点动态相关。

步骤 13.3 接下来把 A_{aaP}^0 中特征值的非负虚部表示为 $\{\omega_{P1}, \omega_{P2}, \dots, \omega_{Pk_P}\}$, 对每个 $i=1, 2, \dots, k_P$, 我们选择相对应的复矩阵 V_{iP} , 使得它的列构成了特征空间 $\{x \in \mathbb{C}^{n_{aP}^0} \mid x^H(\omega_{Pi}I - A_{aaP}^0) = 0\}$ 的一组基, 其中 n_{aP}^0 是 \mathcal{X}_{aP}^0 的维数。然后令

$$V_P := [V_{1P} \quad V_{2P} \quad \dots \quad V_{k_PP}] \quad (13.6)$$

计算 $n_{xP} := \dim(\mathcal{X}_{aP}^+) + \dim(\mathcal{X}_{bP}) + \dim(\mathcal{X}_{dP})$, 以及

$$\Gamma_{sP}^{-1}(E + BSD_1) := \begin{bmatrix} E_{cP} \\ E_{aP}^- \\ E_{aP}^0 \\ E_{aP}^+ \\ E_{bP} \\ E_{dP} \end{bmatrix} \quad (13.7)$$

步骤 13.4 令 Σ'_Q 表示四元组 (A^T, C^T, E^T, D^T) , 是系统 Σ_Q 的对偶。计算 Σ'_Q 的特殊坐标基。同样为了参照方便, 把和 Σ'_Q 相关的 SCB 变换都附上下标“Q”, 如 Γ_{sQ} 是 Σ'_Q 的状态变换, B_{dQ} 代替子矩阵 B_d , A_{aaQ}^0 和 Σ'_Q 在单位圆上的不变零点动态相关。

步骤 13.5 类似的, 把 A_{aaQ}^0 中特征值的非负虚部表示为 $\{\omega_{Q1}, \omega_{Q2}, \dots, \omega_{Qk_Q}\}$, 对每个 $i=1, 2, \dots, k_Q$, 我们选择相对应的复矩阵 V_{iQ} , 使得它的列构成了特征空间 $\{x \in \mathbb{C}^{n_{aQ}^0} \mid x^H(\omega_{Qi}I - A_{aaQ}^0) = 0\}$ 的一组基, 其中 n_{aQ}^0 是 \mathcal{X}_{aQ}^0 的维数。然后令

$$V_Q := [V_{1Q} \quad V_{2Q} \quad \dots \quad V_{k_QQ}] \quad (13.8)$$

接下来计算 $n_{xQ} := \dim(\mathcal{X}_{aQ}^+) + \dim(\mathcal{X}_{bQ}) + \dim(\mathcal{X}_{dQ})$, 以及

$$\Gamma_{sQ}^{-1}(C_2 + D_2 SC_1)^T := \begin{bmatrix} E_{cQ} \\ E_{aQ}^- \\ E_{aQ}^0 \\ E_{aQ}^+ \\ E_{bQ} \\ E_{dQ} \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

步骤 13.6 最后计算

$$\Gamma_{sP}^{-1}(\Gamma_{sQ}^{-1})^T = \begin{bmatrix} * & * \\ * & \Gamma \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

其中 Γ 是 $n_{xP} \times n_{xQ}$ 的定常矩阵。♣

下面的性质对以上算法进行了总结。也根据 Σ_P 和 Σ_Q 的 SCB 相关的子矩阵, 给出了式(13.1)所示的一般离散时间系统 Σ 的 H_∞ -ADDPMS 可解性的充分和必要条件。

性质 13.1 考虑式(13.1)所示的离散时间线性时不变系统 Σ 。具有测量反

馈和内稳定的 H_∞ 几乎干扰解耦问题 (H_∞ -ADDPMS) 可解的必要和充分条件是:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) (A, C_1) 可检测;
- (3) $D_{22} - D_2(D_2^T D_2)^{\dagger} D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^{\dagger} D_1 = 0$;
- (4) $V_P^H E_{aP}^0 = 0, E_{aP}^+ = 0, E_{bP} = 0, \text{Im}(E_{dP}) \subset \text{Im}(B_{dP})$;
- (5) $V_Q^H E_{aQ}^0 = 0, E_{aQ}^+ = 0, E_{bQ} = 0, \text{Im}(E_{dQ}) \subset \text{Im}(B_{dQ})$;
- (6) $\Gamma = 0$.

注意条件(4)~(6)中的所有矩阵都已在算法步骤 13.1~13.6 中定义了。♣

上面的结果可直接利用第 4 章的特殊坐标基性质以及定理 13.2 的结果进行验证(也可参见和第 9 章的连续时间相似的结果)。

13.3 状态和全信息反馈的解

本节考虑具有内稳定和全状态反馈以及全信息反馈下的一般 H_∞ 几乎干扰解耦控制律的设计,其中的内稳定是对开单位圆而言的。首先给出构造一组参数化的静态状态反馈控制律

$$u(k) = F(\epsilon)x(k) \quad (13.11)$$

的设计过程来解下面系统的一般 H_∞ -ADDPMS:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = x(k) \\ h(k) = C_2'x(k) + D_2u(k) + D_{22}w(k) \end{cases} \quad (13.12)$$

也就是在一组状态反馈律下,对充分小的 ϵ ,闭环系统是渐近稳定的,从 w 到 h 的闭环传递矩阵 $T_{hw}(z, \epsilon)$ 在 ϵ 趋于零时也趋于零,其中

$$T_{hw}(z, \epsilon) = [C_2 + D_2 F(\epsilon)] [zI - A - BF(\epsilon)]^{-1} E + D_{22} \quad (13.13)$$

我们有下面的算法来构造这样的 $F(\epsilon)$ 。

步骤 13.7 (Σ_P 的分解) 把矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 所表示的子系统变换到定理 4.5 的特殊坐标基(SCB)。状态、输出和输入变换矩阵分别表示为 Γ_{aP} 、 Γ_{oP} 和 Γ_{iP} 。

步骤 13.8 (和子系统 \mathcal{X}_c 相关的增益矩阵) 令 F_c 为任意满足约束

$$-A_{cc} = A_{cc} - B_c F_c \quad (13.14)$$

的稳定定常矩阵。注意特殊坐标基的性质保证了这样 F_c 的存在性,即 (A_{cc}, B_c) 是可控的。

步骤 13.9 (和子系统 \mathcal{X}_a^+ , \mathcal{X}_b 和 \mathcal{X}_d 相关的增益矩阵) 令

$$F_{abd} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_{a0}^+ & F_{b0} & F_{d0} \\ E_{da}^- & E_{da}^0 & F_{ad}^+ & F_{bd} & F_{dd} \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

其中

$$F_{abd}^+ := \begin{bmatrix} F_{a0}^+ & F_{b0} & F_{d0} \\ F_{ad}^+ & F_{bd} & F_{dd} \end{bmatrix} \quad (13.16)$$

是任何满足

$$A_{abd}^+ := \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & A_{dd} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & 0 \\ B_{0b} & 0 \\ B_{0d} & B_d \end{bmatrix} F_{abd}^+ \quad (13.17)$$

的稳定常矩阵。特殊坐标基的性质同样保证了这样 F_{abd}^+ 的存在性。

步骤 13.10 (和 A_{aa}^0 相关子系统的增益矩阵) 该矩阵的构造在下面的子步中完成。

步骤 13.10.1 (初步变换) 注意到

$$A_{con} := \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab} C_b & L_{ad} C_d \\ 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_{da} & B_d E_{db} & A_{dd} \end{bmatrix}, \quad B_{con} := \begin{bmatrix} B_{0a} & 0 \\ B_{0b} & 0 \\ B_{0d} & B_d \end{bmatrix}$$

则有

$$A_{con} - B_{con} F_{abd} = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & A_{abd}^- \\ 0 & A_{aa}^0 & A_{abd}^0 \\ 0 & 0 & A_{abd}^{+c} \end{bmatrix}, \quad B_{con} = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 \\ B_{0a}^0 & 0 \\ B_{0abd}^+ & \tilde{B}_d \end{bmatrix} \quad (13.18)$$

其中

$$B_{0abd}^+ = \begin{bmatrix} B_{0a}^+ \\ B_{0b} \\ B_{0d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_d \end{bmatrix} \quad (13.19)$$

$$A_{abd}^0 = [0 \quad L_{ab}^0 C_b \quad L_{ad}^0 C_d] - [B_{0a}^0 \quad 0] F_{abd}^+ \quad (13.20)$$

和

$$A_{abd}^- = [0 \quad L_{ab}^- C_b \quad L_{ad}^- C_d] - [B_{0a}^- \quad 0] F_{abd}^+ \quad (13.21)$$

显然 $(A_{con} - B_{con} F_{abd}, B_{con})$ 是可镇定的。构造下面的非奇异状态变换矩阵:

$$\Gamma_{abd} = \begin{bmatrix} I_{n_a}^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_a^+ + n_b + n_d} \\ 0 & I_{n_a}^0 & T_a^0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (13.22)$$

其中 T_a^0 是下面 Lyapunov 方程的唯一解:

$$A_{aa}^0 T_a^0 - T_a^0 A_{abd}^{+c} = A_{abd}^0 \quad (13.23)$$

由于 A_{aa}^0 的所有特征值在单位圆上, A_{abd}^{+c} 的所有特征值在开单位圆内, 上面的 Lyapunov 方程的唯一解存在。现在容易验证

$$\Gamma_{abd}^{-1} (A_{con} - B_{con} F_{abd}) \Gamma_{abd} = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & A_{aab}^- & 0 \\ 0 & A_{abd}^{+c} & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa}^0 \end{bmatrix} \quad (13.24)$$

和

$$\Gamma_{abd}^{-1} B_{con} = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 \\ B_{0abd}^+ & \tilde{B}_d \\ B_{0a}^0 + T_a^0 B_{0abd}^+ & T_a^0 \tilde{B}_d \end{bmatrix} \quad (13.25)$$

因此矩阵对 (A_{aa}^0, B_a^0) 是可控的, 其中

$$B_a^0 = [B_{0a}^0 + T_a^0 B_{0abd}^+ \quad T_a^0 \tilde{B}_d] \quad (13.26)$$

步骤 13.10.2 (进一步坐标分解) 利用第 4 章的结果找到非奇异变换矩阵 Γ_{sa}^0 和 Γ_{ia}^0 使得 (A_{aa}^0, B_a^0) 被变换到定理 4.4 的块对角规范型, 即

$$(\Gamma_{sa}^0)^{-1} A_{aa}^0 \Gamma_{sa}^0 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_l \end{bmatrix} \quad (13.27)$$

和

$$(\Gamma_{sa}^0)^{-1} B_a^0 \Gamma_{ia}^0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} & \cdots & B_{1l} & * \\ 0 & B_2 & \cdots & B_{2l} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_l & * \end{bmatrix} \quad (13.28)$$

其中 l 是整数, 对 $i=1, 2, \dots, l$, 有

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{n_i}^i & -a_{n_i-1}^i & -a_{n_i-2}^i & \cdots & -a_1^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13.29)$$

注意到 A_i 的特征值都在单位圆上。这里 * 表示无关紧要的矩阵。

步骤 13.10.3 (子系统设计) 对每个 (A_i, B_i) , 令 $F_i(\epsilon) \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$ 为状态反馈增益矩阵, 使得

$$\lambda[A_i - B_i F_i(\epsilon)] = \{(1-\epsilon)e^{j\theta_{i1}}, \dots, (1-\epsilon)e^{j\theta_{in_i}}\}$$

其中 $e^{j\theta_{il}}$ 是 A_i 的特征值 ($l=1, 2, \dots, n_i$)。显然 $A_i + B_i F_i(\epsilon)$ 的所有特征值在单位

圆内, $F_i(\epsilon)$ 是唯一的。

步骤 13.10.4(计算和 \mathcal{X}_a^0 相关子系统的增益矩阵) 令

$$F_a^0(\epsilon) := \Gamma_{in}^0 \begin{bmatrix} F_1(\epsilon) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F_2(\epsilon) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_{l-1}(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F_l(\epsilon) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} (\Gamma_{sa}^0)^{-1} \quad (13.30)$$

其中 $\epsilon \in (0, 1]$ 是设计参数, 其值在后面确定。为了后面的应用进行下面的分块:

$$F_a^0(\epsilon) = \begin{bmatrix} F_{a0}^0(\epsilon) \\ F_{ad}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (13.31)$$

和

$$F_a^0(\epsilon) T_a^0 = \begin{bmatrix} F_{a0+}^0(\epsilon) & F_{a0b}^0(\epsilon) & F_{a0d}^0(\epsilon) \\ F_{ad+}^0(\epsilon) & F_{adb}^0(\epsilon) & F_{add}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (13.32)$$

步骤 13.11(复合参数化增益矩阵 $F(\epsilon)$) 在这一步中, 步骤 13.9~13.11 中各计算出来的增益被合在一起形成了一个复合状态反馈增益矩阵 $F(\epsilon)$, 它的表示为

$$F(\epsilon) := -\Gamma_{ip} [F_0 + F_*(\epsilon)] \Gamma_{sp}^{-1} \quad (13.33)$$

其中

$$F_0 = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^0 & C_{0a}^+ + F_{a0}^+ & C_{0b} + F_{b0} & C_{0c} & C_{0d} + F_{d0} \\ E_{da}^- & E_{da}^0 & F_{ad}^+ & F_{bd} & E_{dc} & F_{dd} \\ E_{ca}^- & E_{ca}^0 & E_{ca}^+ & 0 & F_c & 0 \end{bmatrix} \quad (13.34)$$

和

$$F_*(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & F_{a0}^0(\epsilon) & F_{a0+}^0(\epsilon) & F_{a0b}^0(\epsilon) & 0 & F_{a0d}^0(\epsilon) \\ 0 & F_{ad}^0(\epsilon) & F_{ad+}^0(\epsilon) & F_{adb}^0(\epsilon) & 0 & F_{add}^0(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.35)$$

这就完成了参数化状态反馈增益矩阵 $F(\epsilon)$ 的构造。♣

我们有下面的定理。

定理 13.4 考虑所有状态都可用于反馈的给定系统(13.12)。假设对系统(13.12)的 H_∞ 几乎干扰解耦问题是可解的, 即评注 13.2 的可解性条件得到满足。则由系统(13.12)和状态反馈律

$$u(k) = F(\epsilon)x(k) \quad (13.36)$$

所形成的闭环系统具有下面的性质(其中 $F(\epsilon)$ 由式(13.33)给出): 对任何 $\gamma > 0$, 存在一个正的标量 $\epsilon^* > 0$, 使得对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, 有

(1) 闭环系统是渐近稳定的, 即 $\lambda\{A+BF(\epsilon)\}$ 在单位圆内;

(2) 从干扰 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ , 即 $\|T_h(z, \epsilon)\|_\infty < \gamma$ 。

因此根据定义 13.1 可得式(13.36)所示的控制律解决了系统(13.12)的 H_∞ -ADDPMS。 ♣

证明 见 13.5.3 节。 ◆

下面来设计参数化的控制律, 即

$$u(k) = F_x(\epsilon)x(k) + F_w w(k) \quad (13.37)$$

它可解下面全信息系统的 H_∞ 几乎干扰解耦问题并具有内稳定性:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) + D_{22} w(k) \end{cases} \quad (13.38)$$

也就是说在上面的全信息反馈控制律下, 闭环系统对于充分小的 ϵ 是渐近稳定的, 而从 w 到 h 的闭环传递矩阵 $T_{hw}(z, \epsilon)$ 的 H_∞ 范数在 ϵ 趋于零时也趋于零, 其中 $T_{hw}(z, \epsilon) = [C_2 + D_2 F_x(\epsilon)] \cdot [zI - A - BF_x(\epsilon)]^{-1} (E + BF_w) + (D_{22} + D_2 F_w)$

下面是构造 $F_x(\epsilon)$ 和 F_w 的算法步骤。

步骤 13.12(计算 S) 计算

$$S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} \quad (13.39)$$

步骤 13.13(计算 $F_x(\epsilon)$) 根据步骤 13.7~13.11 可产生增益矩阵 $F(\epsilon)$, 然后令

$$F_x(\epsilon) = F(\epsilon) \quad (13.40)$$

为在下一步计算 F_w , 我们还要利用 Σ_P 的 SCB 的变换矩阵 $\Gamma_{\mathcal{P}}$ 和 Γ_P , 以及子矩阵 B_d 。

步骤 13.14(构造增益矩阵 F_w) 令

$$\Gamma_{\mathcal{P}}^{-1} (E + BS) = \begin{bmatrix} E_a^- \\ E_a^0 \\ E_a^+ \\ E_b \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} \quad (13.41)$$

然后可得增益矩阵 F_w 为

$$F_w = -\Gamma_P \begin{bmatrix} 0 \\ (B_d^T B_d)^{-1} B_d^T E_d \\ 0 \end{bmatrix} + S \quad (13.42)$$

有趣的是 F_w 的第一部分就是来抵消和 E_d 相关的并在 B_d 值域空间中的扰动,而第二部分则是抑制通过 D_{22} 进入系统的扰动。♣

我们有下面的结果。

定理 13.5 考虑给定系统(13.38),所有的状态和扰动都可用于反馈。设具有内稳定的 H_∞ 几乎干扰解耦问题对系统(13.38)是可解的,即满足定理 13.1 的可解性条件。则由系统(13.38)和全信息反馈控制律

$$u(k) = F_x(\epsilon)x(k) + F_w w(k) \quad (13.43)$$

所形成的闭环系统具有下面的性质,其中 $F_x(\epsilon)$ 和 F_w 分别由式(13.40)和式(13.42)给出。

对任何给定的 $\gamma > 0$,存在一个正的标量 $\epsilon^* > 0$,使得对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$,有

- (1) 闭环系统是渐近稳定的,即 $\lambda\{A + BF_x(\epsilon)\}$ 在开单位圆内;
- (2) 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ ,即 $\|T_{hw}(z, \epsilon)\|_\infty < \gamma$ 。

因此根据定义 13.1 可得式(13.43)所示的控制律求解了系统(13.38)的 H_∞ -ADDPMS。♣

证明 见 13.5.4 节。◆

下面给出例子来演示本节的结果。

例 13.1 考虑式(13.1)所示的离散时间系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_\epsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (13.44)$$

这里 α_ϵ 是标量,且

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.45)$$

在这个例子中考虑状态反馈和全信息反馈两种情况。利用 Lin, Chen 和 Liu^[74] 的软件工具,我们可以验证 (A, B) 是可控的, Σ_P 所代表的 (A, B, C_2, D_2) 左可逆,在 $z=1$ 处有两个不变零点、一个 2 阶的无限零点。而且

$$\nu^\circ(\Sigma_P) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad BKer(D_2) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.46)$$

和

$$\bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{L}_\lambda(\Sigma_P) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.47)$$

同时有

$$\gamma^\circ(\Sigma_P) \cap \left\{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{L}_\lambda(\Sigma_P) \right\} = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

和

$$\left\{ \gamma^\circ(\Sigma_P) + B\text{Ker}(D_2) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{L}_\lambda(\Sigma_P) \right\} = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

显然,全信息反馈的 H_∞ 几乎干扰解耦问题总是可解的;然而,状态反馈 H_∞ -ADDPS可解的充分必要条件是 $\alpha_e = 0$ 。根据本节算法得到下面参数化的增益矩阵:

$$F_x(\epsilon) = \begin{bmatrix} -0.526316(\epsilon-1)^2 - 1.052632(\epsilon-1) - 0.626316 \\ -0.775623(\epsilon-1)^2 - 2.603878(\epsilon-1) - 1.928255 \\ -0.798061(\epsilon-1)^2 - 2.763490(\epsilon-1) - 2.066429 \\ \quad -(\epsilon-1)^2 - 4.2(\epsilon-1) - 3.31 \\ \quad -2(\epsilon-1) - 2.2 \end{bmatrix}^T \quad (13.48)$$

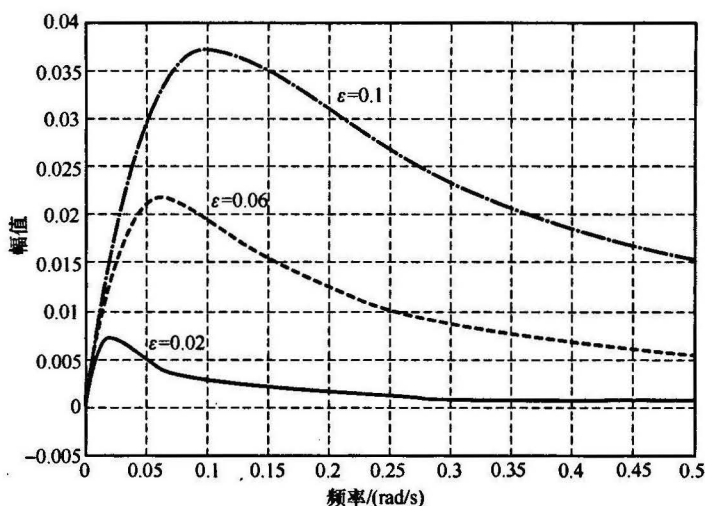
它把 $A + BF_x(\epsilon)$ 的特征值配置在 $0, 0, 0, 1-\epsilon$ 和 $1-\epsilon$, 而

$$F_w = [-\alpha_e \quad 0] \quad (13.49)$$

闭环传递矩阵 $T_{hw}(z, \epsilon)$ 的最大奇异值如图 13.1 所示,显然当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,利用全信息反馈(或 $\alpha_e = 0$ 的状态反馈)的 H_∞ -ADDPS 是可实现的。♣

13.4 测量反馈的解

给定系统(13.1),本节中要设计可解一般 H_∞ -ADDPMS 的全阶和降阶输出反馈控制器。这里的全阶控制器是指控制器的阶次严格等于给定系统(13.1)的阶次,即等于 n 。而降阶控制器是指控制器的动态阶次小于 n 。

图 13.1 T_{nu} 的最大奇异值图(全信息情况)

13.4.1 全阶输出反馈

本节设计全阶测量反馈控制律,在定理 13.2 的可解性条件下可解给定系统 (13.1) 的 H_∞ -ADDPMS。对于给定系统满足定理 13.3 中所列条件的情况,一个小小的修正可产生严格正则的解,即令步骤 13.15 中的 $N=0$ 。下面是构造可解系统 (13.1) 的 H_∞ -ADDPMS 的参数化全阶输出反馈控制器的算法步骤。

步骤 13.15 (计算 N) 利用特殊坐标基的性质计算两个定常矩阵 X 和 Y ,使得 $\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) = \text{Ker}(X)$ 和 $\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) = \text{Im}(Y)$ 。然后计算

$$N = -(B^T X^T X B + D_2^T D_2)^\dagger [B^T X^T \quad D_2^T] \begin{bmatrix} X A Y & X E \\ C_2 Y & D_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y^T C_1^T \\ D_1^T \end{bmatrix} (C_1 Y Y^T C_1^T + D_1 D_1^T)^\dagger \quad (13.50)$$

步骤 13.16 (构造增益矩阵 $F_P(\epsilon)$) 定义一个辅助系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + Bu(k) + \tilde{E}w(k) \\ y(k) = x(k) \\ h(k) = \tilde{C}_2 x(k) + D_2 u(k) + 0 \cdot w(k) \end{cases} \quad (13.51)$$

其中

$$\tilde{A} := A + BNC_1 \quad (13.52)$$

$$\tilde{E} := E + BND_1 \quad (13.53)$$

$$\tilde{C}_2 := C_2 + D_2 NC_1 \quad (13.54)$$

然后对系统(13.51)进行 13.3 节的步骤 13.7~13.11,以得到参数化的增益矩阵 $F(\epsilon)$ 。令 $F_P(\epsilon)=F(\epsilon)$ 。

步骤 13.17(增益矩阵 $K_Q(\epsilon)$) 定义另一个辅助系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}^T x(k) + C_1^T u(k) + \tilde{C}_2^T w(k) \\ y(k) = x(k) \\ h(k) = \tilde{E}^T x(k) + D_1^T u(k) + 0 \cdot w(k) \end{cases} \quad (13.55)$$

然后对上面的系统应用 13.3 节的步骤 13.7~13.11,得到参数化的增益矩阵 $F(\epsilon)$ 。类似的,令 $K_Q(\epsilon)=F(\epsilon)^T$ 。

步骤 13.18(构造全阶控制器 $\Sigma_{FC}(\epsilon)$) 最后,参数化的全阶输出反馈控制器为

$$\Sigma_{FC}(\epsilon): \begin{cases} v(k+1) = A_{FC}(\epsilon)v(k) + B_{FC}(\epsilon)y(k) \\ u(k) = C_{FC}(\epsilon)v(k) + D_{FC}(\epsilon)y(k) \end{cases} \quad (13.56)$$

其中

$$\begin{cases} A_{FC}(\epsilon) := A + BNC_1 + BP_P(\epsilon) + K_Q(\epsilon)C_1 \\ B_{FC}(\epsilon) := -K_Q(\epsilon) \\ C_{FC}(\epsilon) := F_P(\epsilon) \\ D_{FC}(\epsilon) := N \end{cases} \quad (13.57)$$

注意如果给定系统满足定理 13.3 的所有条件,则可以选择矩阵 $D_{FC}(\epsilon)=N=0$,得到严格正则控制律。♣

我们有下面的定理。

定理 13.6 对于式(13.1)所示的系统 Σ ,假设具有内稳定的 H_∞ 几乎干扰解耦问题是可解的,即满足定理 13.2 的可解性条件。则由系统(13.1)和全阶测量反馈控制器(13.56)所组成的闭环系统具有下面的性质:对任意给定的 $\gamma > 0$,存在一个正的标量 $\epsilon^* > 0$,使得对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$,有

(1) 闭环系统是内稳定的;

(2) 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ ,即 $\|T_{hw}(z, \epsilon)\|_\infty < \gamma$ 。

因此根据定义 13.1 可得控制律(13.56)解决了系统(13.1)的 H_∞ -ADDPMS。♣

证明 见 13.5.5 节。◆

下面给出例子来演示上面的结果。

例 13.2 考虑式(13.1)所示的离散时间系统, A, B, E, C_2, D_2 和 D_{22} 同例 13.1 一样,而

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.58)$$

为简单起见令矩阵 E 中的 $\alpha_\epsilon = 1$ 。再次利用 Lin、Chen 和 Liu^[74] 的工具, 可以验证 (A, C_1) 是可观测的, Σ_Q 所代表的 (A, E, C_1, D_1) 可逆, 有一个一阶的无限零点, 在 $-0.6554, 0.3777 \pm j0.6726$ 和 1 处有四个不变零点。而且

$$\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \} = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.59)$$

和

$$\bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{Z}_\lambda(\Sigma_Q) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.60)$$

因此

$$\{ \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \cap C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \} \} \cup \{ \bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{Z}_\lambda(\Sigma_Q) \} = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.61)$$

不难看出定理 13.2 的所有条件都能满足。因此给定系统的 H_∞ -ADDPMS 是可解的。根据本节的算法可得到式(13.56)所示的全阶输出反馈控制器, 其中

$$N = [-1 \quad 0.4] \quad (13.62)$$

$$F_P(\epsilon) = \begin{bmatrix} -0.526316(\epsilon-1)^2 - 1.052632(\epsilon-1) - 0.526316 \\ -0.775623(\epsilon-1)^2 - 2.603878(\epsilon-1) - 1.828255 \\ -0.798061(\epsilon-1)^2 - 2.763490(\epsilon-1) - 1.566429 \\ -(\epsilon-1)^2 - 4.2(\epsilon-1) - 3.11 \\ -2(\epsilon-1) - 2.1 \end{bmatrix}^T \quad (13.63)$$

它把 $\tilde{A} + BF_P(\epsilon)$ 的特征值配置在 $0, 0, 0, 1-\epsilon$ 和 $1-\epsilon$ 处, 以及

$$K_Q(\epsilon) = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -10\epsilon & 5\epsilon \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.64)$$

它把 $\tilde{A} + K_Q(\epsilon)C_1$ 的特征值配置在 $-0.6554, 0.3777 \pm j0.6726, 0$ 和 $1-\epsilon$ 处。

图 13.2 是闭环传递矩阵 $T_{zw}(z, \epsilon)$ 的最大奇异值图, 结果显示在 ϵ 趋于零时, H_∞ -ADDPMS 是可实现的。

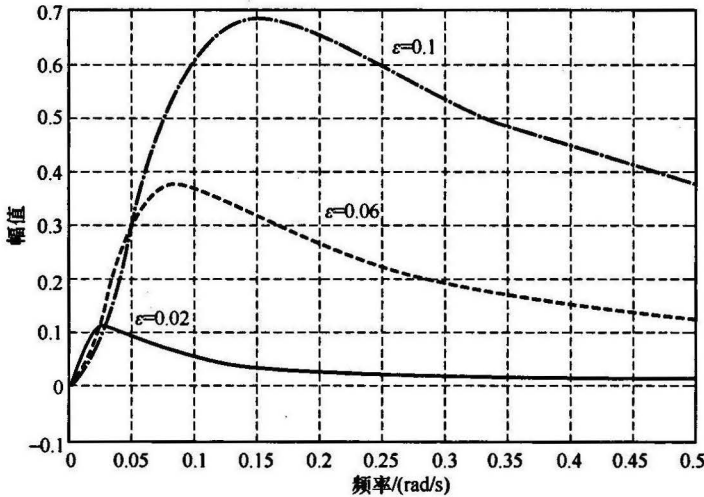


图 13.2 T_{zw} 的最大奇异值(全阶输出反馈情况)

13.4.2 降阶输出反馈

本节采用第 9 章的过程来设计降阶输出反馈控制器。我们要证明通过适当地选择增益矩阵, 这样的控制器结构可解离散时间系统(13.1)的 H_∞ -ADDPMS。首先, 不失一般性但可简便, 假设矩阵 C_1 和 D_1 已经具有形式

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad D_1 = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.65)$$

其中 $k=l-\text{rank}(D_1)$ 和 $D_{1,0}$ 是满秩的。接下来利用 13.4.1 节中的步骤 13.15 和 13.16 计算定常矩阵 N 并形成下面的系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + Bu(k) + \tilde{E}w(k) \\ y(k) = C_1x(k) + D_1w(k) \\ h(k) = \tilde{C}_2x(k) + D_2u(k) + 0w(k) \end{cases} \quad (13.66)$$

其中 \tilde{A} 、 \tilde{E} 和 \tilde{C}_2 如同式(13.52)~式(13.54)所定义。然后把系统(13.66)划分为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} w(k) \\ \begin{bmatrix} y_0(k) \\ y_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = \begin{bmatrix} C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + D_2u(k) + 0 \cdot w(k) \end{cases}$$

其中系统(13.66)中的状态 x 被划分为 x_1 和 x_2 两个部分;而 y 被划分为 y_0 和 y_1 , 其中 $y_1 \equiv x_1$ 。因此在降阶控制器设计中只需要估计状态 x_2 即可。接下来定义一个辅助子系统 Σ_{QR} , 它代表矩阵四元组 (A_R, E_R, C_R, D_R) , 其中

$$(A_R, E_R, C_R, D_R) = \left[A_{22}, E_2, \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ E_1 \end{bmatrix} \right] \quad (13.67)$$

下面是对一般离散时间 H_∞ -ADDPMS 构造降阶输出反馈控制器的算法步骤。

步骤 13.19(构造增益矩阵 $F_P(\epsilon)$) 定义一个辅助系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + Bu(k) + \tilde{E}w(k) \\ y(k) = x(k) \\ h(k) = \tilde{C}_2x(k) + D_2u(k) + 0 \cdot w(k) \end{cases} \quad (13.68)$$

然后对上面的系统应用 13.3 节算法的步骤 13.7~13.11, 得到参数化的增益矩阵 $F(\epsilon)$ 。再令 $F_P(\epsilon) = F(\epsilon)$ 。

步骤 13.20(构造增益矩阵 $K_R(\epsilon)$) 定义另一个辅助系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A_R^T x(k) + C_R^T u(k) + C_{2,2}^T w(k) \\ y(k) = x(k) \\ h(k) = E_R^T x(k) + D_R^T u(k) + 0 \cdot w(k) \end{cases} \quad (13.69)$$

然后对上面的系统应用 13.3 节算法的步骤 13.7~13.11, 得到参数化的增益矩阵 $F(\epsilon)$ 。类似的, 令 $K_R(\epsilon) = F(\epsilon)^T$ 。

步骤 13.21(构造降阶控制器 $\Sigma_{RC}(\epsilon)$) 对 $F_P(\epsilon)$ 和 $K_R(\epsilon)$ 分别进行和 $x =$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 和 $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 相对应的划分, 即

$$F_P(\epsilon) = [F_{P1}(\epsilon) \quad F_{P2}(\epsilon)] \quad \text{和} \quad K_R(\epsilon) = [K_{R0}(\epsilon) \quad K_{R1}(\epsilon)] \quad (13.70)$$

然后定义

$$G_R(\epsilon) = [-K_{R0}(\epsilon) \quad A_{21} + K_{R1}(\epsilon)A_{11} - (A_R + K_R(\epsilon)C_R)K_{R1}(\epsilon)] \quad (13.71)$$

最后得到参数化的降阶输出反馈控制器

$$\Sigma_{RC}(\epsilon): \begin{cases} v(k+1) = A_{RC}(\epsilon)v(k) + B_{RC}(\epsilon)y(k) \\ u(k) = C_{RC}(\epsilon)v(k) + D_{RC}(\epsilon)y(k) \end{cases} \quad (13.72)$$

其中

$$\begin{cases} A_{RC}(\epsilon) := A_R + B_2 F_{P2}(\epsilon) + K_R(\epsilon)C_R + K_{R1}(\epsilon)B_1 F_{P2}(\epsilon) \\ B_{RC}(\epsilon) := G_R(\epsilon) + [B_2 + K_{R1}(\epsilon)B_1][0 \quad F_{P1}(\epsilon) - F_{P2}(\epsilon)K_{R1}(\epsilon)] \\ C_{RC}(\epsilon) := F_{P2}(\epsilon) \\ D_{RC}(\epsilon) := [0 \quad F_{P1}(\epsilon) - F_{P2}(\epsilon)K_{R1}(\epsilon)] + N \end{cases} \quad (13.73)$$

注意降阶控制器一般从 y 到 u 有一个非零的直接传输项。 ♣

我们有下面的定理。

定理 13.7 考虑式(13.1)所示的系统 Σ , 假设具有内稳定的 H_∞ 几乎干扰解耦问题是可解的, 即满足定理 13.2 可解性条件。则由系统(13.1)和降阶输出反馈控制器所组成的闭环系统具有下面的性质: 对任何 $\gamma > 0$, 存在一个正的标量 $\epsilon^* > 0$, 使得对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, 有

(1) 闭环系统是渐近稳定的;

(2) 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于 γ , 即 $\|T_{hw}(z, \epsilon)\|_\infty < \gamma$ 。

因此根据定义 13.1, 式(13.72)给出的控制律解决了系统(13.1) H_∞ -ADDPMS。 ♣

证明 见 13.5.6 节。 ◆

下面给出例子来演示上面的结果。

例 13.3 还是考虑例 13.2 的系统。下面来构造降阶输出反馈控制器。首先进行划分

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.4 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.74)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.75)$$

和 $A_R = A_{22}, E_R = E_2$, 且

$$C_R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.76)$$

根据算法可得

$$F_P(\epsilon)^T = \begin{bmatrix} F_{P1}(\epsilon)^T \\ F_{P2}(\epsilon)^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.526316(\epsilon-1)^2 - 1.052632(\epsilon-1) - 0.526316 \\ -0.775623(\epsilon-1)^2 - 2.603878(\epsilon-1) - 1.828255 \\ -0.798601(\epsilon-1)^2 - 2.763490(\epsilon-1) - 1.566429 \\ \quad - (\epsilon-1)^2 - 4.2(\epsilon-1) - 3.11 \\ \quad \quad - 2(\epsilon-1) - 2.1 \end{bmatrix} \quad (13.77)$$

$$K_R(\epsilon) = [K_{R0}(\epsilon) \mid K_{R1}(\epsilon)] = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.78)$$

它把 $A_R + K_R(\epsilon)C_R$ 的特征值配置在 $-0.6554, 0.3777 \pm j0.6726$ 和 $1-\epsilon$ 处。我们也得到了形如式 (13.72) 的降阶输出反馈控制器, 其中所有的子矩阵都在式 (13.73) 中定义了。图 13.3 是闭环传递矩阵 $T_{hw}(z, \epsilon)$ 的最大奇异值图, 可见当 ϵ 趋于零时, H_∞ -ADDPMS 是可实现的。♣

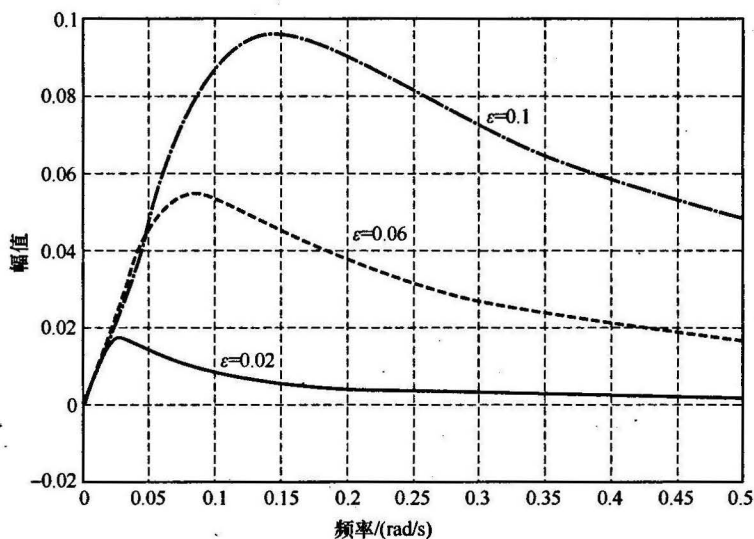


图 13.3 T_{hw} 的最大奇异值(降阶输出反馈情况)

13.5 主要结果的证明

13.5.1 定理 13.1 的证明

我们来证明定理 13.1 的结果, 即下面全信息系统的 H_∞ -ADDPMS 可解性条件:

$$\Sigma_{F_1}: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) + D_{22} w(k) \end{cases} \quad (13.79)$$

首先定义下面的辅助连续时间系统:

$$\check{\Sigma}_{F_1}: \begin{cases} \dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{B}\check{u} + \check{E}\check{w} \\ \check{y} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \check{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \check{w} \\ \check{z} = \check{C}_2 \check{x} + \check{D}_2 \check{u} + \check{D}_{22} \check{w} \end{cases} \quad (13.80)$$

其中 \check{A} 、 \check{B} 、 \check{E} 、 \check{C}_2 、 \check{D}_2 和 \check{D}_{22} 被定义为

$$\begin{cases} \check{A} = (A + BF_0 + I)^{-1}(A + BF_0 - I) \\ \check{B} = \sqrt{2}(A + BF_0 + I)^{-1}B \\ \check{E} = \sqrt{2}(A + BF_0 + I)^{-1}E \\ \check{C}_2 = \sqrt{2}(C_2 + D_2 F_0)(A + BF_0 + I)^{-1} \\ \check{D}_2 = D_2 - (C_2 + D_2 F_0)(A + BF_0 + I)^{-1}B \\ \check{D}_{22} = D_{22} - (C_2 + D_2 F_0)(A + BF_0 + I)^{-1}E \end{cases} \quad (13.81)$$

又其中 F_0 的选择是使得 $A + BF_0$ 在 -1 处没有特征值。只要 (A, B) 可镇定的就可做到这一点。为了后面的应用,我们用 $\check{\Sigma}_P$ 代表 $(\check{A}, \check{B}, \check{C}_2, \check{D}_2)$ 所表示的子系统。Glover^[8]已经证明(也可参见第4章)离散时间系统(13.79)的 H_∞ 优化的最小值等于连续时间系统(13.80)的 H_∞ 优化的最小值。因此从这个结论可直接推出离散时间系统(13.79)的 H_∞ -ADDPMS 的可解性等价于连续时间系统(13.80)的 H_∞ -ADDPMS 的可解性。根据 Scherer^[20,21]的结果,系统(13.80)的 H_∞ -ADDPMS 可解的充分必要条件是:

- (1) (\check{A}, \check{B}) 是可镇定的;
- (2) 存在一个矩阵 \check{S} 使得 $\check{D}_{22} + \check{D}_2 \check{S} = 0$;
- (3) $\text{Im}(\check{E} + \check{B}\check{S}) \subset \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P) \cap \{ \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}^0} \mathcal{L}_\lambda(\check{\Sigma}_P) \}$ 。

容易证明 (A, B) 可镇定等价于 (\check{A}, \check{B}) 可镇定。因此只需要证明下面两陈述等价即可证明定理 13.1。

陈述 1:

- (1) 存在一个 S 使得 $D_{22} + D_2 S = 0$;
- (2) $\text{Im}(E + BS) \subset \{ \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) + B\text{Ker}(D_2) \} \cap \{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{L}_\lambda(\Sigma_P) \}$ 。

陈述 2:

(1) 存在一个 \check{S} 使得 $\check{D}_{22} + \check{D}_2 \check{S} = 0$;

(2) $\text{Im}(\check{E} + \check{B} \check{S}) \subset \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P) \cap \{ \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}^0} \mathcal{S}_\lambda^+(\check{\Sigma}_P) \}$.

陈述 1 \Rightarrow 陈述 2: 不失一般性, 假设 (13.79) 中的 $D_{22} = 0$. 根据定理 3.11 和定理 3.12, 几何子空间 \mathcal{V}^* , \mathcal{S}^* , \mathcal{V}_λ 和 \mathcal{S}_λ 在任何状态反馈、输出馈入、非奇异输入和非奇异输出变换下都是不变的. 在后面都假设子系统 Σ_P 所代表的四元组 (A, B, C_2, D_2) 已经是定理 4.5 的特殊坐标基形式. 为在后面参考方便, 进一步假设 Σ_P 被分解为

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_a^{0*} \oplus \mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_b \oplus \mathcal{X}_d \oplus \mathcal{X}_a^{01} \quad (13.82)$$

其中 \mathcal{X}_a^{01} 是和 Σ_P 在 $z = -1$ 处的不变零点相关的零点动态, \mathcal{X}_a^{0*} 是和 Σ_P 在单位圆上的不变零点相关的零点动态. 特别有

$$A = \begin{bmatrix} A_{aa}^{0*} & 0 & 0 & 0 & L_{ab}^{0*} C_b & L_{ad}^{0*} C_d & 0 \\ 0 & A_{aa}^- & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & L_{ad}^- C_d & 0 \\ B_c E_{ca}^{0*} & B_c E_{ca}^- & A_{cc} & B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & L_{cd} C_d & B_c E_{ca}^{01} \\ 0 & 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & L_{ad}^+ C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d & 0 \\ B_d E_{da}^{0*} & B_d E_{da}^- & B_d E_{dc} & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & A_{dd} & B_d E_{da}^{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{ab}^{01} C_b & L_{ad}^{01} C_d & A_{aa}^{01} \end{bmatrix} + B_0 C_{2,0} \quad (13.83)$$

$$B = [B_0 \quad B_1] = \begin{bmatrix} B_{0a}^{0*} & 0 & 0 \\ B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0d} & B_d & 0 \\ B_{0a}^{01} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{0a}^{0*} \\ E_a^- \\ E_c \\ E_a^+ \\ E_b \\ E_d \\ E_a^{01} \end{bmatrix} \quad (13.84)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.85)$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{2,0} \\ C_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0a}^{0*} & C_{0a}^- & C_{0c} & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0d} & C_{0a}^{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.86)$$

其中 A_{0a}^{01} 的所有特征值在 -1 点, A_{0a}^{0*} 的所有特征值在除 -1 点以外的单位圆上.

则陈述 1 的(2)中的条件等价于对一些有适当维数的矩阵 X_a^{01} 和 X_d , 有

$$E_a^+ = 0, \quad E_b = 0, \quad E_a^{01} = (I + A_{aa}^{01})X_a^{01}, \quad E_d = B_d X_d \quad (13.87)$$

和

$$E_a^{0*} = Y_a^{0*} X_a^{0*} \quad (13.88)$$

其中矩阵 Y_a^{0*} 的列属于 $\bigcap_{\alpha \in \lambda(A_{aa}^{0*})} \text{Im}(\alpha I - A_{aa}^{0*})$, X_a^{0*} 是具有适当维数的矩阵。

现在选择 F_0 为

$$F_0 = - \begin{bmatrix} C_{0a}^{0*} & C_{0a}^- & C_{0c} & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0d} & C_{0a}^{01} \\ E_{da}^{0*} & E_{da}^- & E_{dc} & E_{da}^+ & E_{db} & 0 & E_{da}^{01} - \hat{E}_{da}^{01} \\ E_{ca}^{0*} & E_{ca}^- & 0 & E_{ca}^+ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.89)$$

然后有

$$\hat{A} = A + BF_0 = \begin{bmatrix} A_{aa}^{0*} & 0 & 0 & 0 & L_{ab}^{0*} C_b & L_{ad}^{0*} C_d & 0 \\ 0 & A_{aa}^- & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & L_{ad}^- C_d & 0 \\ 0 & 0 & A_{cc} & 0 & L_{cb} C_b & L_{cd} C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & L_{ad}^+ C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{dd} & B_d \hat{E}_{da}^{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{ab}^{01} C_b & L_{ad}^{01} C_d & A_{aa}^{01} \end{bmatrix} \quad (13.90)$$

和

$$\hat{C}_2 = C_2 + D_2 F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.91)$$

为了简化起见,进一步假设 A_{cc} , A_{bb} 和 A_{dd} 在 -1 处没有特征值。否则就需要增加预状态反馈把特征值重新定位。同样 \hat{E}_{da}^{01} 的选择也使得 \hat{A} 在 -1 处没有特征值。

下面可计算出

$$(A + BF_0 + D)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (I + A_{aa}^{0*})^{-1} & 0 & 0 & 0 & X_{15} & X_{16} & X_{17} \\ 0 & (I + A_{aa}^-)^{-1} & 0 & 0 & X_{25} & X_{26} & X_{27} \\ 0 & 0 & (I + A_{cc})^{-1} & 0 & X_{35} & X_{36} & X_{37} \\ 0 & 0 & 0 & (I + A_{aa}^+)^{-1} & X_{45} & X_{46} & X_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{55} & X_{56} & X_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{65} & X_{66} & X_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{75} & X_{76} & X_{77} \end{bmatrix} \quad (13.92)$$

其中

$$X_{55} = (I + A_{bb})^{-1} [I - L_{bd} C_d (I + A_{dd})^{-1} B_d \hat{E}_{da}^{01} \Delta^{-1} L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1}] \quad (13.93)$$

$$X_{56} = -(I + A_{bb})^{-1} L_{bd} \{I + L_{bd} C_d (I + A_{dd})^{-1} B_d \hat{E}_{da}^{01} \Delta^{-1} \times [L_{ad}^{01} - L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1} L_{bd}]\} C_d (I + A_{dd})^{-1} \quad (13.94)$$

$$X_{66} = (I + A_{dd})^{-1} \{B_d \hat{E}_{da}^{01} \Delta^{-1} [L_{ad}^{01} - L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1} L_{bd}] C_d (I + A_{dd})^{-1} + I\} \quad (13.95)$$

和

$$X_{57} = (I + A_{bb})^{-1} L_{bd} C_d (I + A_{dd})^{-1} B_d \hat{E}_{da}^{01} \Delta^{-1} \quad (13.96)$$

$$X_{65} = (I + A_{dd})^{-1} B_d \hat{E}_{da}^{01} \Delta^{-1} L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1} \quad (13.97)$$

$$X_{67} = -(I + A_{dd})^{-1} B_d \hat{E}_{da}^{01} \Delta^{-1} \quad (13.98)$$

$$X_{75} = -\Delta^{-1} L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1} \quad (13.99)$$

$$X_{76} = \Delta^{-1} [L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1} L_{bd} - L_{ad}^{01}] C_d (I + A_{dd})^{-1} \quad (13.100)$$

$$X_{77} = \Delta^{-1} \quad (13.101)$$

$$X_{15} = -(I + A_{aa}^{0*})^{-1} (L_{ab}^{0*} C_b X_{55} + L_{ad}^{0*} C_d X_{65}) \quad (13.102)$$

$$X_{16} = -(I + A_{aa}^{0*})^{-1} (L_{ab}^{0*} C_b X_{56} + L_{ad}^{0*} C_d X_{66}) \quad (13.103)$$

$$X_{17} = -(I + A_{aa}^{0*})^{-1} (L_{ab}^{0*} C_b X_{57} + L_{ad}^{0*} C_d X_{67}) \quad (13.104)$$

$$X_{25} = -(I + A_{aa}^-)^{-1} (L_{ab}^- C_b X_{55} + L_{ad}^- C_d X_{65}) \quad (13.105)$$

$$X_{26} = -(I + A_{aa}^-)^{-1} (L_{ab}^- C_b X_{56} + L_{ad}^- C_d X_{66}) \quad (13.106)$$

$$X_{27} = -(I + A_{aa}^-)^{-1} (L_{ab}^- C_b X_{57} + L_{ad}^- C_d X_{67}) \quad (13.107)$$

$$X_{35} = -(I + A_{cc})^{-1} (L_{cb} C_b X_{55} + L_{cd} C_d X_{65}) \quad (13.108)$$

$$X_{36} = -(I + A_{cc})^{-1} (L_{cb} C_b X_{56} + L_{cd} C_d X_{66}) \quad (13.109)$$

$$X_{37} = -(I + A_{cc})^{-1} (L_{cb} C_b X_{57} + L_{cd} C_d X_{67}) \quad (13.110)$$

$$X_{45} = -(I + A_{aa}^+)^{-1} (L_{ab}^+ C_b X_{55} + L_{ad}^+ C_d X_{65}) \quad (13.111)$$

$$X_{46} = -(I + A_{aa}^+)^{-1} (L_{ab}^+ C_b X_{56} + L_{ad}^+ C_d X_{66}) \quad (13.112)$$

$$X_{47} = -(I + A_{aa}^+)^{-1} (L_{ab}^+ C_b X_{57} + L_{ad}^+ C_d X_{67}) \quad (13.113)$$

这里

$$\Delta = I + A_{aa}^{01} + [L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1} L_{bd} - L_{ad}^{01}] C_d (I + A_{dd})^{-1} B_d \hat{E}_{da}^{01} \quad (13.114)$$

更进一步有

$$\check{B} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} (I + A_{aa}^{0*})^{-1} B_{0a}^{0*} + X_{15} B_{0b} + X_{16} B_{0d} + X_{17} B_{0a}^{01} & X_{16} B_d & 0 \\ (I + A_{aa}^-)^{-1} B_{0a}^- + X_{25} B_{0b} + X_{26} B_{0d} + X_{27} B_{0a}^{01} & X_{26} B_d & 0 \\ (I + A_{cc})^{-1} B_{0c} + X_{35} B_{0b} + X_{36} B_{0d} + X_{37} B_{0a}^{01} & X_{36} B_d & X_{cc} \\ (I + A_{aa}^+)^{-1} B_{0a}^+ + X_{45} B_{0b} + X_{46} B_{0d} + X_{47} B_{0a}^{01} & X_{46} B_d & 0 \\ X_{55} B_{0b} + X_{56} B_{0d} + X_{57} B_{0a}^{01} & X_{56} B_d & 0 \\ X_{65} B_{0b} + X_{66} B_{0d} + X_{67} B_{0a}^{01} & X_{66} B_d & 0 \\ X_{75} B_{0b} + X_{76} B_{0d} + X_{77} B_{0a}^{01} & X_{76} B_d & 0 \end{bmatrix} \quad (13.115)$$

其中 $X_{cc} = (I + A_{cc})^{-1} B_c$.

$$\check{E} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} (I + A_{aa}^{0*})^{-1} Y_{aa}^{0*} X_a^{0*} + X_{16} B_d X_d + X_{17} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ (I + A_{aa}^-)^{-1} E_a^- + X_{26} B_d X_d + X_{27} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ (I + A_{cc})^{-1} E_c + X_{36} B_d X_d + X_{37} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{46} B_d X_d + X_{47} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{56} B_d X_d + X_{57} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{66} B_d X_d + X_{67} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{76} B_d X_d + X_{77} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \end{bmatrix} \quad (13.116)$$

$$\check{D}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -C_d (X_{65} B_{0b} + X_{66} B_{0d} + X_{67} B_{0a}^{01}) & -C_d X_{66} B_d & 0 \\ -C_d (X_{55} B_{0b} + X_{56} B_{0d} + X_{57} B_{0a}^{01}) & -C_b X_{56} B_d & 0 \end{bmatrix} \quad (13.117)$$

和

$$\check{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_d [X_{66} B_d X_d + X_{67} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01}] \\ -C_b [X_{56} B_d X_d + X_{57} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01}] \end{bmatrix} \quad (13.118)$$

接下来定义

$$\check{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -X_d + \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.119)$$

注意到

$$I + A_{aa}^{01} = \Delta - [L_{ab}^{01} C_b (I + A_{bb})^{-1} L_{bd} - L_{ad}^{01}] C_d (I + A_{dd})^{-1} B_d \hat{E}_{da}^{01} \quad (13.120)$$

容易验证出

$$\check{D}22 + \check{D}_2 \check{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_d [X_{67} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} + X_{66} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01}] \\ -C_b [X_{57} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} + X_{56} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01}] \end{bmatrix} = 0 \quad (13.121)$$

这表明陈述 2 的(1)成立, 还有

$$\begin{aligned} \check{E} + \check{B} \check{S} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} (I + A_{aa}^{0*})^{-1} Y_{aa}^{0*} X_a^{0*} + X_{16} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} + X_{17} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ (I + A_{aa}^-)^{-1} E_a^- + X_{26} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} + X_{27} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ (I + A_{cc})^{-1} E_c + X_{36} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} + X_{37} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{46} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} + X_{47} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{56} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} + X_{57} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{66} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} + X_{67} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \\ X_{76} B_d \hat{E}_{da}^{01} X_a^{01} + X_{77} (I + A_{aa}^{01}) X_a^{01} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} (I + A_{aa}^{0*})^{-1} Y_{aa}^{0*} X_a^{0*} \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.122)$$

其中 * 是一些无关紧要的矩阵。令 $\check{\Sigma}_P$ 所代表的矩阵四元组 $(\check{A}, \check{B}, \check{C}_2, \check{D}_2)$ 的状态空间被分解为

$$\check{\mathcal{X}} = \check{\mathcal{X}}_a^0 \oplus \check{\mathcal{X}}_a^- \oplus \check{\mathcal{X}}_c \oplus \check{\mathcal{X}}_a^{+*} \oplus \check{\mathcal{X}}_b \oplus \check{\mathcal{X}}_a^{+1} \oplus \check{\mathcal{X}}_d \quad (13.123)$$

其中 $\check{\mathcal{X}}_a^0, \check{\mathcal{X}}_a^-, \check{\mathcal{X}}_c, \check{\mathcal{X}}_b$ 和 $\check{\mathcal{X}}_d$ 就是 $\check{\Sigma}_P$ 的特殊坐标基中通常定义的子空间, 而 $\check{\mathcal{X}}_a^{+1}$ 是 $\check{\Sigma}_P$ 和在 $s=1$ 的不变零点相关的零点动态, $\check{\mathcal{X}}_a^{+*}$ 是和 $\check{\Sigma}_P$ 的其他不稳定零点相关的零点动态(不包括 $s=1$ 点)。依据文献[3]中第 7 章式(7.4.36), 可以证得 $\check{\Sigma}_P$ 的 $\check{\mathcal{X}}$ 和 Σ_P 的 \mathcal{X} 的关系为

$$\check{\mathcal{X}}_a^0 = \mathcal{X}_a^{0*}, \quad \check{\mathcal{X}}_a^- = \mathcal{X}_a^-, \quad \check{\mathcal{X}}_c = \mathcal{X}_c, \quad \check{\mathcal{X}}_a^{+*} = \mathcal{X}_a^{+*} \quad (13.124)$$

和

$$\check{\mathcal{X}}_b = \mathcal{X}_b, \quad \check{\mathcal{X}}_a^{+1} = \mathcal{X}_d, \quad \check{\mathcal{X}}_d = \mathcal{X}_a^{01} \quad (13.125)$$

而且, $\check{\Sigma}_P$ 和虚轴上的不变零点相对应的零点动态由下面矩阵的特征结构完全刻画:

$$\check{A}_{aa}^0 := (A_{aa}^{0*} + I)^{-1}(A_{aa}^{0*} - I) \quad (13.126)$$

从式(13.88)很容易验证出

$$\text{Im}\{(I + A_{aa}^{0*})^{-1}Y_{aa}^{0*}\} = \bigcap_{\beta \in \lambda(\check{A}_{aa}^0)} \text{Im}\{\beta I - \check{A}_{aa}^0\} \quad (13.127)$$

现在不难从式(13.122)和特殊坐标基的性质看出

$$\text{Im}(\check{E} + \check{B}\check{S}) \subset \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P) \cap \{\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}^0} \mathcal{S}_\lambda^+(\check{\Sigma}_P)\} \quad (13.128)$$

即陈述 2 的(2)成立。

陈述 2 \Rightarrow 陈述 1: 利用双线性变换和第 4 章的结果, 只要把以上的推断过程反过来即可, 因此省略。这就完成了定理 13.1 的证明。◆

13.5.2 定理 13.2 的证明

为了叙述简便, 在证明过程中都假设矩阵 A 在 -1 处没有特征值。然后定义下面的辅助连续时间系统:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{B}\check{u} + \check{E}\check{w} \\ \check{y} = \check{C}_1\check{x} + \check{D}_1\check{w} \\ \check{z} = \check{C}_2\check{x} + \check{D}_2\check{u} + \check{D}_{22}\check{w} \end{cases} \quad (13.129)$$

其中 \check{A} 、 \check{B} 、 \check{E} 、 \check{C}_1 、 \check{D}_1 、 \check{C}_2 、 \check{D}_2 和 \check{D}_{22} 的定义为

$$\begin{cases} \check{A} = (A + I)^{-1}(A - I) \\ \check{B} = \sqrt{2}(A + I)^{-1}B \\ \check{E} = \sqrt{2}(A + I)^{-1}E \\ \check{C}_1 = \sqrt{2}C_1(A + I)^{-1} \\ \check{D}_1 = D_1 - C_1(A + I)^{-1}E \\ \check{C}_2 = \sqrt{2}C_2(A + I)^{-1} \\ \check{D}_2 = D_2 - C_2(A + I)^{-1}B \\ \check{D}_{22} = D_{22} - C_2(A + I)^{-1}E \end{cases} \quad (13.130)$$

为了后面的参考方便, 令 $\check{\Sigma}_P$ 表示由矩阵四元组 $(\check{A}, \check{B}, \check{C}_2, \check{D}_2)$ 所代表的子系统, $\check{\Sigma}_Q$ 表示由矩阵四元组 $(\check{A}, \check{E}, \check{C}_1, \check{D}_1)$ 所代表的子系统。根据文献[8]的结果, 我们可以证明下面两个陈述是等价的:

(1) 式(13.1)给定的原离散时间系统 Σ 的 H_∞ -ADDPMS 是可解的;

(2) 式(13.129)给定的辅助连续时间系统 $\check{\Sigma}$ 的 H_∞ -ADDPMS 是可解的。

根据定理 9.1(也可参见文献[20]和[21]), 上面的第二个陈述也等价于下面

的条件:

- (1) (\check{A}, \check{B}) 是可镇定的;
- (2) (\check{A}, \check{C}_1) 是可检测的;
- (3) $\check{D}_{22} + \check{D}_2 \check{S} \check{D}_1 = 0$, 其中 $\check{S} = -(\check{D}_2^T \check{D}_2)^+ \check{D}_2^T \check{D}_{22} \check{D}_1^T (\check{D}_1 \check{D}_1^T)^+$;
- (4) $\text{Im}(\check{E} + \check{B} \check{S} \check{D}_1) \subset \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P) \cap \{\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}^0} \mathcal{S}_\lambda(\check{\Sigma}_P)\}$;
- (5) $\text{Ker}(\check{C}_2 + \check{D}_2 \check{S} \check{C}_1) \supset \mathcal{V}^+(\check{\Sigma}_Q) \cup \{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\check{\Sigma}_Q)\}$;
- (6) $\mathcal{V}^+(\check{\Sigma}_Q) \subset \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P)$.

首先不难检验 $(\check{A}, \check{B}, \check{C}_1)$ 是可镇定和可检测的充分和必要条件是 (A, B, C) 是可镇定和可检测。接下来根据 13.5.1 节的证明有下面的陈述等价:

(1) 陈述 I:

- ① $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^+$;
- ② $\text{Im}(E + B S) \subset \{\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) + B \text{Ker}(D_2)\} \cap \{\bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P)\}$.

(2) 陈述 II:

- ① $\check{D}_{22} + \check{D}_2 \check{S} \check{D}_1 = 0$, 其中 $\check{S} = -(\check{D}_2^T \check{D}_2)^+ \check{D}_2^T \check{D}_{22} \check{D}_1^T (\check{D}_1 \check{D}_1^T)^+$;
- ② $\text{Im}(\check{E} + \check{B} \check{S} \check{D}_1) \subset \{\mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P)\} \cap \{\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}^0} \mathcal{S}_\lambda(\check{\Sigma}_P)\}$.

对 13.5.1 节的论述进行对偶, 可以证明下面的两个陈述等价:

(1) 论述 A:

- ① $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^+$;
- ② $\text{Ker}(C_2 + D_2 S C_1) \supset \{\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \cap C_1^{-1} \{\text{Im}(D_1)\}\} \cup \{\bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q)\}$.

(2) 论述 B:

- ① $\check{D}_{22} + \check{D}_2 \check{S} \check{D}_1 = 0$, 其中 $\check{S} = -(\check{D}_2^T \check{D}_2)^+ \check{D}_2^T \check{D}_{22} \check{D}_1^T (\check{D}_1 \check{D}_1^T)^+$;
- ② $\text{Ker}(\check{C}_2 + \check{D}_2 \check{S} \check{C}_1) \supset \mathcal{V}^+(\check{\Sigma}_Q) \cup \{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^0} \mathcal{V}_\lambda(\check{\Sigma}_Q)\}$.

最后, 由第 4 章定理 4.7 可知

$$\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) = \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P), \mathcal{S}^\circ(\Sigma_P) = \mathcal{V}^+(\check{\Sigma}_P) \quad (13.131)$$

和

$$\mathcal{V}^\circ(\Sigma_Q) = \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_Q), \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) = \mathcal{V}^+(\check{\Sigma}_Q) \quad (13.132)$$

因此下面的两个陈述等价:

- (1) $\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P)$;
- (2) $\mathcal{V}^+(\check{\Sigma}_Q) \subset \mathcal{S}^+(\check{\Sigma}_P)$.

因此有定理 13.2 的结果。◆

13.5.3 定理 13.4 的证明

在反馈控制律 $u = F(\epsilon)x$ 下, 特殊坐标基下的闭环系统可表示为

$$\delta(x_a^-) = A_{aa}^- x_a^- + B_{0a}^- h_0 + L_{ad}^- h_d + L_{ab}^- h_b + E_a^- w \quad (13.133)$$

$$\delta(x_a^0) = A_{aa}^0 x_a^0 + B_{0a}^0 h_0 + L_{ad}^0 h_d + L_{ab}^0 h_b + E_a^0 w \quad (13.134)$$

$$\delta(x_{abd}^+) = A_{abd}^+ x_{abd}^+ + [B_{0abd}^+, B_{abd}^+] F_a^0(\epsilon) (x_a^0 + T_a^0 x_{abd}^+) + E_{abd}^+ w \quad (13.135)$$

$$\delta(x_c) = A_{cc}^c x_c + B_{0c} h_0 + L_{cb} h_b + L_{cd} h_d + E_c w \quad (13.136)$$

$$h_0 = [F_{a0}^+, F_{b0}^+, F_{d0}^+] x_{abd}^+ + F_{a0}^0(\epsilon) (x_a^0 + T_a^0 x_{abd}^+) \quad (13.137)$$

$$h_b = [0_{m_b}, C_b, 0_{m_b \times n_d}] x_{abd}^+, \quad h_d = [0_{m_b \times n_a^+}, 0_{m_b \times n_b}, C_d] x_{abd}^+ \quad (13.138)$$

其中

$$x_{abd}^+ = \begin{bmatrix} x_a^+ \\ x_b \\ x_d \end{bmatrix} \quad (13.139)$$

B_{0abd}^+ 已经在状态反馈设计算法步骤 13.10.1 中被定义过了。我们也利用了评注 13.2 的条件(2), 即 $D_{22} = 0$ 。 E_a^- 、 E_a^0 、 E_{abd}^+ 、 E_b 和 E_c 的定义如下:

$$\Gamma_{sp}^{-1} E = [(E_a^-)^T \quad (E_a^0)^T \quad (E_{abd}^+)^T \quad E_c^T \quad E_d^T]^T, \quad E_{abd}^+ = [(E_{ab}^+)^T \quad E_d^T]^T \quad (13.140)$$

然后从评注 13.2 的条件(3)可推出

$$E_{abd}^+ = 0 \quad (13.141)$$

和

$$\text{Im}(E_a^0) \subset \mathcal{S}(A_{aa}^0) := \bigcap_{\omega \in \lambda(A_{aa}^0)} \text{Im}\{\omega I - A_{aa}^0\} \quad (13.142)$$

为完成证明, 对闭环系统(13.133)~(13.138)进行两个状态变换:

$$\bar{x}_{abd} = \Gamma_{abd}^{-1} x_{abd}, \quad \bar{x}_c = x_c \quad (13.143)$$

其中

$$x_{abd} = \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \\ x_{abd}^+ \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \bar{x}_{abd} = \begin{bmatrix} \bar{x}_a^- \\ \bar{x}_{abd}^+ \\ \bar{x}_a^0 \end{bmatrix} \quad (13.144)$$

闭环系统在新的状态变量下可表示为

$$\delta(\bar{x}_a^-) = A_{aa}^- \bar{x}_a^- + A_{aabdt}^- \bar{x}_{abd}^+ + B_{0a}^- F_{a0}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + E_a^- w \quad (13.145)$$

$$\delta(\bar{x}_{abd}^+) = A_{abd}^+ \bar{x}_{abd}^+ + [B_{0abd}^+, B_{abd}^+] F_a^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 \quad (13.146)$$

$$\delta(\bar{x}_a^0) = (A_{aa}^0 + B_a^0 F_a^0(\epsilon)) \bar{x}_a^0 + E_a^0 w \quad (13.147)$$

$$\delta(\bar{x}_c) = A_{cc}^c \bar{x}_c + A_{cabdt}^+ \bar{x}_{abd}^+ + B_{0c} F_{a0}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 + E_c w \quad (13.148)$$

$$h_0 = [F_{a0}^+, F_{b0}^+, F_{d0}^+] \bar{x}_{abd}^+ + F_{a0}^0(\epsilon) \bar{x}_a^0 \quad (13.149)$$

$$h_b = [0_{m_b \times n_a^+} \quad C_b \quad 0_{m_b \times n_d}] \bar{x}_{abd}^+, \quad h_d = [0_{m_b \times n_a^+} \quad 0_{m_b \times n_b} \quad C_d] \bar{x}_{abd}^+ \quad (13.150)$$

其中

$$A_{aabdt}^- = B_{0a}^- [F_{a0}^+ \quad F_{b0}^+ \quad F_{d0}^+] + L_{ad}^- [0 \quad 0 \quad C_d] + L_{ab}^- [0 \quad C_b \quad 0] \quad (13.151)$$

和

$$A_{\text{caldt}}^- = B_{0c} [F_{a0}^+ \quad F_{b0} \quad F_{d0}] + L_{cb} [0 \quad C_b \quad 0] + L_{cd} [0 \quad 0 \quad C_d] \quad (13.152)$$

现在来构造第二个变换。我们需要文献[87]的结果作为准备。

引理 13.1 考虑形如式(13.29)的单输入对 (A, B) , A 的特征值都在单位圆上。令 $F(\epsilon) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 是使得 $\lambda \{A + BF(\epsilon)\} = (1 - \epsilon)\lambda(A)$ 成立的唯一矩阵, $\epsilon \in (0, 1]$ 。则存在一个非奇异的变换矩阵 $Q(\epsilon) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$\begin{aligned} (1) \quad & Q(\epsilon) \text{ 把 } A + BF(\epsilon) \text{ 变换到实 Jordan 型, 即} \\ & Q^{-1}(\epsilon) [A + BF(\epsilon)] Q(\epsilon) = J(\epsilon) \\ & \quad = \text{blkdiag} \{ J_{-1}(\epsilon), J_{+1}(\epsilon), J_1(\epsilon), \dots, J_l(\epsilon) \} \end{aligned} \quad (13.153)$$

其中

$$J_{-1} = \begin{bmatrix} -(1-\epsilon) & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -(1-\epsilon) & 1 \\ & & & & -(1-\epsilon) \end{bmatrix}_{n_1 \times n_1} \quad (13.154)$$

$$J_{+1} = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\epsilon & 1 \\ & & & & 1-\epsilon \end{bmatrix}_{n_{+1} \times n_{+1}} \quad (13.155)$$

而对每个 $i=1, 2, \dots, l$, 有

$$J_i(\epsilon) = \begin{bmatrix} J_i^*(\epsilon) & I_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & J_i^*(\epsilon) & I_2 \\ & & & & J_i^*(\epsilon) \end{bmatrix}_{2n_i \times 2n_i} \quad (13.156)$$

$$J_i^*(\epsilon) = (1-\epsilon) \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \quad (13.157)$$

这里对 $i=1, 2, \dots, l$ 有 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$, 对 $i \neq j$ 有 $\alpha_i \neq \alpha_j$ 。

(2) $|Q(\epsilon)|$ 和 $|Q^{-1}(\epsilon)|$ 都是有界的, 即对和 ϵ 无关的正常数 θ , 有

$$|Q(\epsilon)| \leq \theta, \quad |Q^{-1}(\epsilon)| \leq \theta, \quad \epsilon \in (0, 1] \quad (13.158)$$

(3) 令 $E \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 使得

$$\text{Im}(E) \subset \bigcap_{\omega \in \lambda(A)} \text{Im}(\omega I - A) \quad (13.159)$$

其中 q 是任意整数。则存在和 ϵ 无关的 $\sigma \geq 0$, 使得

$$|Q^{-1}(\epsilon)E| \leq \sigma, \quad \epsilon \in (0, 1] \quad (13.160)$$

如果根据 $J(\epsilon)$ 把 $Q^{-1}(\epsilon)E$ 划分为

$$Q^{-1}(\epsilon)E = \begin{bmatrix} E_0(\epsilon) \\ E_1(\epsilon) \\ \vdots \\ E_l(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (13.161)$$

$$E_0(\epsilon) = \begin{bmatrix} E_{01}(\epsilon) \\ E_{02}(\epsilon) \\ \vdots \\ E_{0n_0}(\epsilon) \end{bmatrix}_{n_0 \times q}, \quad E_i(\epsilon) = \begin{bmatrix} E_{i1}(\epsilon) \\ E_{i2}(\epsilon) \\ \vdots \\ E_{in_i}(\epsilon) \end{bmatrix}_{2n_i \times q} \quad (13.162)$$

则存在和 ϵ 无关的 $\beta \geq 0$, 使得对每个 $i=1, 2, \dots, l$, 有

$$|E_{in_i}(\epsilon)| \leq \beta\epsilon \quad (13.163)$$

(4) 令

$$S(\epsilon) = \text{blkdiag}\{S_{-1}(\epsilon), S_{+1}(\epsilon), S_1(\epsilon), S_2(\epsilon), \dots, S_l(\epsilon)\} \quad (13.164)$$

其中

$$S_{-1}(\epsilon) = \text{diag}\{\epsilon^{n-1}, \epsilon^{n-2}, \dots, \epsilon, 1\} \quad (13.165)$$

$$S_{+1}(\epsilon) = \text{diag}\{\epsilon^{n+1}, \epsilon^{n+2}, \dots, \epsilon, 1\} \quad (13.166)$$

对每个 $i=1, 2, \dots, l$, 有

$$S_i(\epsilon) = \text{blkdiag}\{\epsilon^{n_i-1}I_2, \epsilon^{n_i-2}I_2, \dots, \epsilon I_2, I_2\} \quad (13.167)$$

则①

$$S(\epsilon)J(\epsilon)S^{-1}(\epsilon) = \tilde{J}(\epsilon) := \text{blkdiag}\{\tilde{J}_{-1}(\epsilon), \tilde{J}_{+1}(\epsilon), \tilde{J}_1(\epsilon), \dots, \tilde{J}_l(\epsilon)\} \quad (13.168)$$

其中

$$\tilde{J}_{-1}(\epsilon) = \begin{bmatrix} -(1-\epsilon) & \epsilon & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -(1-\epsilon) & \epsilon \\ & & & & -(1-\epsilon) \end{bmatrix}_{n_{-1} \times n_{-1}} \quad (13.169)$$

$$\tilde{J}_{+1}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\epsilon & \epsilon \\ & & & & 1-\epsilon \end{bmatrix}_{n_{+1} \times n_{+1}} \quad (13.170)$$

对每个 $i=1, 2, \dots, l$, 有

$$\tilde{J}_i(\epsilon) = \begin{bmatrix} J_i^*(\epsilon) & \epsilon I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & J_i^*(\epsilon) & \epsilon I_2 \\ & & & J_i^*(\epsilon) \end{bmatrix}_{2n_i \times 2n_i} \quad (13.171)$$

$$J_i^*(\epsilon) = (1-\epsilon) \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \quad (13.172)$$

对所有 $i=1,2,\dots,l$ 有 $\beta_i > 0$, 对 $i \neq j$ 有 $\beta_i \neq \beta_j$ 。

② Lyapunov 方程

$$\tilde{J}^T(\epsilon)\tilde{P}\tilde{J}(\epsilon) - \tilde{P} = -\epsilon I \quad (13.173)$$

的唯一正定解 $\tilde{P}(\epsilon)$ 是有界的, 即存在和 ϵ 无关的正定矩阵 \tilde{P}_1 和 \tilde{P}_2 , 使得对 $\epsilon^* \in (0, 1]$, 有

$$\tilde{P}_1 \leq \tilde{P}(\epsilon) \leq \tilde{P}_2, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon^*] \quad (13.174)$$

(5) 存在和 ϵ 无关的 $\alpha, \beta \geq 0$, 使得对所有 $\epsilon \in (0, 1]$, 有

$$|F(\epsilon)Q(\epsilon)S^{-1}(\epsilon)| \leq \alpha \epsilon \quad (13.175)$$

和

$$|F(\epsilon)AQ(\epsilon)S^{-1}(\epsilon)| \leq \beta \epsilon \quad (13.176)$$

♣

我们现在对闭环系统定义第二个状态变换:

$$\tilde{x}_a^- = \bar{x}_a^-, \quad \tilde{x}_{abd}^+ = \bar{x}_{abd}^+, \quad \tilde{x}_c = \epsilon \bar{x}_c \quad (13.177)$$

$$\tilde{x}_a^0 = [(\tilde{x}_{a1}^0)^T, (\tilde{x}_{a2}^0)^T, \dots, (\tilde{x}_{al}^0)^T]^T = S_a(\epsilon)Q_a^{-1}(\epsilon)(\Gamma_{sa}^0)^{-1}\bar{x}_a^0 \quad (13.178)$$

其中

$$S_a(\epsilon) = \text{blkdiag}\{S_{a1}(\epsilon), S_{a2}(\epsilon), \dots, S_{al}(\epsilon)\} \quad (13.179)$$

和

$$Q_a(\epsilon) = \text{blkdiag}\{Q_{a1}(\epsilon), Q_{a2}(\epsilon), \dots, Q_{al}(\epsilon)\} \quad (13.180)$$

这里 $Q_{ai}(\epsilon)$ 和 $S_{ai}(\epsilon)$ 是引理 13.1 中的 $Q(\epsilon)$ 和 $S(\epsilon)$ 对三元组 (A_i, B_i, F_i) 而言的。

因此引理 13.1 的所有性质都可应用。闭环系统在这些新的状态变量下成为

$$\delta(\tilde{x}_a^-) = A_{sa}^- \tilde{x}_a^- + A_{sabd}^- \tilde{x}_{abd}^+ + B_{0a}^- F_{a0}^0(\epsilon) \Gamma_{sa}^0 Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + E_a^- w \quad (13.181)$$

$$\delta(\tilde{x}_{abd}^+) = A_{abd}^+ \tilde{x}_{abd}^+ + [B_{0abd}^+, B_{abd}^+] F_a^0(\epsilon) \Gamma_{sa}^0 Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 \quad (13.182)$$

$$\delta(\tilde{x}_a^0) = \tilde{J}_a(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + \tilde{B}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + \tilde{E}_a^0(\epsilon) w \quad (13.183)$$

$$\delta(\tilde{x}_c) = A_{cc}^c \tilde{x}_c + \epsilon [A_{cabd}^c \tilde{x}_{abd}^+ + B_{0c}^c F_{a0}^0(\epsilon) \Gamma_{sa}^0 Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + E_c^c w] \quad (13.184)$$

$$h_0 = [F_{a0}^+, F_{b0}, F_{d0}] \tilde{x}_{abd}^+ + F_{a0}^0(\epsilon) \Gamma_{sa}^0 Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 \quad (13.185)$$

和

$$h_b = [0_{m_b \times n_a^+} \quad C_b \quad 0_{m_b \times n_d}] \tilde{x}_{abd}^+, \quad h_d = [0_{m_b \times n_a^+} \quad 0_{m_b \times n_b} \quad C_d] \tilde{x}_{abd}^+ \quad (13.186)$$

其中

$$\tilde{J}_a(\epsilon) = \text{blkdiag}(\epsilon \tilde{J}_{a1}(\epsilon), \epsilon \tilde{J}_{a2}(\epsilon), \dots, \epsilon \tilde{J}_{al}(\epsilon)) \quad (13.187)$$

$$\tilde{B}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_{12}(\epsilon) & \tilde{B}_{13}(\epsilon) & \dots & \tilde{B}_{1l}(\epsilon) \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{23}(\epsilon) & \dots & \tilde{B}_{2l}(\epsilon) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (13.188)$$

对 $i=1, 2, \dots, l$ 和 $j=i+1, i+2, \dots, l$, 有

$$\tilde{B}_{ij}(\epsilon) = S_{ai}(\epsilon) Q_{ai}^{-1}(\epsilon) B_{ij} F_j(\epsilon) Q_{aj}(\epsilon) S_{aj}^{-1}(\epsilon) \quad (13.189)$$

最后有

$$\tilde{E}_a^0(\epsilon) = S_a(\epsilon) Q_a^{-1}(\epsilon) (\Gamma_{sa}^0)^{-1} E_a^0 = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{a1}^0(\epsilon) \\ \tilde{E}_{a2}^0(\epsilon) \\ \vdots \\ \tilde{E}_{al}^0(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (13.190)$$

对 $i=1, 2, \dots, l$, $\tilde{J}_{ai}(\epsilon)$ 是引理 13.1 中的 $\tilde{J}(\epsilon)$ 对矩阵三元组 (A_i, B_i, F_i) 而言的。

根据引理 13.1 可得, 对所有的 $\epsilon \in (0, 1]$, 有

$$|F_a^0(\epsilon) \Gamma_{sa}^0 Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon)| \leq \tilde{f}_{a0} \quad (13.191)$$

对 $i=1, 2, \dots, l$, 有

$$|\tilde{E}_{ai}^0(\epsilon)| \leq \tilde{e}_a^0 \epsilon \quad (13.192)$$

最后对 $i=1, 2, \dots, l$ 和 $j=i+1, i+2, \dots, l$, 有

$$|\tilde{B}_{ij}(\epsilon)| \leq \tilde{b}_{ij} \epsilon \quad (13.193)$$

这里 \tilde{f}_{a0} , \tilde{e}_a^0 和 \tilde{b}_{ij} 是一些和 ϵ 无关的正常数。

下面对闭环系统(13.181)~(13.186)构造 Lyapunov 函数。我们通过复合子系统的 Lyapunov 函数来进行。对子系统 \tilde{x}_a^- 选择 Lyapunov 函数

$$V_a^-(\tilde{x}_a^-) = (\tilde{x}_a^-)^T P_a^- \tilde{x}_a^- \quad (13.194)$$

其中 $P_a^- > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{aa}^-)^T P_a^- A_{aa}^- - P_a^- = -I \quad (13.195)$$

的唯一解。对子系统 \tilde{x}_{abd}^+ 选择 Lyapunov 函数

$$V_{abd}^+(\tilde{x}_{abd}^+) = (\tilde{x}_{abd}^+)^T P_{abd}^+ \tilde{x}_{abd}^+ \quad (13.196)$$

其中 $P_{abd}^+ > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{abd}^{+c})^T P_{abd}^+ A_{abd}^{+c} - P_{abd}^+ = -I \quad (13.197)$$

的唯一解。 A_{aa}^- 和 A_{abd}^{+c} 的渐近稳定性保证了 P_a^- 和 P_{abd}^+ 的存在性。对于子系统

$$\tilde{x}_a^0 = [(\tilde{x}_{a1}^0)^T, (\tilde{x}_{a2}^0)^T, \dots, (\tilde{x}_{ai}^0)^T]^T \quad (13.198)$$

选择 Lyapunov 函数

$$V_a^0(\tilde{x}_a^0) = \sum_{i=1}^l \frac{(\alpha_a^0)^{i-1}}{\epsilon} (\tilde{x}_{ai}^0)^T P_{ai}^0(\epsilon) \tilde{x}_{ai}^0 \quad (13.199)$$

其中 α_a^0 是正标量, 它的值在后面确定。每个 $P_{ai}^0(\epsilon)$ 是 Lyapunov 方程

$$\tilde{J}_{ai}(\epsilon)^T P_{ai}^0 \tilde{J}_{ai}(\epsilon) - P_{ai}^0 = -\epsilon I \quad (13.200)$$

的唯一解, 从引理 13.1 可知对一些和 ϵ 无关的 \bar{P}_{ai} , 有

$$P_{ai}(\epsilon) \leq \bar{P}_{ai} \quad (13.201)$$

类似的, 对子系统 \tilde{x}_c 选择 Lyapunov 函数

$$V_c(\tilde{x}_c) = \tilde{x}_c^T P_c \tilde{x}_c \quad (13.202)$$

其中 $P_c > 0$ 是 Lyapunov 方程

$$(A_{cc}^c)^T P_c A_{cc}^c - P_c = -I \quad (13.203)$$

的唯一解。 A_{cc}^c 的渐近稳定性保证了 P_c 的存在性。

现在对闭环系统(13.181)~(13.186)构造下面的 Lyapunov 函数:

$$V(\tilde{x}_a^-, \tilde{x}_{abd}^+, \tilde{x}_a^0, \tilde{x}_c) = V_a^-(\tilde{x}_a^-) + \alpha_{abd}^+ V_{abd}^+(\tilde{x}_{abd}^+) + V_a^0(\tilde{x}_a^0) + V_c(\tilde{x}_c) \quad (13.204)$$

首先考虑 $V_a^0(\tilde{x}_a^0)$ 沿着子系统 \tilde{x}_a^0 轨迹上的差分, 即

$$\begin{aligned} \Delta V_a^0 &= \sum_{i=1}^l \left\{ -(\alpha_a^0)^{i-1} (\tilde{x}_{ai}^0)^T \tilde{x}_{ai}^0 + 2 \sum_{j=i+1}^l \frac{(\alpha_a^0)^{i-1}}{\epsilon} (\tilde{x}_{ai}^0)^T \tilde{J}_{ai}^T(\epsilon) P_{ai}^0(\epsilon) \right. \\ &\quad \times [\tilde{B}_{ij}(\epsilon) \tilde{x}_{aj}^0 + \tilde{E}_{ai}^0(\epsilon) w] + \frac{(\alpha_a^0)^{i-1}}{\epsilon} \left(\sum_{j=i+1}^l \tilde{B}_{ij}(\epsilon) \tilde{x}_{aj}^0(\epsilon) + \tilde{E}_{ai}^0(\epsilon) w \right)^T P_{ai}^0(\epsilon) \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{j=i+1}^l \tilde{B}_{ij}(\epsilon) \tilde{x}_{aj}^0(\epsilon) + \tilde{E}_{ai}^0(\epsilon) w \right) \right\} \end{aligned} \quad (13.205)$$

利用式(13.192)、式(13.193)和引理 13.1, 不难证明存在一个 $\alpha_a^0 > 0$, 使得对和 ϵ 无关的非负常数 α_1 , 有

$$\Delta V_a^0 \leq -\frac{3}{4} |\tilde{x}_a^0|^2 + \alpha_1 |w|^2 \quad (13.206)$$

根据式(13.206), V 在闭环系统(13.181)~(13.186)轨迹上的差分可计算为

$$\begin{aligned} \Delta V &\leq -(\tilde{x}_a^-)^T \tilde{x}_a^- + 2(\tilde{x}_a^-)^T (A_{aa}^-)^T P_a^- \\ &\quad \times [A_{aabd}^-(\epsilon) \tilde{x}_{abd}^+ + B_{0a}^- F_{a0}^0(\epsilon) \Gamma_{sa}^0 Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + E_a^- w] \\ &\quad - \alpha_{abd}^+ (\tilde{x}_{abd}^+)^T \tilde{x}_{abd}^+ + 2\alpha_{abd}^+ (\tilde{x}_{abd}^+)^T (A_{abd}^+)^T P_{abd}^+ \\ &\quad \times [B_{0abd}^+, B_{abd}^+] F_a^0(\epsilon) Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 \\ &\quad - \frac{3}{4} |\tilde{x}_a^0|^2 + \alpha_1 |w|^2 - \tilde{x}_c^T \tilde{x}_c + 2\epsilon \tilde{x}_c^T (A_{cc}^c)^T P_c [A_{cabd}^+ \tilde{x}_{abd}^+ \end{aligned}$$

$$+ B_{0c} F_{a0}^0(\epsilon) \Gamma_{sa}^0 Q_a(\epsilon) S_a^{-1}(\epsilon) \tilde{x}_a^0 + E_c w] \quad (13.207)$$

利用式(13.191)并注意到式(13.204)关于 α_{abd} 的定义, 很容易验证存在一个 $\epsilon_1^* \in (0, 1]$, 使得对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon_1^*)$ 以及和 ϵ 无关的正常数 α_2 , 有

$$\Delta V \leq -\frac{1}{2} |\tilde{x}_a^-|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{x}_{ab}^+|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{x}_a^0|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{x}_c|^2 + \alpha_2 |w|^2 \quad (13.208)$$

从式(13.208)可得在没有扰动 w 的情况下, 闭环系统是渐近稳定的。还需要证明对任意给定的 $\gamma > 0$, 存在一个 $\epsilon^* \in (0, \epsilon_1^*)$, 使得对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, 有

$$\|h\|_2 \leq \gamma \|w\|_2 \quad (13.209)$$

为实现这个目的, 对式(13.208)的两边从 0 到 ∞ 求和。注意到 $V \geq 0$ 和 $k=0$ 时 $V(k)=0$, 有

$$\|\tilde{x}_a^0\|_2 \leq (\sqrt{2\alpha_3}) \|w\|_2 \quad (13.210)$$

和式(13.191)一起代入式(13.182)可得对一些和 ϵ 无关的正常数 α_3 , 有

$$\|\tilde{x}_{abd}^+\|_2 \leq \alpha_3 \epsilon \|w\|_2 \quad (13.211)$$

最后, 注意到

$$h = \Gamma_{op} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_d \\ h_b \end{bmatrix} \quad (13.212)$$

其中 h_0, h_d, h_b 已经在闭环系统(13.181)~(13.186)中定义, 对一些和 ϵ 无关的正常数 α_4 , 有

$$\|h\|_2 \leq \alpha_4 |\Gamma_{op}| \epsilon \|w\|_2 \quad (13.213)$$

为完成证明, 我们选择 $\epsilon^* \in (0, \epsilon_1^*]$, 使得

$$\alpha_4 |\Gamma_{op}| \epsilon \leq \gamma \quad (13.214)$$

最后, 为了服务定理 13.6 的证明, 从闭环系统方程(13.181)~(13.186)很容易验证出从 $E_a^0 w$ 到 h 的传递函数为

$$T_{a0}^0(z, \epsilon) = T_{a0}(z, \epsilon) [sI - A_{aa}^0 - B_a^0 F_a^0(\epsilon)]^{-1} \quad (13.215)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 对每个 z 有 $T_{a0}(z, \epsilon) \rightarrow 0$. ◆

13.5.4 定理 13.5 的证明

不失一般性但可简便, 假设矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 已经是定理 4.5 的特殊坐标基的形式了。如果定理 13.1 的条件(2)成立, 不难验证

$$D_{22} + D_2 F_w = D_{22} + D_2 S - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (B_d^T B_d)^{-1} B_d^T E_d \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (13.216)$$

而从定理 13.1 的条件(3)可推出

$$E + BS = \begin{bmatrix} E_a^- \\ E_a^0 \\ 0 \\ 0 \\ E_c \\ B_d X_d \end{bmatrix} \quad (13.217)$$

X_d 是具有适当维数的矩阵, 以及

$$E_a^0 = Y_a^0 X_a^0 \quad (13.218)$$

其中 Y_a^0 是一个矩阵, 它的列张成了 $\bigcap_{\alpha \in \lambda(A_{aa}^0)} \text{Im}(\alpha I - A_{aa}^0)$, X_a^0 是一个具有适当维数的矩阵。下面容易看出

$$E + BF_w = \begin{bmatrix} E_a^- \\ E_a^0 \\ 0 \\ 0 \\ E_c \\ B_d X_d - B_d (B_d^T B_d)^{-1} B_d^T B_d X_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_a^- \\ E_a^0 \\ 0 \\ 0 \\ E_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.219)$$

因此有

$$\text{Im}(E + BF_w) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \cap \left\{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{S}_\lambda^\circ(\Sigma_P) \right\} \quad (13.220)$$

则根据定理 13.4 可得所需结果。◆

13.5.5 定理 13.3 和定理 13.6 的证明

下面主要是检验定理 13.6 的结果。而随着过程的进行, 定理 13.3 的结果就会很明显。

首先对式(13.1)所示的系统 Σ 进行预状态反馈律

$$u = Sy + \hat{u} \quad (13.221)$$

其中 $S = -(D_2^T D_2)^{\dagger} D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^{\dagger}$ 。在定理 13.2 的条件(3)下有 $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$ 。我们也可得到一个新的系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + BSC_1)x(k) + B\hat{u}(k) + (E + BSD_1)w(k) \\ y(k) = C_1x(k) + D_1w(k) \\ h(k) = (C_2 + D_2SD_1)x(k) + D_2\hat{u}(k) + 0 \cdot w(k) \end{cases} \quad (13.222)$$

用 $\hat{\Sigma}_P$ 和 $\hat{\Sigma}_Q$ 分别表示由矩阵四元组 $(A + BSC_1, B, C_2 + D_2SD_1, D_2)$ 和矩阵四元组 $(A + BSC_1, E + BSD_1, C_1, D_1)$ 所代表的子系统。根据 \mathcal{V}° 和 \mathcal{S}° 的定义, 可知它们在状态反馈和输出馈入律下是不变的, 则有 $\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) = \mathcal{V}^\circ(\hat{\Sigma}_P)$, $\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) = \mathcal{S}^\circ(\hat{\Sigma}_Q)$, 以及

$$\begin{bmatrix} A + BSC_1 \\ C_2 + D_2SC_1 \end{bmatrix} \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \subset (\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \oplus \{0\}) + \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} B \\ D_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.223)$$

和

$$[A + BSC_1 \quad E + BSD_1] \{(\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \oplus \mathbb{R}^q) \cap \text{Ker} \{[C_1 \quad D_1]\}\} \subset \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \quad (13.224)$$

更进一步从定理 13.2 的条件(4)可得

$$\text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} E + BSD_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset (\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \oplus \{0\}) + \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} B \\ D_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.225)$$

从定理 13.2 的条件(5)可得

$$(\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \oplus \mathbb{R}^q) \cap \text{Ker} \{[C_1 \quad D_1]\} \subset \text{Ker} \{[C_2 \quad 0]\} \quad (13.226)$$

现在可以证明从式(13.223)和式(13.225),以及定理 13.2 条件(6)可推出

$$\begin{bmatrix} A + BSC_1 & E + BSD_1 \\ C_2 + D_2SC_1 & 0 \end{bmatrix} (\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \oplus \mathbb{R}^q) \subset (\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \oplus \{0\}) + \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} B \\ D_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.227)$$

从式(13.224)和式(13.226),以及定理 13.2 条件(6)可推出

$$\begin{bmatrix} A + BSC_1 & E + BSD_1 \\ C_2 + D_2SC_1 & 0 \end{bmatrix} \{(\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \oplus \mathbb{R}^q) \cap \text{Ker} \{[C_1 \quad D_1]\}\} \subset \{ \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \oplus \{0\} \} \quad (13.228)$$

最后从式(13.227)和式(13.228)可推出存在一个矩阵 \tilde{N} 满足下面的条件:

$$\begin{bmatrix} A + BSC_1 & E + BSD_1 \\ C_2 + D_2SC_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ D_2 \end{bmatrix} \tilde{N} [C_1 \quad D_1] (\mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \oplus \mathbb{R}^q) \subset \{ \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \oplus \{0\} \} \quad (13.229)$$

不难验证矩阵 $\tilde{N} := N - S$ 是方程(13.229)的一个解,这里 N 由式(13.50)给出。根据文献[144]的结果,可以证明式(13.50)所示的矩阵 N ,或者 $N = \tilde{N} + S$ (\tilde{N} 是式(13.229)的任何一个解)具有下面的性质:

$$\text{Im}(E + BND_1) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \quad (13.230)$$

$$\text{Ker}(C_2 + D_2NC_1) \supset \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \quad (13.231)$$

和

$$(A + BNC_1) \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P), \quad D_2ND_1 = 0 \quad (13.232)$$

注意到 $D_2ND_1 = 0$,利用特殊坐标基可进一步证明

$$\text{Im}(E + BND_1) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) \cap \{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{S}_\lambda(\Sigma_P) \} \quad (13.233)$$

和

$$\text{Ker}(C_2 + D_2NC_1) \supset \mathcal{S}^\circ(\Sigma_Q) \cup \{ \bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_Q) \} \quad (13.234)$$

现在对系统(13.1)应用预输出反馈律 $u = Ny + \tilde{u}$,可得到

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \tilde{E}w(k) \\ y(k) = C_1x(k) + D_1w(k) \\ h(k) = \tilde{C}_2x(k) + D_2\tilde{u}(k) + 0 \cdot w(k) \end{cases} \quad (13.235)$$

其中 \tilde{A} 、 \tilde{E} 和 \tilde{C}_2 已在式(13.52)~式(13.54)中定义了。显然只要证明下面的控制器能解系统(13.235)的 H_∞ -ADDPMS 就足以证明定理 13.6。控制器为

$$\tilde{\Sigma}_{FC}(\epsilon): \begin{cases} v(k+1) = A_{FC}(\epsilon)v(k) + B_{FC}(\epsilon)y(k) \\ \tilde{u}(k) = C_{FC}(\epsilon)v(k) + 0 \cdot y(k) \end{cases} \quad (13.236)$$

其中 $A_{FC}(\epsilon)$ 、 $B_{FC}(\epsilon)$ 和 $C_{FC}(\epsilon)$ 由式(13.57)给出。为简便起见,用 $\tilde{\Sigma}_P$ 表示子系统

$$(\tilde{A}, B, \tilde{C}_2, D_2) := (A + BNC_1, B, C_2 + D_2NC_1, D_2) \quad (13.237)$$

用 $\tilde{\Sigma}_Q$ 表示子系统

$$(\tilde{A}, \tilde{E}, C_1, D_1) := (A + BNC_1, E + BND_1, C_1, D_1) \quad (13.238)$$

不难看出 (\tilde{A}, B, C_1) 保持可镇定和可检测。也很容易证明给定系统(13.235)和控制器(13.236)所组成的闭环系统是稳定的。闭环特征值由 $\lambda\{\tilde{A} + BF_P(\epsilon)\}$ (定理 13.4 已证明对充分小的 ϵ 都位于 C°) 和 $\lambda\{\tilde{A} + K_Q(\epsilon)C_1\}$ (同样可证明对充分小的 ϵ 都位于 C°) 给出。下面要证明在定理 13.2 的所有条件下,控制器(13.236)可实现系统(13.235)的 H_∞ -ADDPMS。根据式(13.232)~式(13.234),以及 \mathcal{V}° 、 \mathcal{S}° 、 \mathcal{V}_λ 和 \mathcal{S}_λ 对任何状态反馈和输出馈入律的不变性,可得定理 13.2 的条件(4)~(6)等价于下面的条件:

- (4') $\text{Im}(\tilde{E}) \subset \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_P) \cap \{\bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{S}_\lambda(\tilde{\Sigma}_P)\}$;
- (5') $\text{Ker}(\tilde{C}_2) \supset \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cup \{\bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q)\}$;
- (6') $\mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \supset \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_P)$; 及
- (7') $A\mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \supset \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_P)$ 。

由此可见定理 13.3 的结果显然。我们继续证明定理 13.6。

接下来,不失一般性但可简便,在余下的证明中都假设代表矩阵四元组 $(\tilde{A}, B, \tilde{C}_2, D_2)$ 的子系统 $\tilde{\Sigma}_P$ 已经被变换到定理 4.5 的特殊坐标基下。则有

$$\tilde{A} = B_0C_{2,0} + \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 & L_{ab}^-C_b & 0 & L_{ad}^-C_d \\ 0 & A_{aa}^0 & 0 & L_{ab}^0C_b & 0 & L_{ad}^0C_d \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+C_b & 0 & L_{ad}^+C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd}C_d \\ B_cE_{ca}^- & B_cE_{ca}^0 & B_cE_{ca}^+ & L_{cb}C_b & A_{cc} & L_{cd}C_d \\ B_dE_{da}^- & B_dE_{da}^0 & B_dE_{da}^+ & B_dE_{db} & B_dE_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix}$$

$$:= B_0C_{2,0} + \tilde{A}$$

(13.239)

$$B = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^0 & 0 & 0 \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0a}^0 \\ B_{0a}^+ \\ B_{0b} \\ B_{0c} \\ B_{0d} \end{bmatrix} \quad (13.240)$$

$$\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^0 & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.241)$$

$$C_{2,0} = [C_{0a}^- \ C_{0a}^0 \ C_{0a}^+ \ C_{0b} \ C_{0c} \ C_{0d}], \quad D_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.242)$$

和

$$\gamma^\circ(\tilde{\Sigma}_p) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (13.243)$$

不难从条件(4')推出

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_a \\ E_a^0 \\ 0 \\ 0 \\ E_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.244)$$

接下来对任何 $\zeta \in \gamma_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q)$, $\lambda \in \mathbb{C}^0$, 把 ζ 分块为

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ \zeta_a^0 \\ \zeta_a^+ \\ \zeta_b \\ \zeta_c \\ \zeta_d \end{bmatrix} \quad (13.245)$$

则从条件(5')可推出 $\tilde{C}_2 \zeta = 0$, 或等价的

$$C_{2,0}\zeta = 0, C_b\zeta_b = 0 \quad \text{和} \quad C_d\zeta_d = 0 \quad (13.246)$$

根据定义 3.13, 存在矢量 η 使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} - \lambda I & \tilde{E} \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = 0 \quad (13.247)$$

由式(13.247)和式(13.244)可得

$$(\tilde{A} - \lambda I)\zeta = -\tilde{E}\eta = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.248)$$

其中 * 是一些无关紧要的矢量。注意式(13.246)表明

$$(\tilde{A} - \lambda I)\zeta = (B_0 C_{2,0} + \bar{A} - \lambda I)\zeta = (\bar{A} - \lambda I)\zeta$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ (A_{aa}^+ - \lambda I)\zeta_a^+ + L_{ab}^+ C_b \zeta_b + L_{ad}^+ C_d \zeta_d \\ (A_{bb} - \lambda I)\zeta_b + L_{bd} C_d \zeta_d \\ * \\ (A_{dd} - \lambda I)\zeta_d + B_d \zeta_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ (A_{aa}^+ - \lambda I)\zeta_a^+ \\ (A_{bb} - \lambda I)\zeta_b \\ * \\ (A_{dd} - \lambda I)\zeta_d + B_d \zeta_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.249)$$

其中

$$\zeta_x = E_{da}^- \zeta_a^- + E_{da}^0 \zeta_a^0 + E_{da}^+ \zeta_a^+ + E_{db} \zeta_b + E_{dc} \zeta_c \quad (13.250)$$

从式(13.248)和式(13.249)可推出

$$(A_{aa}^+ - \lambda I)\zeta_a^+ = 0, (A_{bb} - \lambda I)\zeta_b = 0 \quad (13.251)$$

和

$$(A_{dd} - \lambda I)\zeta_d + B_d \zeta_x = 0 \quad (13.252)$$

因为 A_{aa}^+ 的所有特征值在 \mathbb{C}^\otimes 中, $(A_{aa}^+ - \lambda I)\zeta_a^+ = 0$ 表明 $\zeta_a^+ = 0$ 。类似的, 因为 (A_{bb}, C_b) 是完全可观的, $(A_{bb} - \lambda I)\zeta_b = 0$ 和 $C_b \zeta_b = 0$ 表明 $\zeta_b = 0$ 。从式(13.252)和 $C_d \zeta_d = 0$ 也可推出

$$\begin{bmatrix} A_{dd} - \lambda I & B_d \\ C_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_d \\ \zeta_x \end{bmatrix} = 0 \quad (13.253)$$

由于 (A_{dd}, B_d, C_d) 的可逆性和没有不变零点, 从式(13.253)可知 $\zeta_d = 0$ 和 $\zeta_x = 0$. 所以有

$$\zeta \in \text{Ker}\{B_d[E_{da}^- \ E_{da}^0 \ E_{da}^+ \ E_{db} \ E_{dc} \ 0]\} \quad (13.254)$$

因此

$$\mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q) \subset \text{Ker}\{B_d[E_{da}^- \ E_{da}^0 \ E_{da}^+ \ E_{db} \ E_{dc} \ 0]\} \quad (13.255)$$

而且 ζ 具有下面的性质:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ \zeta_a^0 \\ 0 \\ 0 \\ \zeta_c \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_P) \quad (13.256)$$

显然从式(13.256)和条件(6')可得

$$\mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_P) \supset \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cup \{U_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q)\} \quad (13.257)$$

类似的, 对任何 $\xi \in \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q)$, 条件(5')和(7')表明 $\tilde{C}_2 \xi = 0$ 和

$$\tilde{A} \xi = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.258)$$

现在容易证明

$$\xi \in \text{Ker}\{B_d[E_{da}^- \ E_{da}^0 \ E_{da}^+ \ E_{db} \ E_{dc} \ 0]\} \quad (13.259)$$

因此

$$\mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \subset \text{Ker}\{B_d[E_{da}^- \ E_{da}^0 \ E_{da}^+ \ E_{db} \ E_{dc} \ 0]\} \quad (13.260)$$

由式(13.255)和式(13.260)可得

$$\text{Ker}\{B_d[E_{da}^- \ E_{da}^0 \ E_{da}^+ \ E_{db} \ E_{dc} \ 0]\} \supset \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cup \{U_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q)\} \quad (13.261)$$

下面把 $\tilde{A} - zI$ 分解为

$$\tilde{A} - zI = X_1 + X_2 C_2 + X_3 + X_4 + X_5 \quad (13.262)$$

其中

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_{aa}^- - zI & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & 0 & L_{ad}^- C_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c E_{ca}^- & B_c E_{ca}^0 & B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & A_{cc} - zI & L_{cd} C_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.263)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^0 & L_{ad}^0 & L_{ab}^0 \\ B_{0a}^+ & L_{ad}^+ & L_{ab}^+ \\ B_{0b} & L_{bd} & 0 \\ B_{0c} & 0 & 0 \\ B_{0d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.264)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ - zI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} - zI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{dd} - zI \end{bmatrix} \quad (13.265)$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{aa}^0 - zI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.266)$$

$$X_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_d E_{da}^- & B_d E_{da}^0 & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & 0 \end{bmatrix} \quad (13.267)$$

容易看出

$$\text{Im}(X_1) \subset \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_P) \cap \{ \bigcap_{|\lambda|=1} \mathcal{L}_\lambda(\tilde{\Sigma}_P) \} \quad (13.268)$$

$$\text{Ker}(X_3) \supset \mathcal{V}^\circ(\tilde{\Sigma}_P) \supset \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cup \{ \bigcup_{|\lambda|=1} \mathcal{N}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q) \} \quad (13.269)$$

从式(13.261)也可得到

$$\text{Ker}(X_5) \supset \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cup \{ \cup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q) \} \quad (13.270)$$

根据定理 13.4 的证明,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\| [\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} \|_\infty < \kappa_P \quad (13.271)$$

其中 κ_P 是和 ϵ 无关的正常数。而且在条件(4')下,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,对 z 的每个点都有

$$[\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} \tilde{E} \rightarrow 0 \quad (13.272)$$

和

$$[\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} X_1 \rightarrow 0 \quad (13.273)$$

根据式(13.215)可证明当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,对 z 的每个点都有

$$[\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} X_4 \rightarrow 0 \quad (13.274)$$

我们可对偶地证明

$$\| [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] \|_\infty < \kappa_Q \quad (13.275)$$

其中 κ_Q 是独立于 ϵ 的正常数。如果条件(5')得到满足,则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,对 z 的每一点有下面的结果:

$$\tilde{C}_2 [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] \rightarrow 0 \quad (13.276)$$

$$X_3 [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] \rightarrow 0 \quad (13.277)$$

和

$$X_5 [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] \rightarrow 0 \quad (13.278)$$

最后,很容易验证由系统(13.235)和控制器(13.236)所形成的从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵为

$$\begin{aligned} T_{hw}(z, \epsilon) = & [\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} \tilde{E} \\ & + \tilde{C}_2 [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] + [\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \\ & \cdot [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} (\tilde{A} - zI) [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] \end{aligned}$$

利用式(13.262),可以把 $T_{hw}(z, \epsilon)$ 重新表示为

$$\begin{aligned} T_{hw}(z, \epsilon) = & [\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} \tilde{E} \\ & + \tilde{C}_2 [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] \\ & + [\tilde{C}_2 + D_2 F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - B F_P(\epsilon)]^{-1} (X_1 + X_2 \tilde{C}_2 + X_3 + X_4 + X_5) \\ & \cdot [zI - \tilde{A} - K_Q(\epsilon)C_1]^{-1} [\tilde{E} + K_Q(\epsilon)D_1] \end{aligned}$$

根据式(13.271)~式(13.278),以及一些简单的运算,不难证明当 $\epsilon \rightarrow 0$,对于每个 z 点都有 $T_{hw}(z, \epsilon) \rightarrow 0$,等价于当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时 $\|T_{hw}\|_\infty \rightarrow 0$ 。因此只要定理 13.2 的条件满足,全阶输出反馈控制器(13.56)可解对象(13.1)的 H_∞ -ADDPMS。◆

13.5.6 定理 13.7 的证明

只要能够证明下面的控制器能够解系统(13.235)的 H_∞ -ADDPMS 就可证明定理 13.7,控制器为

$$\tilde{\Sigma}_{RC}(\epsilon): \begin{cases} v(k+1) = A_{RC}(\epsilon)v(k) + B_{RC}(\epsilon)y(k) \\ \tilde{u}(k) = C_{RC}(\epsilon)v(k) + \tilde{D}_{RC}(\epsilon)y(k) \end{cases} \quad (13.279)$$

这里 $A_{RC}(\epsilon)$ 、 $B_{RC}(\epsilon)$ 和 $C_{RC}(\epsilon)$ 由式(13.73)给出, 而

$$\tilde{D}_{RC}(\epsilon) = [0 \quad F_{P1}(\epsilon) - F_{P2}(\epsilon)K_{R1}(\epsilon)] \quad (13.280)$$

同样可证明由系统(13.235)和控制器(13.279)所形成的闭环系统是稳定的, 这是因为闭环极点为 $\lambda\{\tilde{A} + BF_P(\epsilon)\}$ 和 $\lambda\{A_R + K_R(\epsilon)C_R\}$, 对充分小的 ϵ , 这些极点都是渐近稳定的。接下来也很容易计算从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵为

$$\begin{aligned} T_{hw}(z, \epsilon) &= [\tilde{C}_2 + D_2F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - BF_P(\epsilon)]^{-1} \tilde{E} \\ &\quad + [\tilde{C}_2 + D_2F_P(\epsilon)] \cdot [zI - \tilde{A} - BF_P(\epsilon)]^{-1} (\tilde{A} - zI) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot [zI - \tilde{A}_R - K_R(\epsilon)C_R]^{-1} [E_R + K_R(\epsilon)D_R] \\ &\quad + \tilde{C}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} [zI - \tilde{A}_R - K_R(\epsilon)C_R]^{-1} [E_R + K_R(\epsilon)D_R] \end{aligned}$$

根据文献[79]的结果(即性质 2.2.1), 我们可以证明

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} \mathcal{S}^\circ(\Sigma_{QR}) = \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cap C_1^{-1}\{\text{Im}(D_1)\} \quad (13.281)$$

和

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} \cup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_{QR}) = \cup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q) \quad (13.282)$$

因此有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix} (\mathcal{S}^\circ(\Sigma_{QR}) \cup \{\cup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_{QR})\}) \\ &= \{\mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cap C_1^{-1}\{\text{Im}(D_1)\}\} \cup \{\cup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q)\} \\ &\subset \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cup \{\cup_{|\lambda|=1} \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}_Q)\} \end{aligned} \quad (13.283)$$

余下部分的证明思路同定理 13.6 的证明一样。 ◆

第 14 章 离散时间系统的鲁棒和完全跟踪

14.1 导 论

本章和第 10 章相对应。本章给出下面离散时间系统的鲁棒和完全跟踪 (RPT) 问题(可参见文献[145]):

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = C_1x(k) + D_1w(k) \\ h(k) = C_2x(k) + D_2u(k) + D_{22}w(k) \end{cases} \quad (14.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动, $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^l$ 是被控输出。假设 (A, B) 可镇定和 (A, C_1) 可检测。为方便后面参考, 定义 Σ_p 和 Σ_Q 分别是由矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 和 (A, E, C_1, D_1) 所表示的子系统。给定外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 以及任何参考信号 $r \in \mathbb{R}^l$, 离散时间系统 (14.1) 的鲁棒和完全跟踪 (RPT) 问题是找到一个有下面形式的参数化动态测量反馈控制律:

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}}(\epsilon)v(k) + B_{\text{cmp}}(\epsilon)y(k) + G(\epsilon)r(k) \\ u(k) = C_{\text{cmp}}(\epsilon)v(k) + D_{\text{cmp}}(\epsilon)y(k) + H(\epsilon)r(k) \end{cases} \quad (14.2)$$

使得控制律 (14.2) 应用于系统 (14.1) 时, 有

(1) 存在一个 $\epsilon^* > 0$, 对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$, 在 $r=0$ 和 $w=0$ 时的闭环是渐近稳定的;

(2) 令 $h(k, \epsilon)$ 为闭环被控输出响应, $e(k, \epsilon)$ 是相应的跟踪误差, 即 $e(k, \epsilon) := h(k, \epsilon) - r(k)$, 则对任意的初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\text{当 } \epsilon \rightarrow 0 \text{ 时, } J_p(x_0, w, r, \epsilon) := \|e\|_p \rightarrow 0 \quad (14.3)$$

本章中要导出一组鲁棒和完全跟踪问题有解的充分和必要条件, 并在这组条件下提出构造可解此问题的反馈律算法。和连续时间情况相比(见第 10 章), 这里所提出的 RPT 问题可解性条件是十分苛刻的。我们随后会引入一个修正的问题, 它可用于一大类的离散时间系统。修正的形式将产生可使闭环系统内稳定的控制律, 并在有延迟的情况下跟踪参考信号。如果我们能够超前几步知道参考信号, 只要给定对象满足一组新的较为弱化的条件, 修正的跟踪控制策略则可在几步之后精确跟踪参考信号。

14.2 可解性条件和解

对于系统(14.1),下面的定理给出了鲁棒和完全跟踪可解的必要和充分条件。和第10章一样,本章通过构造性的算法来证明这些条件的充分性。结果表明对于离散时间鲁棒和完全跟踪问题,可选择和调节参数无关的控制律。

定理 14.1 考虑系统(14.1),外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 初始条件 $x(0) = x_0$, 则对任何参考信号 $r(k)$, 控制律(14.2)可解鲁棒和完全跟踪问题的必要和充分条件是:

- (1) (A, B) 可镇定和 (A, C_1) 可检测;
- (2) $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^+$;
- (3) Σ_P 是右可逆和最小相位, 没有无限零点;
- (4) $\text{Ker}(C_2 + D_2 S C_1) \supset C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \}$. ♣

证明 首先证明条件(1)~(4)是必要的。首先考虑 $r(k) \equiv 0$ 的情况。这时鲁棒和完全跟踪问题成为完全调节问题。采用第10章的同样思路,把对给定系统(14.1)的完全调节问题变为下面系统的几乎干扰解耦问题:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + [E \ I] \tilde{w}(k), & x(0) = 0 \\ y(k) = C_1 x(k) + [D_1 \ 0] \tilde{w}(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) + [D_{22} \ 0] \tilde{w}(k) \end{cases} \quad (14.4)$$

为参照方便,令 $\tilde{\Sigma}_Q$ 为由矩阵四元组 $(A, [E \ I], C_1, [D_1 \ 0])$ 所表示的子系统。根据第13章的离散时间几乎干扰解耦问题的结果,可以证明如果以上系统的几乎干扰问题是可解的,则下面的条件成立:

- (1) (A, B) 可镇定和 (A, C_1) 可检测;
- (2) $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2^T D_2)^+ D_2^T D_{22} D_1^T (D_1 D_1^T)^+$;
- (3) $\text{Im}([E + B S D_1 \ I]) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) + B \text{Ker}(D_2)$;
- (4) $\text{Ker}(C_2 + D_2 S C_1) \supset \mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \cap C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \}$;
- (5) $\mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) \subset \mathcal{V}^\circ(\Sigma_P)$.

接下来容易看出 $\mathcal{S}^\circ(\tilde{\Sigma}_Q) = \mathbb{R}^n$, 因此第(5)项表明 $\mathcal{V}^\circ(\Sigma_P) = \mathbb{R}^n$, 或等价的, Σ_P 是右可逆的, 没有无限零点, 且在 \mathbb{C}^∞ 中没有不变零点, 第(4)项则等价 $\text{Ker}(C_2 + D_2 S C_1) \supset C_1^{-1} \{ \text{Im}(D_1) \}$ 。所以只要证明如果 RPT 问题可解, 子系统 Σ_P 必须是最小相位。我们在后面会证明这个事实。

首先注意到第(2)个条件 $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$ 表明如果对系统(14.1)应用预输出反馈律

$$u(k) = S y(k) \quad (14.5)$$

则所形成的新系统就具有从 w 到 h 的零直接传输项。因此不失一般性,在后面的证明中假设 $D_{22}=0$ 。

接下来证明对于一般的非零参考 $r(k)$,如果鲁棒和完全跟踪问题可解, Σ_P 必须是最小相位的,即 Σ_P 在单位圆上没有任何不变零点。事实上这个条件即使在 $w=0$ 和 $x_0=0$ 时也必须成立,即对下面系统的鲁棒和完全跟踪问题:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = C_1x(k) \\ e(k) = C_2x(k) + D_2u(k) - r(k) = h(k) - r(k) \end{cases} \quad (14.6)$$

现在,如果把 r 当成外部扰动的话,上面的问题又等价于以下系统在测量反馈和内稳定约束下的几乎干扰解耦问题:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ \tilde{y}(k) = \begin{bmatrix} C_1x(k) \\ r(k) \end{bmatrix} \\ e(k) = C_2x(k) + D_2u(k) - r(k) \end{cases} \quad (14.7)$$

不失一般性,假设四元组 (A, B, C_2, D_2) 已经被变换到定理 4.5 的特殊坐标基下,即有

$$x = \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \\ x_c \end{bmatrix}, \quad h = h_0, \quad r = r_0, \quad e = e_0 = h_0 - r_0, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_c \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

和

$$x_a^-(k+1) = A_{aa}^-x_a^-(k) + B_{0a}^-h_0(k) \quad (14.9)$$

$$x_a^0(k+1) = A_{aa}^0x_a^0(k) + B_{0a}^0h_0(k) \quad (14.10)$$

$$x_c(k+1) = A_{cc}x_c(k) + B_{0c}h_0(k) + B_c[E_{ca}^-x_a^-(k) + E_{ca}^0x_a^0(k)] + B_cu_c(k) \quad (14.11)$$

$$e_0(k) = C_{2,0a}^-x_a^-(k) + C_{2,0a}^0x_a^0(k) + C_{2,0c}x_c(k) + u_0(k) - r_0(k) \quad (14.12)$$

为了把从 u 到 e 的子系统变换到特殊坐标基的标准型,我们需要把式(14.9)中的 h_0 变换到式(14.11),再到 $e_0 + r_0$,即

$$x_a^-(k+1) = A_{aa}^-x_a^-(k) + B_{0a}^-e_0(k) + B_{0a}^-r_0(k) \quad (14.13)$$

$$x_a^0(k+1) = A_{aa}^0x_a^0(k) + B_{0a}^0e_0(k) + B_{0a}^0r_0(k) \quad (14.14)$$

$$x_c(k+1) = A_{cc}x_c(k) + B_{0c}e_0(k) + B_c[E_{ca}^-x_a^-(k) + E_{ca}^0x_a^0(k)] + B_cu_c(k) + B_{0c}r_0(k) \quad (14.15)$$

不难看出从控制输入 $[u_0^T \quad u_c^T]^T$ 到误差输出 e_0 已经是定理 4.5 的标准特殊坐标基形式。则根据第 13 章的结果(即性质 13.1)可知,如果系统(14.7)在测量反馈和内稳定约束下的几乎干扰解耦问题可解,则必须存在一个非零矢量 ξ ,使得

$$\xi^H(\lambda I - A_{aa}^0) = 0 \quad \text{和} \quad \xi^H B_{0a}^0 = 0 \quad (14.16)$$

这表明矩阵对 (A_{aa}^0, B_{0a}^0) 不是完全可控。根据第 4 章特殊坐标基的性质 4.1, (A_{aa}^0, B_{0a}^0) 的不可控表明 (A, B) 的不可镇定性, 显然是个矛盾。所以从特殊坐标基的性质 4.2 可知 Σ_p 是最小相位。这就完成了必要性部分的证明。◆

注意到 $D_1 = 0$ 时, 直接传输矩阵 D_{22} 也必须是零, 定理 14.1 的最后一项, 即第(4)项成为 $\text{Ker}(C_2) \supset \text{Ker}(C_1)$ 。

我们将通过控制器的构造来证明定理 14.1 中条件的充分性, 该控制器在定理 14.1 的条件(1)~(4)下可解鲁棒和完全跟踪问题。下面的小节会完成这些工作。结果表明在定理 14.1 的可解性条件下, 可解系统(14.1)的鲁棒和完全跟踪的控制律无需任何调节参数。这样控制律(14.2)可被替换为

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}}v(k) + B_{\text{cmp}}y(k) + Gr(k) \\ u(k) = C_{\text{cmp}}v(k) + D_{\text{cmp}}y(k) + Hr(k) \end{cases} \quad (14.17)$$

跟踪误差在所有的 $k \geq 0$ 时都为零。首先有下面的关于状态反馈的推论。

推论 14.1 考虑给定系统(14.1), 外部扰动 $w \in L_p, p \in [1, \infty)$, 初始条件 $x(0) = x_0$ 。假设所有状态都可测量并用于反馈, 即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 。则对任何参考信号 $r(k)$, 控制律(14.17)可解鲁棒和完全跟踪问题的充分和必要条件是下面各项成立:

- (1) (A, B) 可镇定;
- (2) $D_{22} = 0$;
- (3) Σ_p 是右可逆和最小相位的, 没有无限零点

♣

14.2.1 状态反馈下的解

当所有的状态都可测量并用于反馈时, 问题可用静态控制律来解。在这一小节中, 我们构造一个状态反馈控制律

$$u = Fx + Hr \quad (14.18)$$

在推论 14.1 所给条件下, 该控制律可解系统(14.1)的鲁棒和完全跟踪(RPT)问题。我们有下面的算法。

步骤 14.1 这一步把给定系统(14.1)的从 u 到 h 的子系统变换到定理 4.5 的特殊坐标基, 即找到非奇异的状态、输入和输出变换 Γ_s, Γ_i 和 Γ_o , 把它变换到定理 4.5 的结构形式, 以及式(4.29)~式(4.32)的简明形式, 即

$$\tilde{A} = \Gamma_s^{-1}(A - B_0 C_{2,0})\Gamma_s = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 \\ B_c E_{ca}^- & A_{cc} \end{bmatrix} \quad (14.19)$$

$$\tilde{B} = \Gamma_s^{-1}B\Gamma_i = \Gamma_s^{-1}[B_0 \quad B_1]\Gamma_i = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 \\ B_{0c} & B_c \end{bmatrix} \quad (14.20)$$

$$\tilde{D}_2 = \Gamma_o^{-1} D_2 \Gamma_i = [I_{m_0} \quad 0] \quad (14.21)$$

和

$$\tilde{C}_2 = \Gamma_o^{-1} C_2 \Gamma_s = \Gamma_o^{-1} C_{2,0} \Gamma_s = [C_{2,0a} \quad C_{2,0c}] \quad (14.22)$$

步骤 14.2 选择具有适当维数的矩阵 F_c , 使得

$$A_{cc}^c = A_{cc} - B_c F_c \quad (14.23)$$

是渐近稳定的。(A_{cc}, B_c)的完全能控性保证了这样的 F_c 存在。

步骤 14.3 最后令

$$F = -\Gamma_i \begin{bmatrix} C_{2,0a} & C_{2,0c} \\ E_{ca}^- & F_c \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad \text{和} \quad H = \Gamma_i \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma_o^{-1} \quad (14.24)$$

由此完成了算法的构造。♣

定理 14.2 考虑具有任意外部扰动 $w(k)$ 和初始条件 $x(0)$ 的给定系统 (14.1)。假设所有状态都可测量并用于反馈, 即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 。如果推论 14.1 的条件(1)~(3)都满足, 则对任意的参考信号 $r(k)$, 式(14.18)所示的控制律可解鲁棒和完全跟踪(RPT)问题, 其中 F 和 H 如同式(14.24)所给。♣

证明 当 F 和 H 如同式(14.24)所给时, 不难验证由给定对象(14.1)和控制律(14.18)所组成的闭环系统可表示为

$$x(k+1) = \Gamma_s \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 \\ 0 & A_{cc}^c \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} x(k) + \Gamma_s \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0c} \end{bmatrix} \Gamma_o^{-1} r(k) + Ew(k) \quad (14.25)$$

和

$$h(k) = r(k) \quad (14.26)$$

显然, 所形成的闭环系统是内稳定的, 对所有的 $k \geq 0$ 有 $e(k) \equiv 0$ 。所以鲁棒和完全跟踪问题被解。◆

14.2.2 测量反馈下的解

不失一般性, 本节中假设矩阵 $D_{22} = 0$ 。如果是非零, 则总可以通过下面的预输出反馈使之为零:

$$u(k) = Sy(k) \quad (14.27)$$

其中 S 是如定理 14.1 的第(2)项所给出的。结果是对离散时间系统, 由于观测器本身存在一步延迟, 全阶观测器型控制器不能达到鲁棒和完全跟踪性能。所以我们要构造降阶测量反馈控制律来解 RPT 问题。为简便起见, 假设 C_1 和 D_1 已被变换到下面的形式:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_r & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad D_1 = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14.28)$$

其中 $D_{1,0}$ 行满秩。在给出构造降阶测量反馈控制器的算法步骤之前, 首先根据式(14.28)中 C_1 和 D_1 的结构把系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + [E \quad I_n] \tilde{w}(k) \\ y(k) = C_1 x(k) + [D_1 \quad 0] \tilde{w}(k) \end{cases} \quad (14.29)$$

划分为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta(x_1) \\ \delta(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E_1 & I_r & 0 \\ E_2 & 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tilde{w} \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,02} \\ I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{w} \end{cases} \quad (14.30)$$

其中 $\delta(x_1) = x_1(k+1)$ 和 $\delta(x_2) = x_2(k+1)$ 。显然 $y_1 = x_1$ 可直接测量到, 无需进行估计。接下来令 Σ_{QR} 为

$$(A_R, E_R, C_R, D_R) = \left(A_{22}, [E_2 \quad 0 \quad I_{n-r}], \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{1,0} & 0 & 0 \\ E_1 & I_r & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (14.31)$$

容易证明 Σ_{QR} 是右可逆的, 且没有有限和无限零点。而且 (A_R, C_R) 的可检测性等价于 (A, C_1) 的可检测性。我们现在给出下面的算法。

步骤 14.4 对给定系统(14.1), 仍然假设系统(14.1)的状态变量都可测量。然后根据 14.2.1 的算法步骤 14.1~14.3 来构造增益矩阵 F 和 H 。把 F 划分成与式(14.30)中 x_1 和 x_2 相对应的两部分, 即

$$F = [F_1 \quad F_2] \quad (14.32)$$

步骤 14.5 令 K_R 是一个具有适当维数的定常矩阵, 使得

$$A_R + K_R C_R = A_{22} + \begin{bmatrix} K_{R0} & K_{R1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,02} \\ A_{12} \end{bmatrix} \quad (14.33)$$

的所有特征值在 C° 中。 (A_R, C_R) 的可检测性保证了这一点。

步骤 14.6 令

$$G_R = [-K_{R0} \quad A_{21} + K_{R1} A_{11} - (A_R + K_R C_R) K_{R1}] \quad (14.34)$$

$$\begin{cases} A_{\text{cmp}} = A_R + B_2 F_2 + K_R C_R + K_{R1} B_1 F_2 \\ B_{\text{cmp}} = G_R + (B_2 + K_{R1} B_1) [0 \quad F_1 - F_2 K_{R1}] \\ C_{\text{cmp}} = F_2 \\ D_{\text{cmp}} = [0 \quad F_1 - F_2 K_{R1}] \end{cases} \quad (14.35)$$

和

$$G = (B_2 + K_{R1} B_1) H \quad (14.36)$$

步骤 14.7 最后得到下面的降阶测量反馈控制律:

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}} v(k) + B_{\text{cmp}} y(k) + G r(k) \\ u(k) = C_{\text{cmp}} v(k) + D_{\text{cmp}} y(k) + H r(k) \end{cases} \quad (14.37)$$

由此完成测量反馈控制器的构造。 ♣

定理 14.3 考虑具有任意外部扰动 $w(k)$ 和初始条件 $x(0)$ 的给定系统(14.1)。如果定理 14.1 的条件(1)~(4)满足,则对任何参考信号 $r(k)$,式(14.37)所示的降阶测量反馈控制律可解鲁棒和完全跟踪(RPT)问题。 ♣

证明 首先定义新的状态变量

$$x_s(k) = x_2(k) - v(k) + K_{R1}x_1(k) \quad (14.38)$$

容易验证由给定系统(14.1)和降阶测量反馈控制律(14.37)所形成的闭环系统可重新表示为

$$x_s(k+1) = (A_R + K_R C_R)x_s(k) + \left[E_2 + K_R \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ E_1 \end{bmatrix} \right] w(k) \quad (14.39)$$

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) - BF_2x_s(k) + BHr(k) + Ew(k) \quad (14.40)$$

和

$$h(k) = (C_2 + D_2F)x(k) - D_2F_2x_s(k) + D_2Hr(k) \quad (14.41)$$

由于闭环极点由 $A + BF$ 和 $A_R + K_R C_R$ 的特征值确定,所以闭环系统是渐近稳定的。

根据式(14.21)、式(14.22)、式(14.24)和式(14.32)可得

$$D_2F_2x_s = D_2F \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} = -C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} \quad (14.42)$$

而从式(14.28)可推出

$$C_1^{-1}\{\text{Im}(D_1)\} = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_x & 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \quad (14.43)$$

因此定理 14.1 的最后一个条件 $\text{Ker}(C_2) \supset C_1^{-1}\{\text{Im}(D_1)\}$ 表明

$$C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \quad (14.44)$$

以及对所有的 $k \geq 0$ 有 $D_2F_2x_s(k) = 0$ 。现在容易看出式(14.41)成为

$$h(k) = r(k) \quad (14.45)$$

因此降阶测量反馈控制律解决了 RPT 问题。 ◆

定理 14.3 的结果使得定理 14.1 的充分性显然。因此结束定理 14.1 的证明。 ◆◆

下面给出例子来演示本节的结果。

例 14.1 考虑式(14.1)所示的离散时间系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (14.46)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (14.47)$$

而扰动 $w(k)$ 和初始条件 $x(0)$ 都是任意的。容易验证 (A, B) 完全可控, 子系统 Σ_P 是可逆和最小相位的, 在 $0, -\sqrt{2}/2$ 和 $\sqrt{2}/2$ 处有三个不变零点, 没有无限零点。

1) 状态反馈情况

首先假设系统的状态变量可用于反馈, 即 $C_1 = I$ 和 $D_1 = 0$ 。显然推论 14.1 的所有条件都能够满足, 因此 RPT 问题可解。根据状态反馈情况下的构造算法, 有

$$u(k) = Fx(k) + Gr(k) = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r(k) \quad (14.48)$$

不难验证由给定对象和上面的控制律所组成的闭环系统是内稳定的, 被控输出对所有 $k \geq 0$ 满足 $h(k) \equiv r(k)$ 。所以可实现鲁棒和完全跟踪的目标。

2) 测量反馈情况

令测量输出为

$$y(k) = C_1 x(k) + D_1 w(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (14.49)$$

仍然容易验证 (A, C_1) 可观, $\text{Ker}(C_2) = \text{Ker}(C_1)$ 。这样定理 14.1 的所有条件得到满足, 测量反馈控制器可解给定对象的 RPT 问题。首先进行一些适当的状态和输出变换使得 C_1 成为式(14.28)所示的形式。这可通过下面的变换来实现:

$$x = \Gamma_s \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} \quad \text{和} \quad y = \Gamma_o \tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tilde{y} \quad (14.50)$$

然后有

$$\tilde{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1.5 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} w(k) \quad (14.51)$$

和

$$\tilde{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (14.52)$$

根据测量反馈构造性算法, 我们得到一个式(14.37)所示形式的降阶测量反馈, 其中

$$A_{\text{cmp}} = 0, \quad B_{\text{cmp}} = [0 \quad 0.25], \quad G = [1 \quad -1] \quad (14.53)$$

和

$$C_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.54)$$

对于这一特例, 所得测量反馈控制律恰巧等于下面的静态测量反馈律:

$$u(k) = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r(k) \quad (14.55)$$

不难证明由给定对象和上面的静态反馈律所形成的闭环系统是渐近稳定的, 闭环极点位于 $0, \sqrt{2}/2$ 和 $-\sqrt{2}/2$, 对所有的 $k \geq 0$ 被控输出为 $h(k) = r(k)$ 。因此控制律 (14.55) 解决了给定系统的 RPT 问题。♣

14.3 几乎完全跟踪问题

和 14.2 节一样, 鲁棒和完全跟踪可解的条件对大部分的实际应用来说都太强, 特别是关于系统无限零点的限制。本节引入一个修正的问题, 即所谓的几乎完全跟踪问题, 它对一大类具有任何无限零点结构的离散时间系统都是可解的。这个修正的问题将产生内稳定的控制律, 并可以在有延迟的情况下跟踪参考信号 $r(k)$ 。如果我们能够超前几步知道参考信号, 修正的跟踪控制策略则将在几步之后精确跟踪参考信号。

为简单起见, 本节考虑没有外部扰动的离散时间系统 (14.1), 即

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = C_1 x(k) \\ h(k) = C_2 x(k) + D_2 u(k) \end{cases} \quad (14.56)$$

首先考虑被跟踪的信号 $r(k) \in \mathbb{R}^l$ 是已知的矢量序列, 即对某整数 $\kappa_d \geq 0$, $r(k+d)$ 已知, $0 \leq d \leq \kappa_d$ 。对大部分应用来说这是个相当合理的假设, 如跟踪阶跃函数、斜坡函数和正弦函数。我们在后面会处理 $r(k+d)$ 未知的情况, $d > 0$ 。现在正式定义几乎完全跟踪问题。给定离散时间系统 (14.56), 初始条件为 $x(0) = x_0$, 参考信号 $r(k)$ 满足对一个非负的整数 κ_d , $r(k+d)$ 已知, $0 < d \leq \kappa_d$ 。 κ_0 是另一个非负整数, 则 (κ_d, κ_0) 几乎干扰解耦问题就是找到下面形式的测量反馈控制律:

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}} v(k) + B_{\text{cmp}} y(k) + G_0 r(k) + \cdots + G_{\kappa_d} r(k + \kappa_d) \\ u(k) = C_{\text{cmp}} v(k) + D_{\text{cmp}} y(k) + H_0 r(k) + \cdots + H_{\kappa_d} r(k + \kappa_d) \end{cases} \quad (14.57)$$

当把控制律 (14.57) 应用于系统 (14.56) 时, 则

- (1) 闭环系统是内稳定的;
- (2) 对任何初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 跟踪误差满足

$$J(x_0, u, \kappa_d, \kappa_0) := \sum_{k=\kappa_0}^{\infty} |e(k)| = 0 \quad (14.58)$$

即对所有的 $k \geq \kappa_0$, $e(k) = 0$ 或 $h(k) = r(k)$ 。

我们有下面的定理。

定理 14.4 考虑离散时间系统(14.56), $x(0) = x_0$, 且① (A, B) 可镇定和 (A, C_1) 可观测; ② Σ_P 是右可逆和最小相位的。令 Σ_P 的无限零点结构为 $S_\infty(\Sigma_P) = \{q_1, \dots, q_{m_d}\}$, $q_1 \leq \dots \leq q_{m_d}$ (见第3章的定义3.8), (A^T, C_1^T) 的可控性指数为 $\mathcal{C} = \{k_1, \dots, k_p\}$, $k_1 \leq \dots \leq k_p$ 。则对任何参考信号, (κ_d, κ_0) 几乎完全跟踪问题是可解的, 其中 $\kappa_d = q_{m_d}$, $\kappa_0 = q_{m_d} + k_p - 1$ 。 ♣

证明 我们通过构造所需要的控制律来证明该定理。首先构造一个 Σ_P 的特殊坐标基。根据定理4.5可知存在一个非奇异的状态、输出和输入变换 Γ_s, Γ_o 和 Γ_i , 可把 Σ_P 变换到标准的特殊坐标基形式, 即

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad h = \Gamma_o \tilde{h}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u}, \quad r = \Gamma_o \tilde{r} \quad (14.59)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix}, \quad \tilde{h} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_d \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{r} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_d \end{bmatrix} \quad (14.60)$$

$$x_d = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_d} \end{bmatrix}, \quad x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iq_i} \end{bmatrix}, \quad h_d = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{m_d} \end{bmatrix} \quad (14.61)$$

$$r_d = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{m_d} \end{bmatrix}, \quad u_d = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m_d} \end{bmatrix} \quad (14.62)$$

和

$$\delta(x_a^-) = A_{aa}^- x_a^- + B_{0a}^- h_0 + L_{ad}^- h_d \quad (14.63)$$

$$\delta(x_c) = A_{cc} x_c + B_{0c} h_0 + L_{cd} h_d + B_c E_{ca}^- x_a^- + B_c u_c \quad (14.64)$$

$$h_0 = C_{2,0a}^- x_a^- + C_{2,0c} x_c + C_{2,0d} x_d + u_0, \quad u_0 \in \mathbb{R}^{m_0} \quad (14.65)$$

对每个 $i=1, \dots, m_d$, $x_i \in \mathbb{R}^{q_i}$, 有

$$\delta(x_i) = A_{q_i} x_i + L_{i0} h_0 + L_{id} h_d + B_{q_i} \left[u_i + E_{ia}^- x_a^- + E_{ic} x_c + \sum_{j=1}^{m_d} E_{ij} x_j \right] \quad (14.66)$$

$$h_i = C_{q_i} x_i = x_{i1}, \quad h_d = C_d x_d \quad (14.67)$$

其中 $\delta(*) = *(k+1)$, 三元组 $(A_{q_i}, B_{q_i}, C_{q_i})$ 具有式(4.25)所示的特殊坐标基形式。根据定理4.5可知 L_{id} 具有以下的特殊形式:

$$L_{id} = [L_{i1} \quad L_{i2} \quad \dots \quad L_{i,i-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

它的最后一行总为零。接下来对 L_{i0} 和 L_{id} 进行分块($i=1, \dots, m_d$)

$$L_{i0} = \begin{bmatrix} L_{i0,1} \\ \vdots \\ L_{i0,q_i} \end{bmatrix}, \quad L_{id} = \begin{bmatrix} L_{id,1} \\ \vdots \\ L_{id,q_i} \end{bmatrix} \quad (14.68)$$

定义一个新的受控输出为

$$\tilde{h}_n(k) = \begin{bmatrix} h_0(k) \\ h_1(k+q_1) - \sum_{j=1}^{q_1} [L_{10,j} \quad L_{1d,j}] \tilde{h}(k+q_1-j) \\ \vdots \\ h_{m_d}(k+q_{m_d}) - \sum_{j=1}^{q_{m_d}} [L_{m_d^0,j} \quad L_{m_d^d,j}] \tilde{h}(k+q_{m_d}-j) \end{bmatrix} \quad (14.69)$$

现在不难验证 \tilde{h}_n 可表示为

$$\tilde{h}_n(k) = \check{C}_2 \tilde{x}(k) + \check{D}_2 \tilde{u}(k) \quad (14.70)$$

其中

$$\check{C}_2 = \begin{bmatrix} C_{2,0a} & C_{2,0c} & C_{2,0d} \\ E_{da}^- & E_{dc} & E_{dd} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \check{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_d} & 0 \end{bmatrix} \quad (14.71)$$

$$E_{da}^- = \begin{bmatrix} E_{1a}^- \\ \vdots \\ E_{m_d a}^- \end{bmatrix}, \quad E_{dc} = \begin{bmatrix} E_{1c} \\ \vdots \\ E_{m_d c} \end{bmatrix} \quad (14.72)$$

和

$$E_{dd} = \begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1m_d} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{m_d 1} & \cdots & E_{m_d m_d} \end{bmatrix} \quad (14.73)$$

令 $\tilde{A} = \Gamma_s^{-1} A \Gamma_s$ 和 $\tilde{B} = \Gamma_s^{-1} B \Gamma_s$, 令 $\check{\Sigma}_P$ 表示 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \check{C}_2, \check{D}_2)$ 。不难证明辅助系统 $\check{\Sigma}_P$ 是右可逆和最小相位的, 且没有无限零点。

首先假设 $C_1 = I$, 采用 14.2.1 节的步骤 14.1~14.3 得到状态反馈控制律

$$\tilde{u}(k) = \tilde{F} \tilde{x}(k) + \tilde{H} r_n(k) \quad (14.74)$$

其中

$$\tilde{r}_n(k) = \begin{bmatrix} r_0(k) \\ r_1(k+q_1) - \sum_{j=1}^{q_1} [L_{10,j} \quad L_{1d,j}] \tilde{r}(k+q_1-j) \\ \vdots \\ r_{m_d}(k+q_{m_d}) - \sum_{j=1}^{q_{m_d}} [L_{m_d^0,j} \quad L_{m_d^d,j}] \tilde{r}(k+q_{m_d}-j) \end{bmatrix} \quad (14.75)$$

它具有下面的性质: ① $\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F}$ 是渐近稳定的, ② $\tilde{h}_n(k) = \tilde{r}_n(k)$ 。由此可得实际的被控输出 h 可在 q_{m_d} 步之后精确跟踪给定的参考信号 $r(k)$ 。对一些适当的矩阵

L_0, L_1, \dots, L_{m_d} , 把式(14.74)重新表示为

$$\begin{aligned} u(k) &= \Gamma_i \tilde{u}(k) = \Gamma_i [\tilde{F}x(k) + \tilde{H}r_n(k)] \\ &= \Gamma_i [\tilde{F}x(k) + \tilde{H}L_0 \tilde{r}(k) + \tilde{H}L_1 \tilde{r}(k+1) + \dots + \tilde{H}L_{m_d} \tilde{r}(k+q_{m_d})] \end{aligned} \quad (14.76)$$

令 $F = \Gamma_i \tilde{F} \Gamma_s^{-1}$ 和对 $j=0, 1, \dots, m_d$, 有

$$H_j = \Gamma_i \tilde{H} L_j \Gamma_s^{-1} \quad (14.77)$$

则有

$$u(k) = Fx(k) + H_0 r(k) + H_1 r(k+1) + \dots + H_{m_d} r(k+q_{m_d}) \quad (14.78)$$

下面来构造降阶测量反馈控制器。根据 14.2.2 节中的步骤 14.4~14.6, 可得到矩阵 B_1, B_2, F_1, F_2 和式(14.35)所给出的增益矩阵 $A_{\text{cmp}}, B_{\text{cmp}}, C_{\text{cmp}}$ 和 D_{cmp} 。注意到 (A, C_1) 可观, (A^T, C_1^T) 可控, 可控性指数为 $\{k_1, \dots, k_p\}$, 不难看出 (A_R, C_R) 也是可观的, 而 (A_R^T, C_R^T) 的可控性指数为 $\{k_1-1, \dots, k_p-1\}$ 。根据第 4 章的定理 4.3 可知存在一个增益矩阵 K_R , 使得 $A_R + K_R C_R$ 的所有特征值在原点, 以及

$$(A_R + K_R C_R)^{k_p-2} \equiv 0 \quad (14.79)$$

我们选择这样的 K_R 来构造增益矩阵 $A_{\text{cmp}}, B_{\text{cmp}}, C_{\text{cmp}}$ 和 D_{cmp} 。降阶的测量反馈律为

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}} v(k) + B_{\text{cmp}} y(k) + \sum_{j=0}^{m_d} G_j r(k+j) \\ u(k) = C_{\text{cmp}} v(k) + D_{\text{cmp}} y(k) + \sum_{j=0}^{m_d} H_j r(k+j) \end{cases} \quad (14.80)$$

其中 $G_j = (B_2 + K_R B_1) H_j$ ($j=0, 1, \dots, m_d$)。

令 $x_s(k) = x_2(k) - v(k) + K_R x_1(k)$ 。容易验证由给定系统(14.56)和降阶测量反馈控制律(14.80)所形成的闭环系统可重新表示为

$$x_s(k+1) = (A_R + K_R C_R) x_s(k) \quad (14.81)$$

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) - BF_2 x_s(k) + \sum_{j=0}^{m_d} BH_j r(k+j) \quad (14.82)$$

$$h(k) = (C_2 + D_2 F)x(k) - D_2 F_2 x_s(k) + \sum_{j=0}^{m_d} D_2 H_j r(k+j) \quad (14.83)$$

因为 $(A + BF)$ 和 $(A_R + K_R C_R)$ 的特征值都在单位圆内, 所以闭环系统是渐近稳定的。显然对任何初始条件, 从式(14.81)可得对所有的 $k \geq k_p - 1$ 有 $x_s(k) = 0$ 。因此对 $k \geq k_p - 1$, 式(14.82)和式(14.83)成为

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) + \sum_{j=0}^{m_d} BH_j r(k+j) \quad (14.84)$$

$$h(k) = (C_2 + D_2 F)x(k) + \sum_{j=0}^{m_d} D_2 H_j r(k+j) \quad (14.85)$$

和状态反馈律下有完全相同的闭环动态。如果把 $x(k_p - 1)$ 当成系统(14.84)和系统(14.85)的新初始状态,则 h 另需要 q_{m_d} 步才能精确跟踪参考信号 r 。所以对所有 $k \geq q_{m_d} + k_p - 1$ 有 $h(k) = r(k)$ 。因此控制律(14.57)解决了 (κ_d, κ_0) 的几乎完全跟踪问题,其中 $\kappa_d = q_{m_d}, \kappa_0 = q_{m_d} + k_p - 1$ 。◆

下面是一些评注。

注 14.1 考虑给定对象(14.56),它具有定理 14.4 中的所有性质。则 (κ_d, κ_0) 几乎完全跟踪问题可由形如式(14.57)所示的全阶测量反馈控制器来解,其中 $\kappa_d = q_{m_d}, \kappa_0 = q_{m_d} + k_p$ 。采用定理 14.4 证明中的同样推理,我们可以证明以下的控制器能满足要求:

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}} v(k) + \sum_{j=0}^{m_d} B H_j r(k+j) - K y(k) \\ u(k) = F v(k) + \sum_{j=0}^{m_d} H_j r(k+j) \end{cases} \quad (14.86)$$

其中 $A_{\text{cmp}} = A + BF + KC_1$, K 的选择是使得 $A + KC_1$ 的特征值都在原点,并且 $(A + KC_1)^{k_p - 1} = 0$ 。♣

注 14.2 为简单起见,考虑 Σ_P 为单输出系统,即 $l=1$,且具有相对阶 q_1 。如果参考输入 $r(k+d)$ 对所有的 $d > 0$ 未知,如果把全阶测量反馈控制器(14.86)中的 $r(k+*)$ 替换为 $r(k)$,所得到的闭环则在 $q_1 + k_p$ 步以后以延迟 q_1 步的方式跟踪参考信号。同样的,在同样的条件下,把降阶测量反馈控制器(14.80)中 $r(k+*)$ 替换为 $r(k)$,相应的闭环则在 $q_1 + k_p - 1$ 步以后以延迟 q_1 步的方式跟踪参考信号。♣

下面的例子演示了本节的主要结果。

例 14.2 考虑离散时间系统(14.56),其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 \quad (14.87)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.88)$$

不难证明 Σ_P 是可逆的,且没有任何不变零点,并分别有两个 1 阶和 2 阶的无限零点。令参考输入 $r(k)$ 为

$$r(k) = \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k/4 \\ \cos(k\pi/5) \end{bmatrix} \quad (14.89)$$

1) 状态反馈情况

首先假设测量输出 $y = x$, 即 $C_1 = I$ 。则根据定理 14.4 的证明和文献[74]所

给的软件工具,可以得到下面的非奇异状态、输入和输出变换:

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.59628 & 0 \\ 0 & 0.74536 & 0 \\ -0.5 & 0.59628 & 0.74536 \end{bmatrix} \quad (14.90)$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.74536 \\ -1.0 & 0.74536 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.44721 \\ 0.5 & 0.89443 \end{bmatrix} \quad (14.91)$$

这些变换把 Σ_P 变换到下面的特殊坐标基形式:

$$\tilde{A} = \Gamma_s^{-1} A \Gamma_s = \begin{bmatrix} 1 & 0.29814 & 1.19257 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.67082 & 1.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \Gamma_s^{-1} B \Gamma_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.92)$$

和

$$\tilde{C}_2 = \Gamma_o^{-1} C_2 \Gamma_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_2 = \Gamma_o^{-1} D_2 \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.93)$$

我们可以得到

$$\check{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.29814 & 1.19257 \\ 0.67082 & 1.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \check{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.94)$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} -1 & -0.29814 & -1.19257 \\ -0.67082 & -1.2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.95)$$

最后可得下面的内稳定状态反馈控制律:

$$u(k) = Fx(k) + H_1 r(k+1) + H_2 r(k+2) \quad (14.96)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} -3.4 & -1 & -1.4 \\ 1.6 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (14.97)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.6 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad H_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (14.98)$$

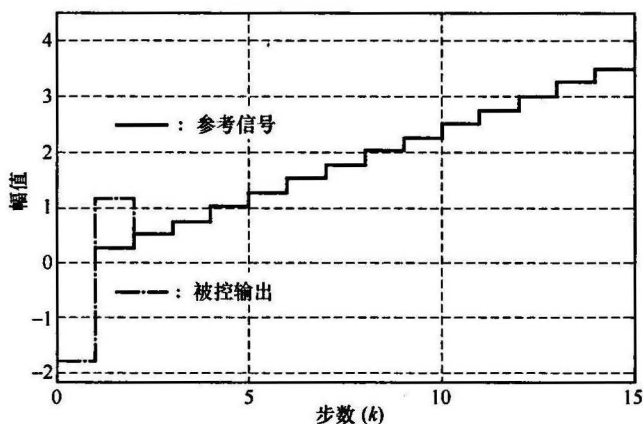
从图 14.1 的仿真结果可清楚地看出,被控输出 $h(k)$ 可在 2 步之后完全跟踪参考信号 $r(k)$, 即式(14.96)所示的控制律可达到 (κ_d, κ_0) 几乎完全跟踪性能, $\kappa_d = 2$, $\kappa_0 = 2$ 。该仿真的初始条件为

$$x_0 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (14.99)$$

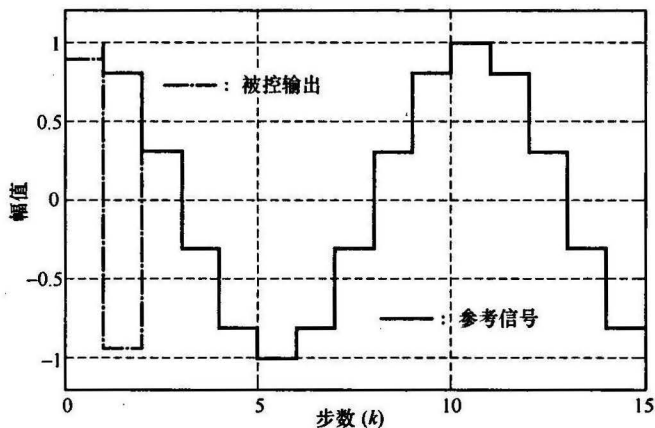
2) 测量反馈情况

令

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0] \quad (14.100)$$



(a) 被控输出 h_1 和参考信号 r_1



(b) 被控输出 h_2 和参考信号 r_2

图 14.1 状态反馈下的闭环响应

它不满足 $\text{Ker}(C_2) \supset \text{Ker}(C_1)$ 的条件。但是对几乎完全跟踪问题,我们只需要 (A, C_1) 可观。不难验证 (A, C_1) 的确可观, (A^T, C_1^T) 的可控性指数为 $\mathcal{C} = \{3\}$, 因此 $k_p = 3$ 。

(1) 全阶测量反馈情形。

根据注 14.1, 我们得到一个内稳定的全阶测量反馈控制律:

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}} v(k) + B_{\text{cmp}} y(k) + G_1 r(k+1) + G_2 r(k+2) \\ u(k) = C_{\text{cmp}} v(k) + D_{\text{cmp}} y(k) + H_1 r(k+1) + H_2 r(k+2) \end{cases}$$

(14.101)

其中

$$A_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} -2.8 & 0 & -0.8 \\ -2.0 & 0 & -1.0 \\ -3.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B_{\text{cmp}} = -K = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (14.102)$$

$$C_{\text{cmp}} = F, \quad D_{\text{cmp}} = 0, \quad G_1 = BH_1, \quad G_2 = BH_2 \quad (14.103)$$

其中观测器增益矩阵 K 的选择是使得 $A + KC_1$ 的特征值都在原点。图 14.2 的仿真结果是由给定对象和上面的全阶测量反馈控制器所组成的闭环系统得到的, 初始条件为

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \quad (14.104)$$

很显然 (κ_d, κ_0) 几乎完全跟踪问题已经得到解决, 其中 $\kappa_d = 2$ 和 $\kappa_0 = 5$, 即闭环系统在 5 步以后可完全跟踪参考信号。

(2) 降阶测量反馈情形。

根据定理 14.4 的证明, 我们得到一个内稳定的降阶测量反馈控制律:

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\text{cmp}}v(k) + B_{\text{cmp}}y(k) + G_1r(k+1) + G_2r(k+2) \\ u(k) = C_{\text{cmp}}v(k) + D_{\text{cmp}}y(k) + H_1r(k+1) + H_2r(k+2) \end{cases} \quad (14.105)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{\text{cmp}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1.8 \\ 0 & 2.4 \end{bmatrix}, \quad B_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 5.4 \\ 7.2 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -1.2 & -0.6 \end{bmatrix} \\ C_{\text{cmp}} &= \begin{bmatrix} -1 & -1.4 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad D_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} -7.2 \\ 2.8 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.107)$$

图 14.3 是给定对象和上面的降阶测量反馈控制器所形成闭环系统的仿真结果, 初始条件同全阶情形时。同样可清楚地看出实现了 (κ_d, κ_0) 几乎完全跟踪问题, 其中 $\kappa_d = 2, \kappa_0 = 4$, 即在 4 步之后闭环系统可完全跟踪参考信号。♣

最后用下面的例子来结束这一章, 它是对所有的 $d > 0, r(k+d)$ 都未知的情形。

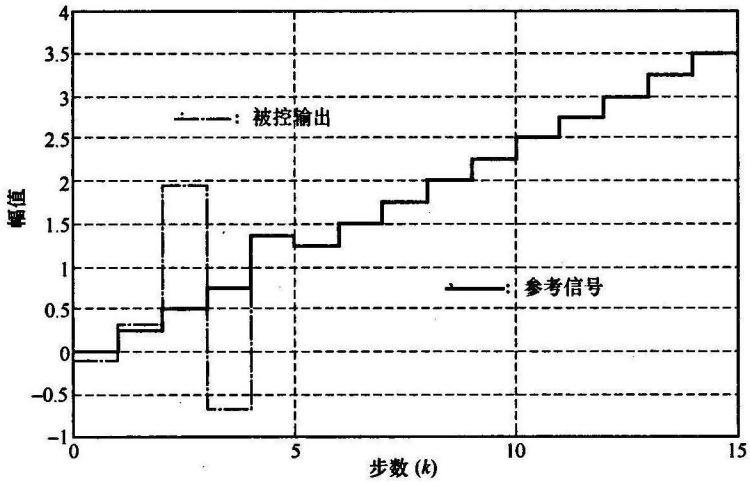
例 14.3 考虑式(14.1)所示的离散时间系统, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad (14.108)$$

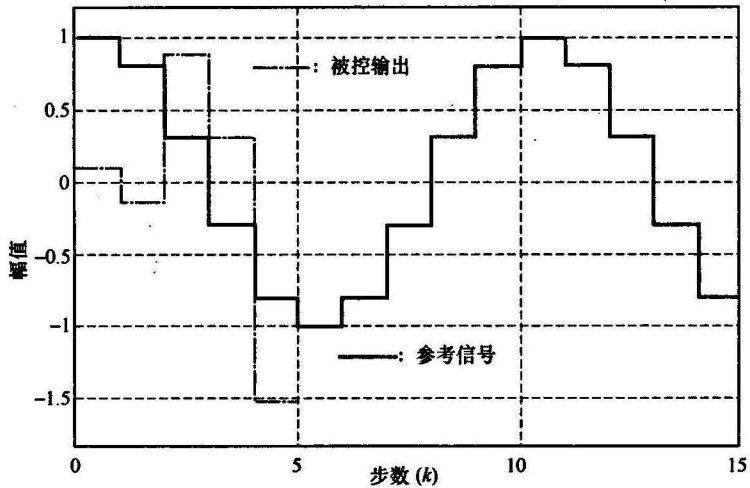
和

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0], \quad C_2 = [1 \ 1 \ 1], \quad D_2 = [0 \ 0] \quad (14.109)$$

令参考输入为



(a) 被控输出 h_1 和参考信号 r_1



(b) 被控输出 h_2 和参考信号 r_2

图 14.2 全阶控制律下的闭环响应

$$r(k) = \frac{k}{4} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) \quad (14.110)$$

注意 Σ_p 是右可逆和最小相位的, 在原点有个不变零点、一个一阶的无限零点, 即 Σ_p 的相对阶是 1。 (A, C_1) 也是完全可观测的, (A^T, C_1^T) 的可控性指数是 $\mathcal{C} = \{3\}$, 即 $k_p = 3$ 。 根据注 14.2, 我们得到下面的全阶测量反馈控制器

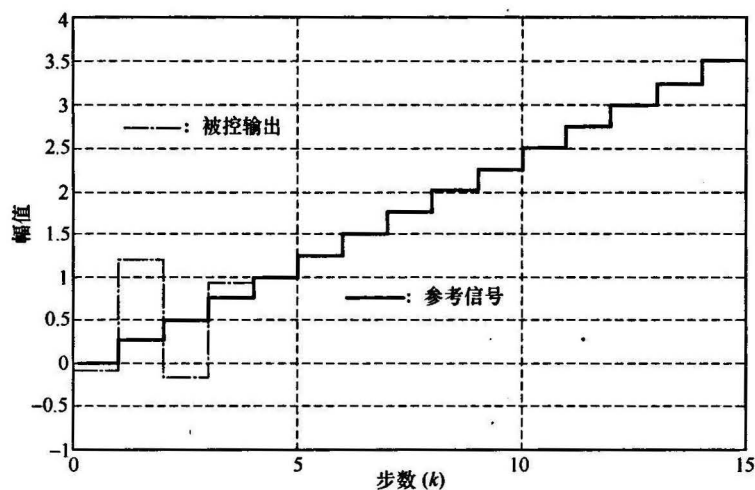
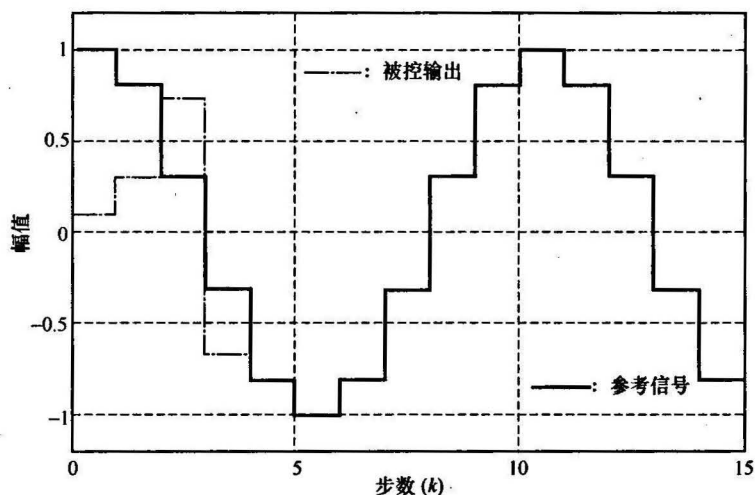
(a) 被控输出 h_1 和参考信号 r_1 (b) 被控输出 h_2 和参考信号 r_2

图 14.3 降阶控制律下的闭环响应

$$\begin{cases} v(k+1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -11.5 & -0.5 & -0.5 \\ -1.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \\ u(k) = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -2 \\ -3.5 & -2.5 & -0.5 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k) \end{cases}$$

(14.111)

和一个降阶的测量反馈控制器

$$\begin{cases} v(k+1) = \begin{bmatrix} -4.5 & -4.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} -18 \\ 2 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \\ u(k) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2.5 & -0.5 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} -16 \\ -13 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(k) \end{cases} \quad (14.112)$$

图 14.4 和图 14.5 的仿真结果清楚地表明全阶和降阶控制律能够实现参考信号的跟踪,如注 14.2 所述,它们分别在 4 步和 3 步以后有一个 1 步的延迟。♣

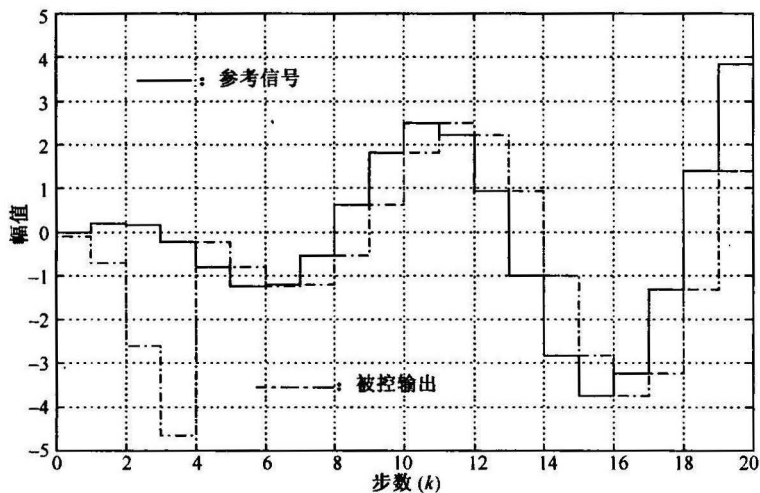


图 14.4 全阶控制律下的 h 响应和参考信号 r

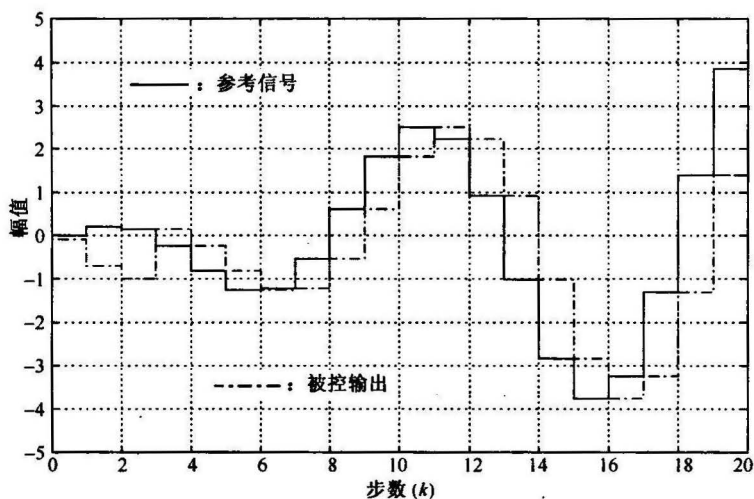


图 14.5 降阶控制律下的 h 响应和参考信号 r

第 15 章 硬盘驱动伺服系统的设计

15.1 导 论

硬盘驱动器(HDD)为计算机和其他数据处理系统提供了重要的数据存储介质。在大部分的硬盘驱动器中,所带的旋转磁盘呈同心圆轨迹并镀有薄磁层或记录媒介(用来存储数据)。硬盘读写数据的任务是一个由声压线圈马达(voice coil motor, VCM)执行器控制的小马蹄形状的电磁读写(R/W)头来完成的。图 15.1 是一个典型的硬盘伺服系统的简单示意图。硬盘驱动器中 R/W 头定位伺服系统的两个主要功能是定轨和轨迹跟踪(如图 15.2 所示)。在定轨过程中,R/W 头利用有界的控制在最小的时间内从一个轨道移动到另一个特定的目标轨道。在轨迹跟踪过程中,R/W 头被尽可能地控制在轨道的中心,以便从磁盘中读出或写入信息。众所周知,轨迹的密度与轨迹的宽度成反比,一般我们要求磁盘面上的轨道尽可能紧密,这样可最大限度地利用磁盘面。这意味着轨道密度要增加,对 R/W 头偏离轨道中心的范围要有更严格的要求。

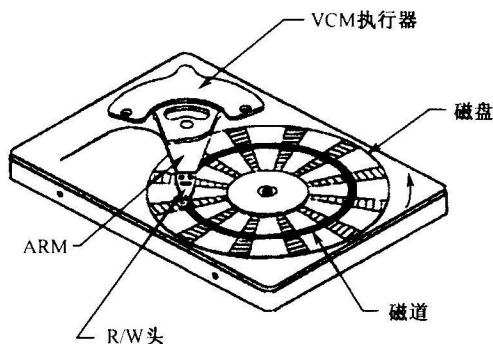


图 15.1 一个具有 VCM 执行器的硬盘伺服系统

当前硬盘设计的趋势是小型化和大容量。因而轨道的宽度变小,需要有极低的 R/W 头定位误差,实行轨道跟踪的控制器在伺服控制中要具备精准的调节能力。目前的硬盘驱动器大多还是使用经典控制技术的组合,如超前/滞后补偿、PI 补偿和陷波滤波器等,这些传统的方法不再能够满足高性能硬盘驱动器的需求。因此,文献中出现了许多对新的控制方法进行尝试的工作,如 LQG 和/或 LTR 方法(见文献[146]和[147])、自适应控制(见文献[148]等)。尽管已经做了大量的工作,但仍然需要更进一步地研究控制方法来使硬盘驱动器达到更高的性能。

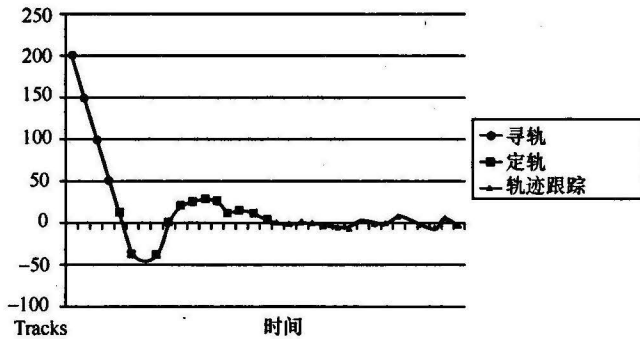


图 15.2 硬盘伺服系统的定轨和轨迹跟踪

本章的目的是要利用第 10 章的鲁棒和完全跟踪(RPT)的控制方法来设计硬盘驱动伺服系统。首先得到 VCM 执行器的数学模型,然后把伺服系统设计转到 RPT 的设计框架,并在此框架之下设计一个一阶动态测量反馈控制器来实现对任何参考输入的鲁棒和完全跟踪。在外部扰动和任何初始条件作用下,所设计的控制器在理论上可使跟踪误差的 L_p 范数任意小, $1 \leq p < \infty$ 。为使 RPT 控制器在现有的硬件条件和物理约束下可实现,如采样速率和控制系统中的限制,一些权衡是必需的。将 RPT 控制器的实际结果和 PID 控制器进行比较,结果表明本章所设计的伺服系统较为简单,有较快的寻轨时间、较低的超调和较高的精度。本章的结果早先发表在文献[149]中。

15.2 VCM 执行器模型

本节给出 VCM 执行器的数学模型,在硬盘驱动伺服研究领域都认为该模型是个双积分器加上一些高频振荡,如果处理不当会导致系统的稳定性受损。在硬盘驱动系统中还存在一些外部干扰,可引起稳态跟踪误差。由于旋转和支撑摩擦的存在,系统在低频部分还存在一些非线性。所有这些都是在设计 VCM 控制器时必须考虑的。为了得到一个实用的模型,我们还必须权衡精确性和简单性。本节要辨识出一个相对简化的 VCM 数学模型。

我们利用频率响应辨识方法(参见文献[150])来建立执行器的数学模型。该方法适用于最小相位系统。从 VCM 执行器的物理特性可判断出它是个最小相位系统。下面是详细的推导过程:首先假设最小相位系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} \quad (15.1)$$

$a_k (k=1, 2, \dots, n)$ 和 $b_k (k=1, 2, \dots, m)$, 其中 $n \geq m$, 都是待辨识的参数。相应的频率响应为

$$G(j\omega) = \frac{\alpha(\omega) + j\omega\beta(\omega)}{\sigma(\omega) + j\omega\tau(\omega)} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (15.2)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha(\omega_i) = b_0 - b_2\omega_i^2 + b_4\omega_i^4 - \dots \\ \beta(\omega_i) = b_1 - b_3\omega_i^2 + b_5\omega_i^4 - \dots \\ \sigma(\omega_i) = 1 - a_2\omega_i^2 + a_4\omega_i^4 - \dots \\ \tau(\omega_i) = a_1 - a_3\omega_i^2 + a_5\omega_i^4 - \dots \end{cases} \quad (15.3)$$

令 $R(\omega)$ 和 $I(\omega)$ 分别为执行器系统测量频率响应的实部和虚部。定义模型和实际测量数据频率的响应误差为

$$E(j\omega) = [R(\omega) + jI(\omega)] - \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (15.4)$$

则通过极小化下面的指标得到系统参数：

$$J = \sum_{i=1}^L |E(j\omega_i)|^2 \quad (15.5)$$

其中 L 是总的测量数据点数。然而这是个非线性的优化问题，相当难以求解。我们可根据文献[150]的结果把误差的范数修改为

$$J = \sum_{i=1}^L |D(j\omega_i)E(j\omega_i)|^2 \quad (15.6)$$

原问题则可转化成一个线性优化问题。利用式(15.2)和式(15.4)，式(15.6)可重新表示为

$$J = \sum_{i=1}^L \{ [X(\omega_i)]^2 + [Y(\omega_i)]^2 \} \quad (15.7)$$

其中

$$X(\omega_i) = \sigma(\omega_i)R(\omega_i) - \omega_i\tau(\omega_i)I(\omega_i) - \alpha(\omega_i) \quad (15.8)$$

和

$$Y(\omega_i) = \omega_i\tau(\omega_i)R(\omega_i) + \sigma(\omega_i)I(\omega_i) - \omega_i\beta(\omega_i) \quad (15.9)$$

因此，极小化 J 就是找到 $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m$ 和 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n$ ，使得

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial J}{\partial b_0} \right|_{b_0=\hat{b}_0} = \sum_{i=1}^L [2X(\omega_i)(-1)] \Big|_{b_0=\hat{b}_0} = 0 \\ \left. \frac{\partial J}{\partial b_1} \right|_{b_1=\hat{b}_1} = \sum_{i=1}^L [2Y(\omega_i)(-\omega_i)] \Big|_{b_1=\hat{b}_1} = 0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial J}{\partial a_1} \right|_{a_1=\hat{a}_1} = \sum_{i=1}^L \{ 2X(\omega_i)[- \omega_i I(\omega_i)] + 2Y(\omega_i)[\omega_i R(\omega_i)] \} \Big|_{a_1=\hat{a}_1} = 0 \\ \left. \frac{\partial J}{\partial a_2} \right|_{a_2=\hat{a}_2} = \sum_{i=1}^L \{ 2X(\omega_i)[- \omega_i^2 R(\omega_i)] - 2Y(\omega_i)[\omega_i^2 I(\omega_i)] \} \Big|_{a_2=\hat{a}_2} = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (15.10)$$

重新整理上面的方程可得

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (15.11)$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} V_0 & 0 & -V_2 & 0 & V_4 & \cdots \\ 0 & V_2 & 0 & -V_4 & 0 & \cdots \\ V_2 & 0 & -V_4 & 0 & V_6 & \cdots \\ 0 & V_4 & 0 & -V_6 & 0 & \cdots \\ V_4 & 0 & -V_6 & 0 & V_8 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (15.12)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & T_5 & \cdots \\ -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \cdots \\ T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & T_7 & \cdots \\ -S_4 & T_5 & S_6 & -T_7 & -S_8 & \cdots \\ T_5 & S_6 & -T_7 & -S_8 & T_9 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (15.13)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & T_5 & \cdots \\ S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \cdots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & T_7 & \cdots \\ S_4 & T_5 & -S_6 & -T_7 & S_8 & \cdots \\ T_5 & -S_6 & -T_7 & S_8 & T_9 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ T_3 \\ S_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (15.14)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} U_2 & 0 & -U_4 & 0 & U_6 & \cdots \\ 0 & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & \cdots \\ U_4 & 0 & -U_6 & 0 & U_8 & \cdots \\ 0 & U_6 & 0 & -U_8 & 0 & \cdots \\ U_6 & 0 & -U_8 & 0 & U_{10} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (15.15)$$

这里

$$V_k = \sum_{i=0}^L \omega_i^k, \quad S_k = \sum_{i=0}^L \omega_i^k R(\omega_i) \quad (15.16)$$

$$T_k = \sum_{i=0}^L \omega_i^k I(\omega_i), \quad U_k = \sum_{i=0}^L \omega_i^k [R^2(\omega_i) + I^2(\omega_i)] \quad (15.17)$$

通过解上面的方程就可以得到期望的传递函数模型中的参数。

理想的 VCM 执行器的动态模型可以以下面的二阶状态空间模型来表示：

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_v \end{bmatrix} u \quad (15.18)$$

其中 u 是执行器输入电压(V); y 和 v 是 R/W 头位置(轨道)和速度; k_y 是位置测量增益; 而 $k_v = k_t/m$, k_t 是电流-力转换系数, m 是 VCM 执行器的质量。这样看来理想的 VCM 模型的传递函数是个双积分器, 即

$$G_{vl}(s) = \frac{k_v k_y}{s^2} \quad (15.19)$$

但是如果考虑高频振动模态, 一个更符合实际的 VCM 执行器模型应为

$$G_v(s) = \frac{k_v k_y}{s^2} \frac{k_d s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (15.20)$$

利用上面的算法和从实际系统中测量到的数据(见图 15.3), 我们得到一个四阶的执行器模型:

$$G_v(s) = \frac{4.3837 \times 10^{10} s + 4.3247 \times 10^{15}}{s^2 (s^2 + 1.5962 \times 10^3 s + 9.7631 \times 10^7)} \quad (15.21)$$

从图 15.3 可见, 在 $0 \sim 10^4$ rad/s 的频率范围内(远超过 VCM 执行器的工作范围), 辨识得到的模型的频率响应和实测数据拟合良好。

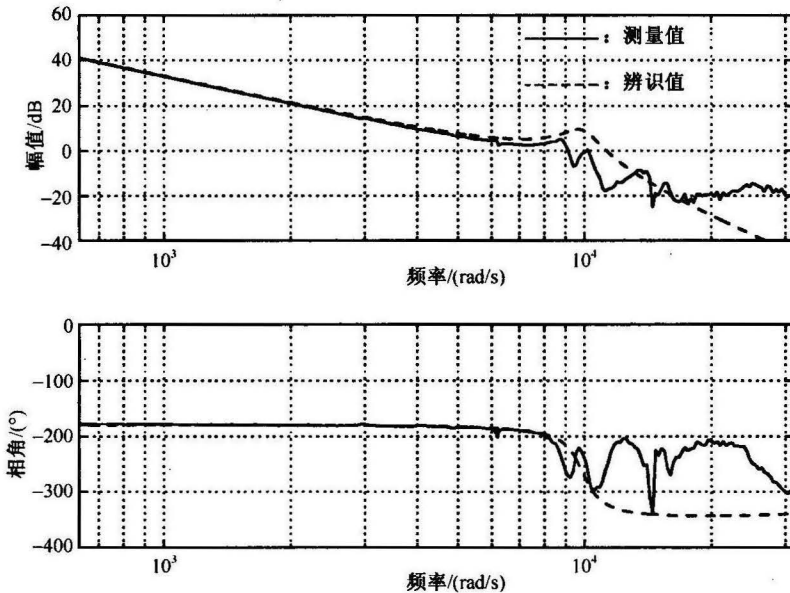


图 15.3 实际的和辨识得到 VCM 模型的频率响应

15.3 伺服系统设计和仿真结果

本节对在前一节中辨识得到的执行器进行伺服系统设计。一般来说,当今的商品化的硬盘驱动伺服系统几乎都利用传统的PID方法。对于单个VCM执行器的驱动,如果设计者希望提高轨道跟踪的速度,常常会遇到问题。阶跃响应通常有很大的超调峰值。所以在实际过程中,人们通常选择合适的PID控制器增益来实现轨道跟踪速度和超调量的权衡。我们把伺服系统设计当成一个鲁棒和完全跟踪(RPT)问题。这样的设计方法能够得到阶次很低的控制律,而且所形成的闭环系统有快的跟踪速度和低超调,以及强鲁棒性。

我们要设计的伺服系统满足下面的性能指标:

- (1) 由于VCM执行器存在实际的物理约束,控制输入不能超过 $\pm 2V$ 。
- (2) 由于R/W头可在目标的 $\pm 5\%$ 范围内进行读写,因此阶跃响应的超调和下调必须小于 5% 。
- (3) 阶跃响应 5% 的响应时间必须小于 $2ms$ (好于PID控制器)。
- (4) 实际控制器的采样频率为 $4kHz$,这是目前大部分商业磁盘驱动器的采样频率。

根据设计PID控制器所得到的经验,我们知道如果只关注跟踪性能,忽略VCM执行器的振动模式是没有问题的。因此在这一阶段只考虑VCM执行器的二阶模型。在考虑总体设计的性能时,再重新处理振动模式。因此在设计中首先利用下面的简化VCM执行器模型:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 44296000 \end{bmatrix} u \quad (15.22)$$

和

$$y = C_1 x = [1 \ 0] x \quad (15.23)$$

接下来定义被控输出为

$$h = y = C_2 x + D_2 u = [1 \ 0] x \quad (15.24)$$

令参考输入 $r(t)$ 是幅值为 α 的阶跃函数,即 $r(t) = \alpha \cdot 1(t)$,其中 $1(t)$ 是单位阶跃函数。则有

$$\dot{r}(t) = \alpha \cdot \delta(t) \quad (15.25)$$

其中 $\delta(t)$ 是单位脉冲函数。根据第10章的结果,我们得到相应的辅助系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 44296000 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ e = [-1 \quad 1 \quad 0]x + 0 \cdot u \end{cases} \quad (15.26)$$

其中

$$x = \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}, \quad w = \alpha \cdot \delta(t), \quad y = \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix}, \quad e = h - r \quad (15.27)$$

不难验证 (A, B, C_2, D_2) 是可逆的,没有不变零点, $\text{Ker}(C_1) = \text{Ker}(C_2)$ 。从第 10 章的结果就可知道鲁棒和完全跟踪(RPT)性能是可达到的,我们可以证明存在一组有调节参数 ϵ 的参数化测量反馈控制律,应用在给定的 VCM 执行器上,有

(1)对充分小的 ϵ ,闭环系统是渐近稳定的;

(2)对任何初始条件 x_0 和任何 $p \in [1, \infty)$,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,跟踪误差 e 的 L_p 范数满足 $\|e\|_p \rightarrow 0$ 。

采用第 10 章的降阶 RPT 控制器的构造性算法,我们得到下面形式的参数化一阶测量反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{v} = A_{RC}(\epsilon)v + B_{RC}(\epsilon) \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} \\ u = C_{RC}(\epsilon)v + D_{RC}(\epsilon) \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \quad (15.28)$$

其中

$$\begin{cases} A_{RC}(\epsilon) = -7800/\epsilon \\ B_{RC}(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} [1.62 \times 10^6 - 4.842 \times 10^7] \\ C_{RC}(\epsilon) = -4.063572 \times 10^{-5}/\epsilon \\ D_{RC}(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} [0.036572 - 0.280386] \end{cases} \quad (15.29)$$

图 15.4 的结果是用 Matlab 得到的。结果清楚地表明当调节参数越来越小时, RPT 问题最终得到解决。但是,由于物理系统存在约束,如控制输入和采样频率的限制,以及振动模态的影响,不可能得到在零时间内可跟踪参考输入的控制律。这些限制的存在使我们不得不在跟踪速度方面作出权衡。经过几次试验,我们发现式(15.29)中的控制器参数在 $\epsilon = 0.9$ 时能给出满意的性能。然后在采样频率为 4kHz 下利用双线性变换对其离散化。注意在第 4 章已经证明双线性变换没有引入额外的非最小相位不变零点,可保持系统的可逆结构。离散化后的控制器为

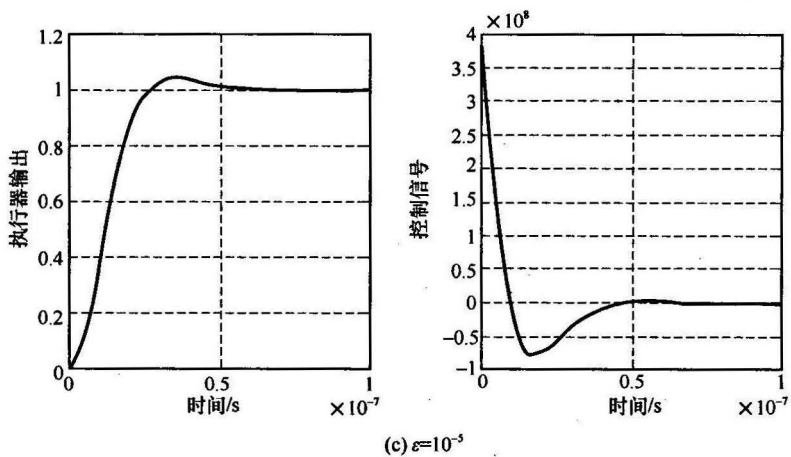
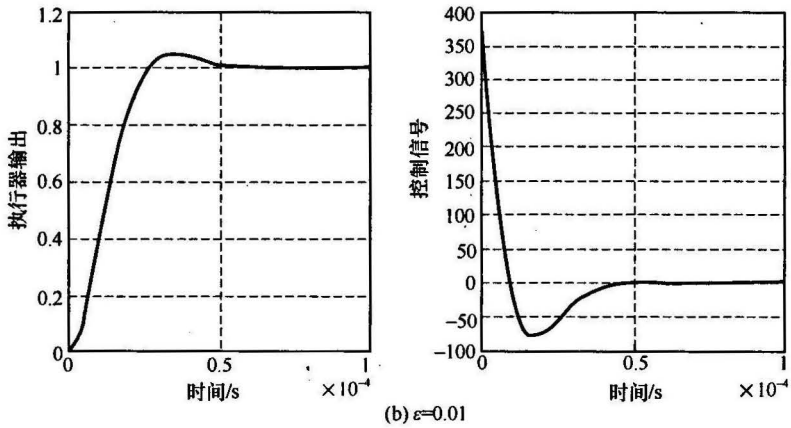
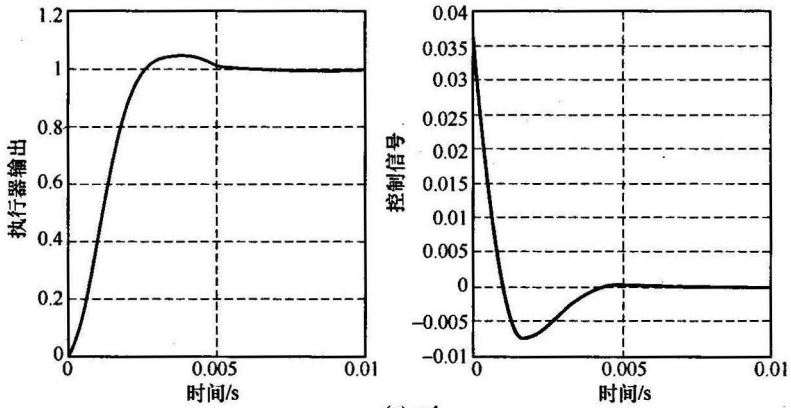


图 15.4 具有 RPT 控制器系统的闭环阶跃响应

$$\begin{cases} x_v(k+1) = -0.04x_v(k) + 15178.933r(k) - 453681.43y(k) \\ u(k) = -3.4267 \times 10^{-7}x_v(k) + 0.03973r(k) - 0.18421y(k) \end{cases}$$

图 15.5 是由 VCM 执行器的四阶模型(我们现在重新考虑 VCM 执行器中的振动模式)和离散化的 RPT 控制器所组成闭环系统的阶跃响应,可满足设计指标。在实际的硬盘驱动器制造过程中,同一批次 VCM 执行器的各自谐振频率 ω_n 是相差很远的,见式(15.21)。硬盘驱动器制造业的一个流行做法是在伺服系统中增加一个陷波滤波器(notch filter),尽可能地削减谐振峰值。令人惊奇的是本章所设计的 RPT 控制器可以应付谐振频率的波动。图 15.6 显示了 RPT 控制器和两个不同谐振频率 VCM 模型的阶跃响应,其中一个为 1.125kHz, $\beta=75\%$ 的标称值,另一个是 2.25kHz, $\beta=150\%$ 的标称值。结果表明 RPT 控制器对于执行器谐振频率的变化具有很强的鲁棒性。

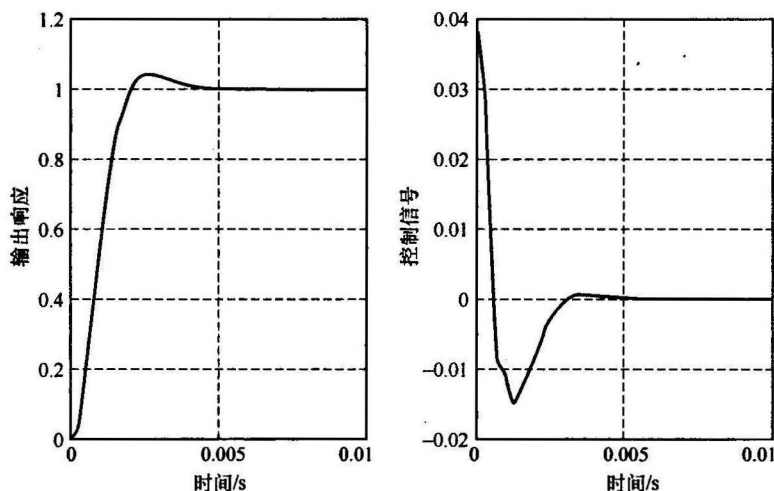


图 15.5 离散化 RPT 控制器的闭环阶跃响应

尽管在设计中没有考虑运行扰动(runout disturbance),但就是这样一个简单的一阶控制器却可以抑制几个运行扰动模式,这是由数据轨道的缺陷和主轴电机的速度所造成的,频率通常是 55Hz 的倍数。我们通过测量输出中注入正弦信号来模拟这些运行扰动,即新的测量输出是执行器输出和运行扰动之和。图 15.7 是由四阶 VCM 执行器模型和离散化 RPT 控制器所组成系统的输出响应,假想的运行扰动为 $\tilde{w}(t) = 0.5 + 0.1\cos(110\pi t) + 0.05\sin(220\pi t)$,参考信号 $r(t)$ 为零。结果表明这样的扰动对系统的总的响应影响很小。下一节会更加全面地测试运行扰动对实际的影响,即位置误差信号(position error signal, PES)测试。

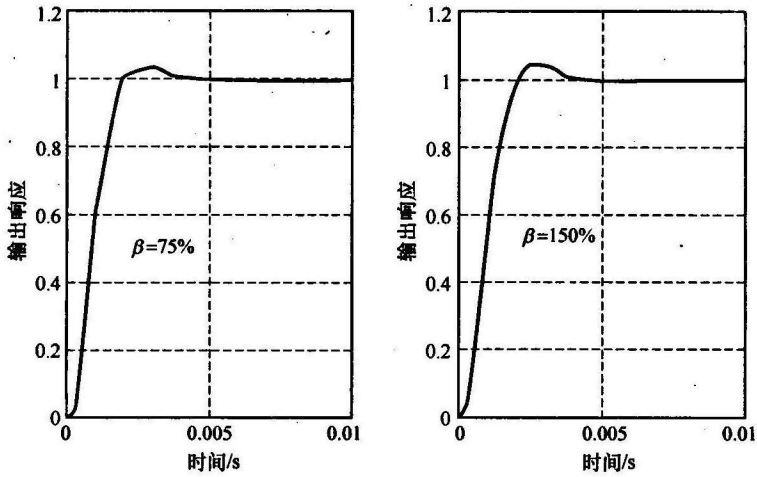


图 15.6 具有不同谐振频率的闭环阶跃响应

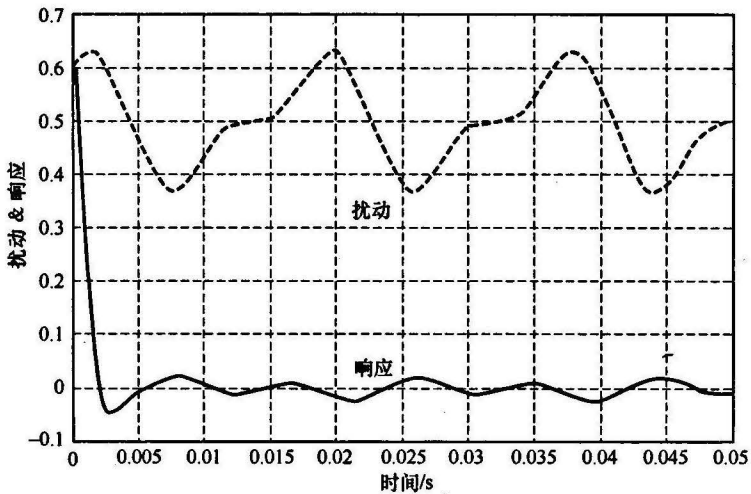


图 15.7 对于运行扰动的闭环输出响应

15.4 实现结果

本节中要把前面的设计付诸实现,并和 PID 控制器的结果进行比较。一个是闭环轨道跟踪测试,另一个是位置误差信号测试(PES),这是硬盘伺服系统设计所要考虑的主要因素。本章所设计的控制器是安装在一个拆开的硬盘驱动器上,采用 TMS320 数字信号处理器(digital signal processor, DSP),采样频率是 4kHz。

利用激光多普勒振动测量仪(laser doppler vibrometer, LDV)来测量 R/W 头的位置,从而进行闭环运行测试。采用的 LDV 分辨率是 $1\mu\text{m}/\text{V}$ 。位移输出信号被输到 DSP 中,然后产生必要的控制信号反馈到 VCM 执行器中。同时,我们用一个数字信号分析仪(digital signal analyzer, DSA)来得到控制系统的频率响应,它也可以产生一组正弦扫描参考信号给硬盘伺服系统,我们可以从 LDV 读出相应的位移量,并可计算出频域的 Bode 图。整个设置如图 15.8 所示。我们同时做了两组实验,一组是 RPT 控制器,另一组是 Goh^[151]研究的 PID 控制器。

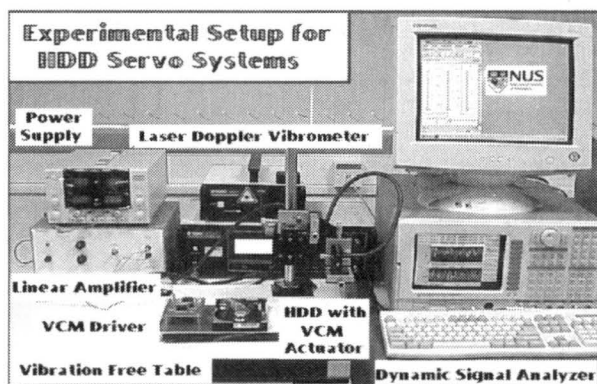


图 15.8 硬盘伺服系统实验设置

1. 轨道跟踪测试

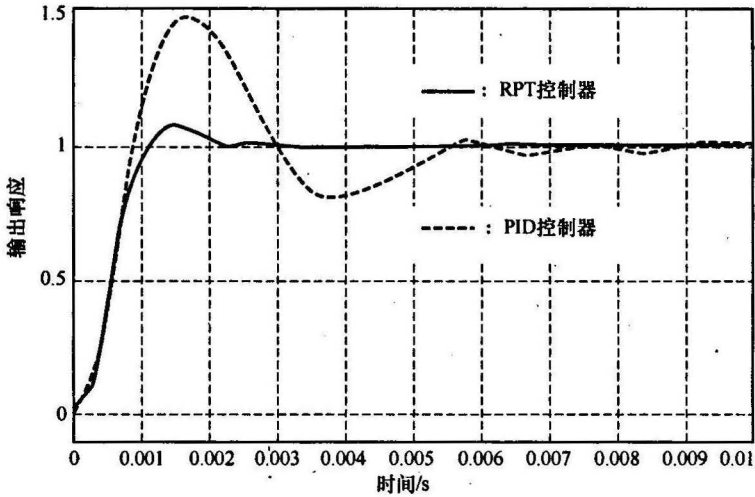
图 15.9 的实线是 RPT 控制器的阶跃响应。作为比较,这个图中还有 Goh^[151]的 PID 控制器的阶跃响应。注意和 15.3 节的仿真结果相比,闭环系统具有 RPT 控制器的实际响应要稍快一些,超调也稍大一些(约 7%)。5% 的响应时间大概是 1.6ms,显然满足设计要求。图 15.10 是闭环实验的 Bode 图。从中可以看出系统大约有 500Hz 的闭环带宽,在衰减频率段没有可分辨的谐振峰值。

图 15.9 的虚线显示了 Goh^[151]的 PID 控制器的阶跃响应(还是采用 4kHz 的采样频率)。PID 控制器具有通常的结构,参数调节有较快的时间响应。控制器为

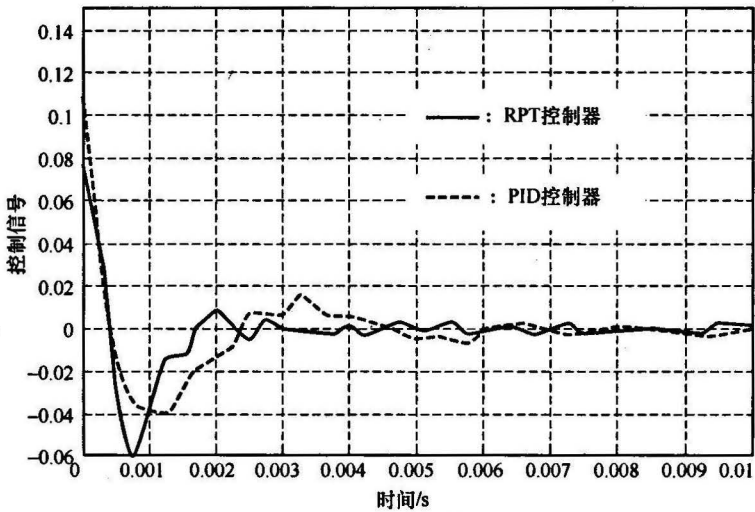
$$u = \frac{0.13z^2 - 0.23z + 0.10}{z^2 - 1.25z + 0.25}(r - y) \quad (15.30)$$

然而这样的控制器会产生高达 50% 的超调,付出这样的代价换来响应时间的改善。为了达到 4~5ms 的响应时间,就只能调节 PID 控制器中的参数以使超调很大。图 15.11 是 PID 控制器的闭环实验 Bode 图。闭环系统的带宽大约也是 500Hz,在率减频率段有 7dB 的小峰值。这个谐振峰值将导致接近带宽频率的跟踪误差。

我们认为 PID 控制器的弱点主要是由结构所造成的,它只用到误差信号



(a) 输出响应



(b) 控制信号

图 15.9 实现结果,RPT 和 PID 控制器的阶跃响应

$y-r$, 没有独立地使用 y 和 r 。我们相信如果只使用信号 $y-r$, 同样的问题会存在于其他的控制方法中。PID 控制器的简单性得到大多数研究人员和工程师的认可。然而本章所设计的 RPT 控制器更为简单, 即 RPT 控制器是一阶的, 而 PID 控制器是二阶的。但是我们利用了所有和实际系统有关的信息。

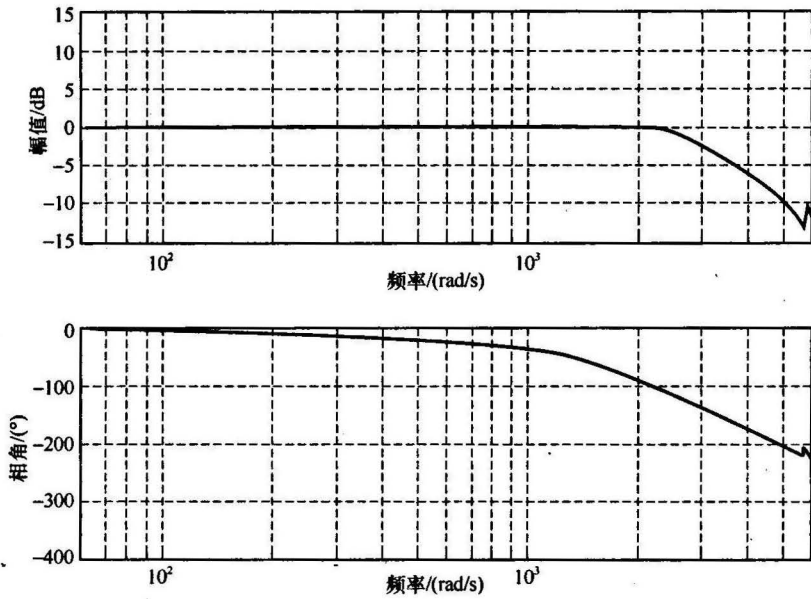


图 15.10 实现结果:闭环频率响应(RPT)

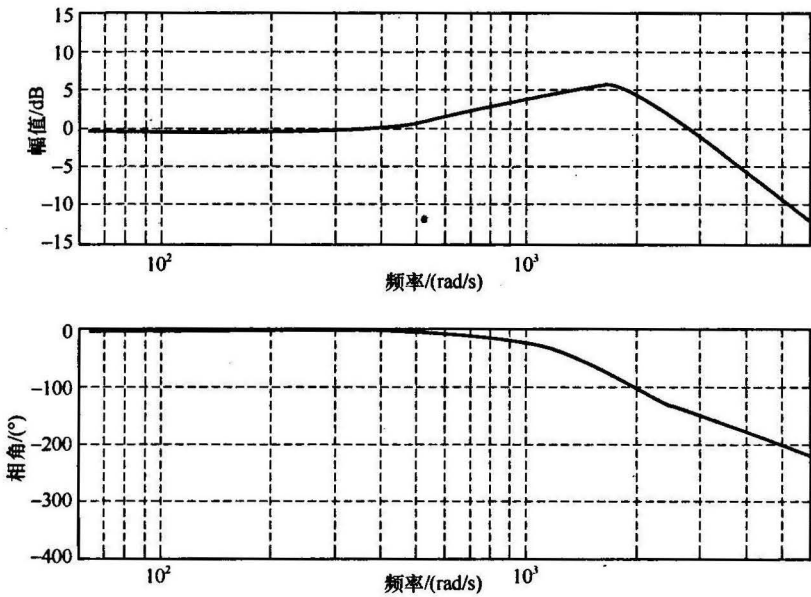


图 15.11 实现结果:闭环频率响应(PID)

我们无法把我们的结果与其他的方法进行比较。在我们所能找到的大部分文献中只有仿真结果。而我们所看到的一些实验结果在本质上完全不同。例如

Hanselmann 和 Engelke^[146]介绍了一个利用 LQG 方法的硬盘驱动器实现,采样频率为 34kHz。在高阶 LQG 控制器和高采样频率下,文献[146]的阶跃响应要差于我们的实现。

2. 位置误差信号测试

实际硬盘中的扰动都往往集中到对象的输出端,也称为运行扰动(runouts)。可重复的运行扰动(repeatable runouts, RRO)和不可重复的运行扰动(non-repeatable runouts, NRRO)是跟踪误差的主要来源。RRO 是由于主轴电机的旋转所造成的,频率是旋转频率的倍数。NRRO 有三个方面的主要来源:振动冲击、机械扰动和电气噪声。由于排线电缆偏位,轴承摩擦和气流所引起的静态力都是振动冲击的组成部分。机械扰动包括主轴电机的变化、磁盘飘动和滑块振动。电气噪声包括量化误差、媒介噪声、伺服解调噪声和功放噪声。和可重复的运行扰动不同, NRRO 从本质上讲是随机和不可预测的。它们的幅值也是比较低的(可参见文献[95])。一个完好的硬盘驱动器应能够抑制 RRO 和 NRRO。

我们在实验中排除了许多扰动源而在某种程度上简化了系统,特别是旋转磁盘。因此实际上是采用人为的方式把运行和其他扰动加入到系统中。在前面实验的基础上,我们知道实际硬盘中的运行噪声主要由 RRO 组成,它基本上是 55Hz 的正弦,等于主轴电机的旋转速率。采用人为的方式把这些“噪声”加到输出上,而保持参考信号为零,我们随后可以读出位置信号,就像运行中出现了位置误差信号(PES)。在硬盘驱动应用中,轨道跟踪过程中 R/W 头距离轨道中心的偏差是非常重要的一个量,可直接从 PES 中读出。轨道跟踪伺服系统必须把 PES 保持在最小值。如果偏差超过了限额,硬盘驱动器会产生太多的读写误差,使得驱动器工作状态不稳定。一个合理的度量值是读取标准差 σ 。一个有用的经验值是使得 3σ 值小于轨道宽度的 5%,对 10~15 kTPI(kilo-tracks per inch, 即每英寸千轨数)的轨道密度来说大约是 $0.1\mu\text{m}$ 。

图 15.12 和图 15.13 分别是鲁棒和完全跟踪控制器和 PID 控制器在运行扰动下的跟踪误差。对 RPT 控制器的 3σ 值约为 $0.095\mu\text{m}$,而 PID 控制器大约是 $0.175\mu\text{m}$ 。又可见在 PES 测试中,RPT 控制器的确要好于 PID 控制器。

总而言之,在轨道跟踪以及 PES 测试方面,RPT 控制器具有比 PID 控制器更好的性能。RPT 控制器只需要一阶。比 PID 控制器低一阶使得 DSP 的编程执行更快。这在需要使用高频率采样来满足设计需求的实现中是很重要的一个因素。如果我们利用更好的 VCM 执行器、具有更高谐振频率的集成臂,就可以进一步改善现在的结果。控制输入的极限还没有达到,从理论上说还可以调节控制器的参数以达到更快的响应时间和更高的伺服带宽。

顺便一提,如果读者对硬盘伺服系统有兴趣的话,可以参考 Chen 等最近的专

著^[152]。该书更系统地研究了有关现代硬盘伺服系统的设计问题,特别是作者在文献[152]中专门介绍了一种新的非线性控制设计方法,即所谓的混合非线性反馈(composite nonlinear feedback, CNF)控制技术,由这种方法设计出来的控制器可以同时用来控制硬盘系统的定轨和轨迹跟踪,也就是把定轨和轨迹跟踪两种不同的控制纳在同一框架之中。

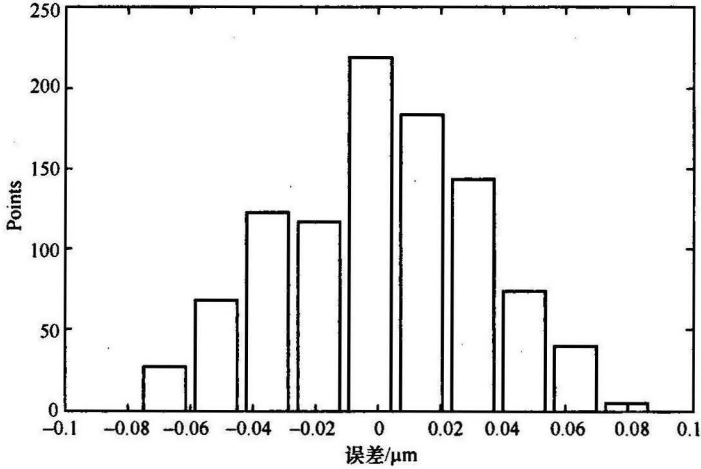


图 15.12 实现结果:PES 测试的柱状图(RPT)

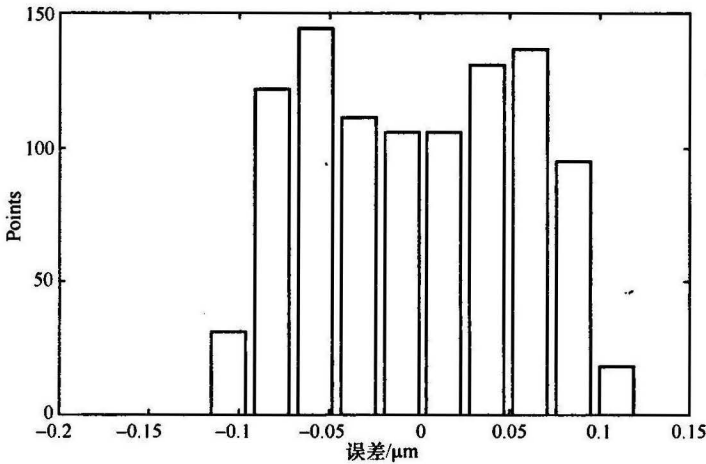


图 15.13 实现结果:PES 测试柱状图(PID)

第 16 章 压电执行器系统的设计

16.1 导 论

本章中研究利用 H_{∞} 优化技术来设计双压电晶片控制系统。这是在 Chen 等^[153]的基础上的工作。压电现象是机电能量转换中的一个基本过程。在压电材料中,机械伸缩产生电极能;当材料发生变形时,可以直接观察到压电效应的充电现象。逆压电效应是当压电材料在电场作用下发生机械伸缩。目前有大量的压电材料可供使用,这些包括 PZT(lead zirconate titanate, 锆钛酸铅)、PLZT(lanthanum modified lead zirconate titanate, 镧改进的锆钛酸铅)、PVDF(piezoelectric polymeric polyvinylidene fluoride)等(见文献[154])。

压电结构广泛应用于需要由电能向机械能转换的场合,特别是那些需要在微小的空间做精确和快速的操作,典型的应用如微型传感器、微型定位器、扬声器、医学诊断器,以及打印锤等。在大部分应用中都采用双压或层堆压电结构,这样会有相对较高的伸缩和输入电场比(见文献[154])。

压电型微执行器在磁记录领域的可能应用推动了目前的工作。磁盘密度的指数级增长意味着数据轨道和数据位要更紧密地排列在磁盘上。21 世纪初出现的 25000TPI(tracks per inch, 即每英寸轨道数)轨道密度意味着读写头(R/W)在寻迹过程中的定位误差只能在 1~2 微英寸范围之内。闭环系统的带宽需要达到 1~2kHz 以保持在高速旋转过程中的精度,这样才能实现超过每秒 200Mbits 的传输速率。这样的要求远超过目前硬盘伺服系统中声压线圈马达(VCM)执行器所能达到的性能(见第 15 章关于具有 VCM 执行器的硬盘伺服系统的更详细描述)。

Hitachi 公司的 Tsuchiura 等^[155]成功地应用了双执行器的硬盘伺服系统。在文献[155]中,研究人员将一个压电结构的精确定位器安装在一个普通的 VCM 执行器的末端,从而形成了一个双执行器的硬盘伺服系统。新系统拥有较高的带宽从而使得 R/W 头能够更精确地定位。文献中还报道利用其他材料,如电磁(见文献[92])和静电(见文献[156])等微执行器,来组成双执行器的伺服系统。

本章的重点是处理带有非线性磁滞(hysteresis)的压电执行器的控制问题,特别是如图 16.1 中所示的双压电执行器的鲁棒控制器设计。Low 和 Guo^[154]已经对一个按比例放大的压电执行器进行了建模和仿真,这是为未来用于磁记录设备的双执行器伺服系统所展开的研究。它具有两个双压臂,承受双极激励。执行器的动态在文献[154]中被辨识为具有磁滞的二阶线性模型和非线性磁滞。其中线

性模型为

$$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_1 = k(du - z) \quad (16.1)$$

其中 m 、 b 、 k 和 d 分别是切向质量、阻尼、刚度和有效压电系数； u 是对执行器系统产生激励的输入电压；变量 x_1 是执行器的位移，也是我们唯一能够从系统中得到的测量。注意该执行器设计的有效位移范围在 $\pm 1\mu\text{m}$ 之间。磁滞的非线性动态为

$$\dot{z} = \alpha\dot{u} - \beta|\dot{u}|z - \gamma\dot{u}|z| \quad (16.2)$$

其中 α 、 β 和 γ 是一些控制磁滞形状的常数。对于本章所考虑的执行器系统，这些系数被辨识为

$$\begin{cases} m = 0.01595\text{kg} \\ b = 1.169\text{Ns/m} \\ k = 4385\text{N/m} \\ d = 8.209 \times 10^{-7}\text{m/V} \\ \alpha = 0.4297 \\ \beta = 0.03438 \\ \gamma = -0.002865 \end{cases} \quad (16.3)$$

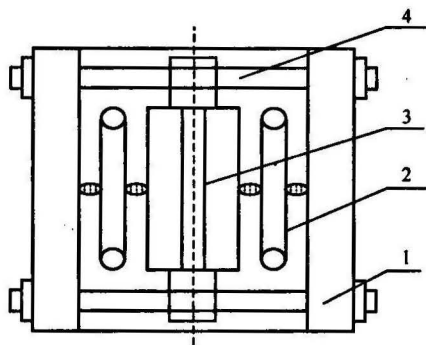


图 16.1 双压电执行器结构

1. 基座；2. 双压电臂；3. 可移动片；4. 导轨

关于这个压电执行器系统和上述参数辨识的详细过程，感兴趣的读者可参考 Low 和 Guo 的工作^[154]。我们在这一章中要设计一个图 16.2 所示的鲁棒控制器，满足下面的指标：

(1) 对任何频率在 $0\sim 30\text{Hz}$ 范围内的参考输入信号，位移的稳态跟踪误差要小于 1%，这是因为硬盘驱动系统中的执行器需要跟踪某些有色噪声类信号。

(2) 达到 1% 的响应时间越快越好（我们最后设计的 1% 响应时间是 0.003s）。

(3) 控制信号 $u(t)$ 不能超过压电材料的 112.5V 电压的限制。

本章方法是：首先利用由 Chang^[157] 所提出的随机等价线性化方法得到非线性

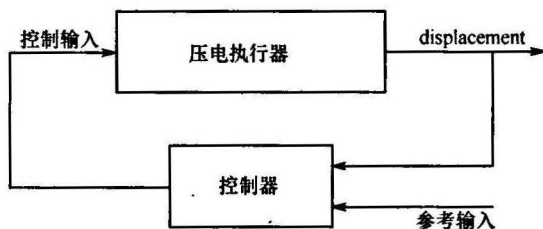


图 16.2 双压电执行器和控制器

磁滞动态的线性化模型。然后把设计问题转化为 H_∞ 几乎干扰解耦问题, 这里的干扰输入是参考输入和磁滞动态与其线性化模型之间的误差, 而被控输出就是跟踪误差的双重积分。所以设计任务就成为对压电执行器设计一个控制器, 使得闭环系统是渐近稳定的, 作为跟踪误差的被控输出尽可能小, 尽可能快地衰减。

本章的大概内容如下: 16.2 节利用随机等价线性化方法得到非线性磁滞动态的线性化模型, 用一个仿真结果来表明非线性和线性化模型之间的匹配情况。16.3 节通过适当地定义扰动输入和被控输出, 把控制器设计问题转化为标准的 H_∞ 几乎干扰解耦问题。用双积分器对原系统进行增广, 使得系统的总体性能得到提高。然后利用所谓的渐近时间尺度和特征结构配置技术得到一个具有调节参数的参数化鲁棒控制器, 从而解决了几乎干扰解耦问题。16.4 节给出最后的控制器和利用 Matlab 的 Simulink 对系统进行全面仿真的结果。我们还给出了控制信号的峰值和控制器调节参数之间的显式关系, 以及最大可跟踪频率和控制器调节参数之间的线性关系, 即相应的最大跟踪误差能保持在 1% 以内。这一节的仿真结果清楚地表明所有设计要求都已达到, 总体性能令人满意。

16.2 非线性磁滞动态的线性化

这一节要进行式(16.2)所示的非线性磁滞动态的线性化。正如 Chang^[157]所指出的那样, 文献中有三种基本的方法来线性化磁滞型的非线性动态。它们是 Fokker-Planck 方程法(可见文献[158])、摄动法(可见文献[159]和[160])和随机线性化方法, 所有方法各有利弊。然而相比较而言, 随机线性化方法的应用更为广泛一些。该方法的出发点是把非线性系统用一个“等价”的线性系统来代替, 使得这两个系统之间的“差”在某种意义上最小。该技术是由 Booton^[161]发明的。本章中, 对于式(16.2)所示的磁滞动态, 我们采用的是 Chang^[157]的随机线性化方法得到下面形式的线性模型:

$$\dot{z} = k_1 \dot{u} + k_2 z \quad (16.4)$$

其中 k_1 和 k_2 是待确定的线性化系数。整个过程还是很明了的, 具体的操作是: 首

先引入由式(16.2)给出的 \dot{z} 和式(16.4)给出的 \dot{z} 所确定的“误差”函数 e , 即

$$e(k_1, k_2) = \alpha \dot{u} - \beta |\dot{u}| z - \gamma \dot{u} |z| - (k_1 \dot{u} + k_2 z) \quad (16.5)$$

然后极小化 $E[e^2]$, 其中 E 是关于 k_1 和 k_2 的期望算子, 这样可得

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial k_1} = \frac{\partial E[e^2]}{\partial k_2} = 0 \quad (16.6)$$

随机线性化系数 k_1 和 k_2 可由此确定。如果 z 和 \dot{u} 是零均值的高斯过程, k_1 和 k_2 的值很容易确定。我们假设 z 和 \dot{u} 有一个联合概率密度函数

$$f_{uz}(\dot{u}, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_z\sqrt{1-\rho_{uz}^2}} \exp\left\{-\frac{\sigma_u^2 z^2 - 2\sigma_u\sigma_z\rho_{uz}\dot{u}z + \sigma_z^2 \dot{u}^2}{2\sigma_u^2\sigma_z^2(1-\rho_{uz}^2)}\right\} \quad (16.7)$$

其中 ρ_{uz} 是归一化的 \dot{u} 和 z 之间的协方差, σ_u 和 σ_z 分别是 \dot{u} 和 z 的标准差。则系数 k_1 和 k_2 的线性化表示为

$$k_1 = \alpha d - \beta c_1 - \gamma c_2 \quad (16.8)$$

$$k_2 = -\beta c_3 - \gamma c_4 \quad (16.9)$$

其中 c_1, c_2, c_3 和 c_4 可表示为

$$c_1 = 0.79788456\sigma_z \cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\rho_{uz}^2}}{\rho_{uz}}\right)\right] \quad (16.10)$$

$$c_2 = 0.79788456\sigma_z, \quad c_4 = 0.79788456\rho_{uz}\sigma_u \quad (16.11)$$

和

$$c_3 = 0.79788456\sigma_u \left\{1 - \rho_{uz}^2 + \rho_{uz} \cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\rho_{uz}^2}}{\rho_{uz}}\right)\right]\right\} \quad (16.12)$$

经过几步迭代, 我们发现频率范围为 $0 \sim 100\text{Hz}$ (期望的工作频率范围), 峰值为 50V , 标准差为 $\sigma_u = 35$ 的正弦激励 \dot{u} 可对非线性磁滞(16.2)产生一个合适的线性化模型。对于这样的激励可得 $\sigma_z = 5 \times 10^{-7}$, $\rho_{uz} = 5 \times 10^{-3}$, 及

$$c_1 = 1.9947 \times 10^{-9}, \quad c_2 = 3.9894 \times 10^{-7} \quad (16.13)$$

$$c_3 = 27.9260, \quad c_4 = 0.1396 \quad (16.14)$$

和

$$k_1 = 3.5382 \times 10^{-7}, \quad k_2 = -0.9597 \quad (16.15)$$

那么, 式(16.2)所示的非线性磁滞动态的随机线性化模型可表示为

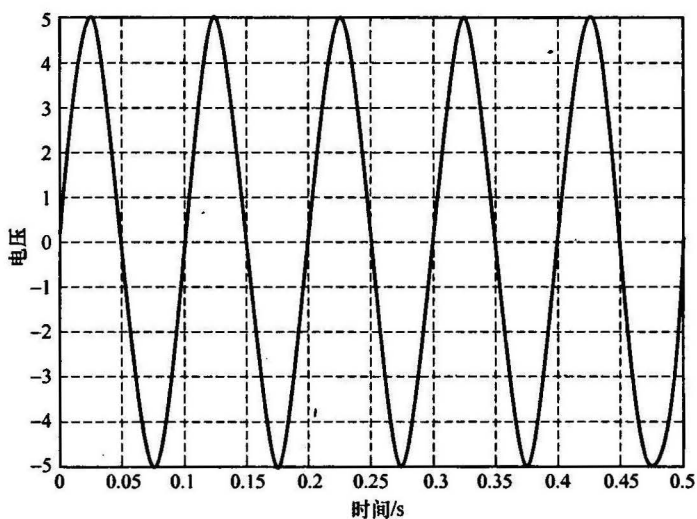
$$\dot{\hat{z}} = k_1 \dot{u} + k_2 \hat{z} = 3.5382 \times 10^{-7} \dot{u} - 0.9597 \hat{z} \quad (16.16)$$

为了后面的使用, 定义线性化误差为

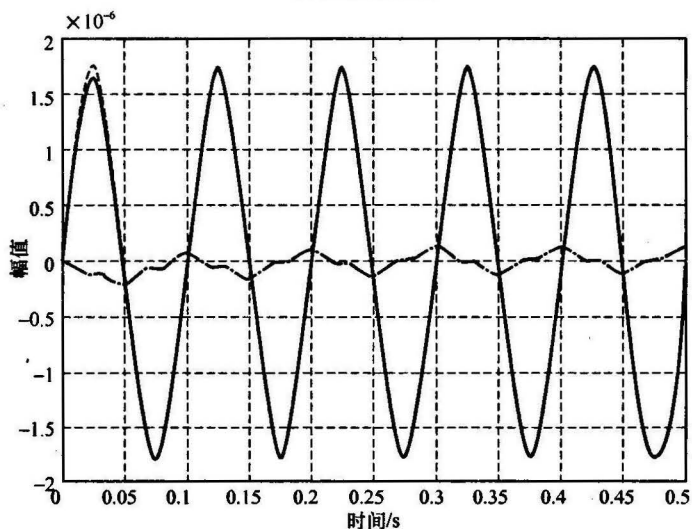
$$e_z = z - \hat{z} \quad (16.17)$$

图 16.3 是非线性磁滞和其线性化模型, 以及在一个典型的正弦输入信号 u 下的误差信号的开环仿真结果。结果是很令人满意的。这里要指出的是由于下节所进行的控制器设计方法自身的原因, 尽管线性化模型会在一个范围内波动, 产生了较大的线性化误差 e_z , 但是闭环系统的性能将不会受到影响。我们把 e_z 当做扰动输

入, 控制器可自动地从输出响应中进行抑制。



(a) 控制输入信号 u



(b) z (实线)、 \hat{z} (虚线) 和 e_2 (点划线)

图 16.3 磁滞和线性化模型对正弦输入的响应

16.3 几乎干扰解耦问题

这一节是本章的核心。首先把双极压电执行器的控制系统设计问题转化为标准的 H_∞ 几乎干扰解耦问题, 然后利用第 9 章的结果来检验问题的可解性。最后

找到可解几乎干扰问题的内稳定的控制器。当然,最重要的是闭环系统和它的响应必须满足 16.1 节中所列的各项指标。为此要把式(16.1)所示的动态模型和线性化的磁滞模型转变到状态空间形式。首先定义一个新的状态变量

$$v = \hat{z} - k_1 u \tag{16.18}$$

然后根据式(16.16)可得

$$\dot{v} = \dot{\hat{z}} - k_1 \dot{u} = k_2 \hat{z} = k_2 v + k_1 k_2 u \tag{16.19}$$

把式(16.17)和式(16.18)代入式(16.1),可得

$$\ddot{x}_1 + \frac{b}{m} \dot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 + \frac{k}{m} v = \frac{k(d-k_1)}{m} u - \frac{k}{m} e_z \tag{16.20}$$

图 16.4 是本章所采用的控制器的框图结构。在这个图中,在位移 x_1 和参考输入信号 r 之间的误差 e 之后增广了两个积分器。我们可以从这个问题中观察到一个很有趣的性质,在跟踪误差 e 之后增广的积分器越多,在同样的控制输入 u 之下可得到越小的跟踪误差。因为控制信号的范围是 $-112.5 \sim 112.5$,结果显示我们需要两个积分器来满足所有的设计要求。显见增广后的系统是 5 阶的。接下来定义增广系统的状态为

$$x = (x_1 \quad \dot{x}_1 \quad v \quad x_4 \quad x_5)^T \tag{16.21}$$

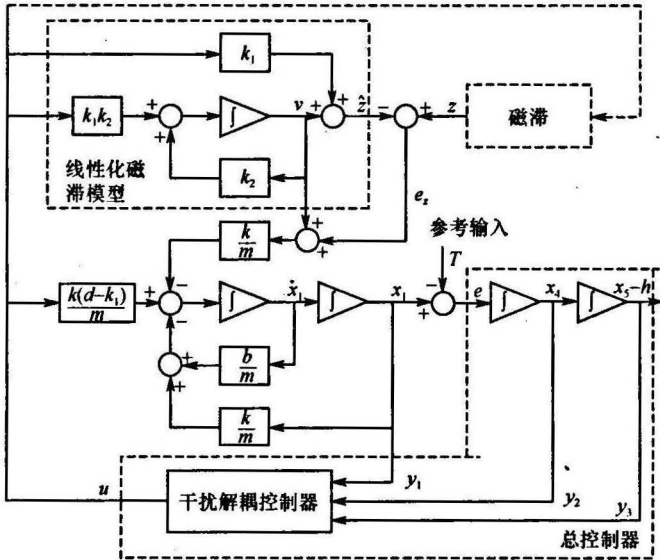


图 16.4 增广的线性化模型和控制器

测量输出为

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (16.22)$$

即原位移 x_1 的测量值加上两个增广的状态。辅助扰动输入为

$$w = \begin{bmatrix} e_z \\ r \end{bmatrix} \quad (16.23)$$

而被控输出 h 就是跟踪误差的双积分。总的增广系统的状态空间模型为

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1x + D_1w \\ h = C_2x + D_2u \end{cases} \quad (16.24)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k/m & -b/m & -k/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -274921.63 & -73.2915 & -274921.63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9597 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.25)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ k(d-k_1)/m \\ k_1k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.12841 \\ -3.39561 \times 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.26)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k/m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -274921.63 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.27)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.28)$$

和

$$C_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad D_2 = 0 \quad (16.29)$$

利用文献[74]的软件工具箱,我们不难验证式(16.24)所示的系统 Σ 具有下面的性质:

(1) 子系统 (A, B, C_2, D_2) 是可逆和最小相位的,在 -1.6867 处有一个不变零点。同时有一个 4 阶的无限零点。

(2) 子系统 (A, E, C_1, D_1) 是左可逆和最小相位的,在 -0.9597 处有一个不变零点,并分别有两个 1 阶和 2 阶的无限零点。

现在根据定理 9.1 可知系统(16.24)的 H_∞ -ADDPMS 是可解的。实际上我们既可以设计全阶观测器型控制器,也可以设计降阶观测器型控制器来解这个问题。对于全阶观测器型控制器,干扰解耦控制器(见图 16.4)的阶次为 5,而最后总控制器(也见图 16.4)的阶次是 7(干扰解耦控制器加两个积分器)。另一方面,如果在干扰解耦控制器中应用降阶观测器,则最终的控制器的总阶次为 4。从实用的观点来看,后者要优于前者。所以在后面只关注降阶观测器型控制器的设计。我们分两步来进行控制器的设计:

(1) 第一步中假设式(16.24)所示的系统 Σ 的所有 5 个状态都可得到,然后设计一个静态的参数化状态反馈控制律

$$u = F(\epsilon)x \quad (16.30)$$

通过对调节参数 ϵ 进行适当的调整,在 $y=x$ 的状态反馈下可解几乎干扰问题。

(2) 第二步设计一个降阶观测器型控制器。它有一个参数化的降阶观测器增益矩阵 $K_2(\epsilon)$,调节参数就可以实现第一步中状态反馈所达到的性能指标。

本章利用第 9 章的渐近时间尺度和特征结构配置(ATEA)设计方法来构造状态反馈律和降阶观测器增益。从原理上说可以应用基于 ARE(代数 Riccati 方程)的 H_∞ 优化技术(可参考文献[26])来解决该问题。但是由于系统 Σ 的数值条件是相当病态的,由 ARE 方法无法得到令人满意的解,也无法在 Matlab 中得到有意义的 H_∞ -CARE 解。在这样的情况下,至少对这个问题,ATEA 方法要比 ARE 方法更加有效。ATEA 的算法实现可利用 Chen^[88] 或 Lin 等^[74] 的线性系统工具箱得到。下面就是利用 ATEA 得到的参数化静态状态反馈增益矩阵:

$$F(\epsilon) = \begin{bmatrix} 2.1410 \times 10^6 - 62.3004/\epsilon^2 & 570.7619 - 31.1502/\epsilon \\ 2.1410 \times 10^6 & -62.3004/\epsilon^3 - 31.1502/\epsilon^4 \end{bmatrix} \quad (16.31)$$

其中 ϵ 是调节参数,可用来实现干扰解耦。可验证对所有的 $0 < \epsilon < \infty$,闭环系统增益矩阵 $A + BF(\epsilon)$ 是渐近稳定的,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递函数 $T_{hw}(\epsilon, s)$ 满足

$$\|T_{hw}(\epsilon, s)\|_\infty = \|[C_2 + D_2 F(\epsilon)][sI - A - BF(\epsilon)]^{-1} E\|_\infty \rightarrow 0 \quad (16.32)$$

下一步是要设计一个降阶观测器型控制器来恢复以上状态反馈控制律的性能。首先对式(16.24)所示的系统 Σ 进行下面的非奇异(排列置换)状态变换:

$$x = T\tilde{x} \tag{16.33}$$

其中

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16.34}$$

使得变换后的测量矩阵为

$$C_1 T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [I_3 \quad 0] \tag{16.35}$$

显然,变换后系统的前三个状态,或式(16.24)所示的原系统 Σ 的 x_1, x_4 或 x_5 , 可以从测量输出中获得,所以并不需要估计。现在把变换后的系统划分为

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -274921.63 & 0 & 0 & -73.2915 & -274921.63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9597 \end{bmatrix} \tag{16.36}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0.12841 \\ -3.39561 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \tag{16.37}$$

$$T^{-1}E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \hline -274921.63 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16.38}$$

同时进行划分

$$\begin{aligned} F(\epsilon)T &= [F_1(\epsilon) \quad F_2(\epsilon)] \\ &= [2.1410 \times 10^6 - 62.3004/\epsilon^2 \quad -62.3004/\epsilon^3 \quad -31.1502/\epsilon^4 \quad | \\ &\quad 570.7619 - 31.1502/\epsilon \quad 2.1410 \times 10^6] \end{aligned} \tag{16.39}$$

则降阶观测器型控制器(见第 9 章)为

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}(\epsilon)v + B_{\text{cmp}}(\epsilon)y \\ u = C_{\text{cmp}}(\epsilon)v + D_{\text{cmp}}(\epsilon)y \end{cases} \quad (16.40)$$

其中

$$A_{\text{cmp}}(\epsilon) = A_{22} + K_2(\epsilon)A_{12} + B_2F_2(\epsilon) + K_2(\epsilon)B_1F_2(\epsilon) \quad (16.41)$$

$$B_{\text{cmp}}(\epsilon) = A_{21} + K_2(\epsilon)A_{11} - [A_{22} + K_2(\epsilon)A_{12}]K_2(\epsilon) \\ + [B_2 + K_2(\epsilon)B_1][F_1(\epsilon) - F_2(\epsilon)K_2(\epsilon)] \quad (16.42)$$

$$C_{\text{cmp}}(\epsilon) = F_2(\epsilon) \quad (16.43)$$

$$D_{\text{cmp}}(\epsilon) = F_1(\epsilon) - F_2(\epsilon)K_2(\epsilon) \quad (16.44)$$

这里 $K_2(\epsilon)$ 是参数化的降阶观测器增益矩阵, 对充分小的 ϵ 要保证 $A_{22} + K_2(\epsilon)A_{12}$ 是渐近稳定的, 同时当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\| [sI - A_{22} - K_2(\epsilon)A_{12}]^{-1} [E_2 + K_2(\epsilon)E_1] \|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (16.45)$$

还是利用 Chen^[88] 或 Lin 等^[74] 的软件, 我们得到下面的参数化降阶增益矩阵:

$$K_2(\epsilon) = \begin{bmatrix} 73.2915 - 1/\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.46)$$

然后可以得到降阶观测器型控制器的状态空间模型中的参数化矩阵

$$A_{\text{cmp}}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 73.2915 - 5/\epsilon & 0 \\ -1.9381 \times 10^{-4} + 1.0577 \times 10^{-5}/\epsilon & -1.6867 \end{bmatrix}$$

$$C_{\text{cmp}}(\epsilon) = [570.7619 - 31.1502/\epsilon \quad 2140967]$$

$$D_{\text{cmp}}(\epsilon) = [2099135.4 + 2853.81/\epsilon - 93.45/\epsilon^2 \quad -62.3/\epsilon^3 \quad -31.1502/\epsilon^4]$$

$$B_{\text{cmp}}(\epsilon) = \begin{bmatrix} \psi_1 & -8/\epsilon^3 & -4/\epsilon^4 \\ \psi_2 & 2.1155 \times 10^{-5}/\epsilon^3 & 1.0577 \times 10^{-5}/\epsilon^4 \end{bmatrix}$$

其中

$$\psi_1 = -5731.6533 - 13/\epsilon^2 + 439.7492/\epsilon \quad (16.47)$$

和

$$\psi_2 = -0.7128 + 3.1732 \times 10^{-5}/\epsilon^2 - 9.6904 \times 10^{-4}/\epsilon \quad (16.48)$$

只要 $\epsilon \in (0, \infty)$, 由式(16.24)所示的系统 Σ 和上面的控制器所形成的闭环系统是渐近稳定的。实际上, 闭环极点就在 -1.6867 , 有两对在 $-1/\epsilon \pm j1/\epsilon$ 、 -0.9597 和 $-1/\epsilon$ 。图 16.5 是 $\epsilon=1/100$ 、 $\epsilon=1/400$ 和 $\epsilon=1/3000$ 几个值时, 从扰动 w 到被控输出 h 的闭环传递函数矩阵 $T_{hw}(\epsilon, s)$ 的最大奇异值图, 结果表明当 ϵ 越来越小时, $T_{hw}(\epsilon, s)$ 的 H_{∞} 范数也越来越小。因此几乎干扰问题的确得到解决。这是系统在频域中的性质。下一节中讨论时间域性质, 它的重要性等同于所有时间域设计指标。

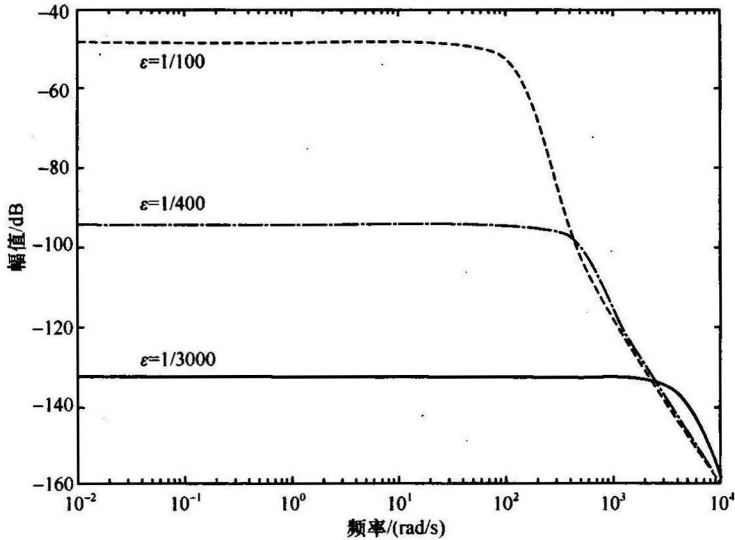


图 16.5 闭环传递函数 $T_{mv}(\epsilon, s)$ 的最大奇异值

16.4 最终控制器和仿真结果

正如图 16.2 所绘出的一样,本节中要用前一节设计来实现最终的控制器。观察总控制器和式(16.40)所示的干扰解耦控制器 Σ_{comp} 的相互连接(见图 16.4)就不难得到状态空间模型。我们也将给出在几种不同类型的参考输入信号下系统在设计完成后的仿真结果。正如所料,所有的设计指标都能够满足。而且,由于本章所设计的控制器是有调节参数的,很容易进行调节来满足其他设计要求,无需从头开始设计。下面就会讨论这一点。

正如前面所提,设计好的控制器是 4 阶的,两个来自干扰解耦控制器,两个来自增广的积分器。它具有两个输入:一个是位移 x_1 ,另一个是参考信号 r 。不难验证总控制器的状态空间模型为

$$\Sigma_{\text{oc}}(\epsilon) : \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{oc}}(\epsilon)v + B_{\text{oc}}(\epsilon)x_1 + G_{\text{oc}}(\epsilon)r \\ u = C_{\text{oc}}(\epsilon)v + D_{\text{oc}}(\epsilon)x_1 \end{cases} \quad (16.49)$$

其中

$$A_{\text{oc}}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 73.2915 - 5/\epsilon & 0 & -8/\epsilon^3 & -4/\epsilon^4 \\ -0.0002 + 1.0577 \times 10^{-5}/\epsilon & -1.6867 & 2.1155 \times 10^{-5}/\epsilon^3 & 1.0577 \times 10^{-5}/\epsilon^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{oc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{oc}(\epsilon) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.50)$$

这里, ψ_1 和 ψ_2 分别由式(16.47)和式(16.48)给出, 另外

$$C_{oc}(\epsilon) = [570.7619 - 31.1502/\epsilon \quad 2140967 \quad -62.3004/\epsilon^3 \quad -31.1502/\epsilon^4] \quad (16.51)$$

和

$$D_{oc}(\epsilon) = 2099135.4 - 93.4506/\epsilon^2 + 2853.8509/\epsilon \quad (16.52)$$

以上参数化的控制器具有一些非常有趣和有用的性质。经过对总体设计的连续仿真, 我们发现控制信号 u 的最大峰值和参考信号的频率无关, 而只依赖于位移 x_1 和参考 r 的初始误差。初始误差越大, u 的峰值也越大。因为执行器的工作范围是 $\pm 1\mu\text{m}$, 那么需要假设在任何情况下, 初始误差的最大值不能大于 $1\mu\text{m}$ 。因为在系统开始跟踪任何参考信号之前, 我们总可以把位移 x_1 置为零使得初始跟踪误差不会大于 $1\mu\text{m}$, 因此这样的假设是合理的。下面考虑最坏的情况, 即初始跟踪误差达到 $1\mu\text{m}$ 。非常有趣的是我们可以得到调节参数 $1/\epsilon$ 和 u 的最大峰值之间的关系。结果在图 16.6 中。我们也发现跟踪误差和初始误差无关, 只依赖参考信号的频率, 参考信号 r 的频率越高, 跟踪误差则越大。同时也能够得到调节参数 ϵ 和参考信号频率之间的简单线性关系, 在这一关系下相应的跟踪误差不超过 1%, 这是我们的设计指标之一, 结果在图 16.7 中。

从图 16.6 中可清楚地看出由于控制输入存在约束, 即在 $\pm 112.5\text{V}$ 之内, 我们必须选择 $\epsilon > 1/3370$ 的控制器。从图 16.7 知道为满足第一个设计指标, 即对 30Hz 频率以下的参考输入, 稳态跟踪误差必须小于 1%, 我们必须选择 $\epsilon < 1/2680$ 的控制器。因此对所有的 $\epsilon \in (1/3370, 1/2680)$, 由式(16.49)~式(16.52)所示的控制器可使式(16.1)和式(16.2)的压电执行器系统都能满足所有的设计目标。我们选定 $\epsilon = 1/3000$, 则式(16.49)的控制器为

$$A_{oc} = \begin{bmatrix} -14926.7085 & 0 & -2.16 \times 10^{11} & -3.24 \times 10^{14} \\ 0.0315 & -1.6867 & 5.7118 \times 10^5 & 8.5677 \times 10^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.53)$$

$$B_{oc} = \begin{bmatrix} -1.1569 \times 10^8 \\ 281.9699 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_{oc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.54)$$

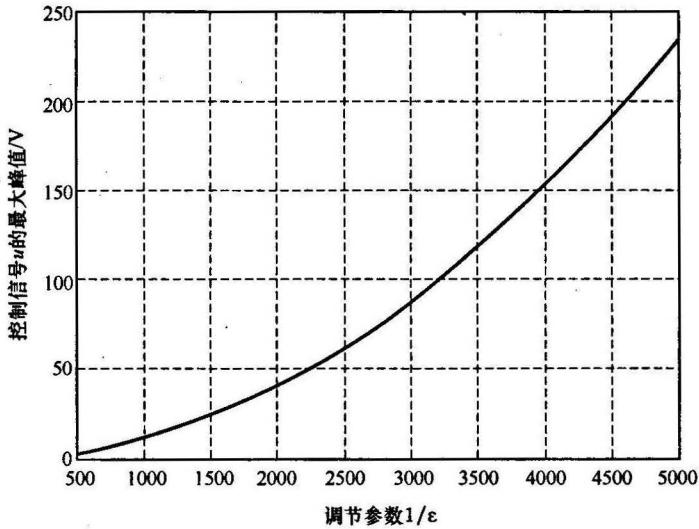


图 16.6 最坏的初始误差下的 $1/\epsilon$ 和 u 的最大峰值之间的关系

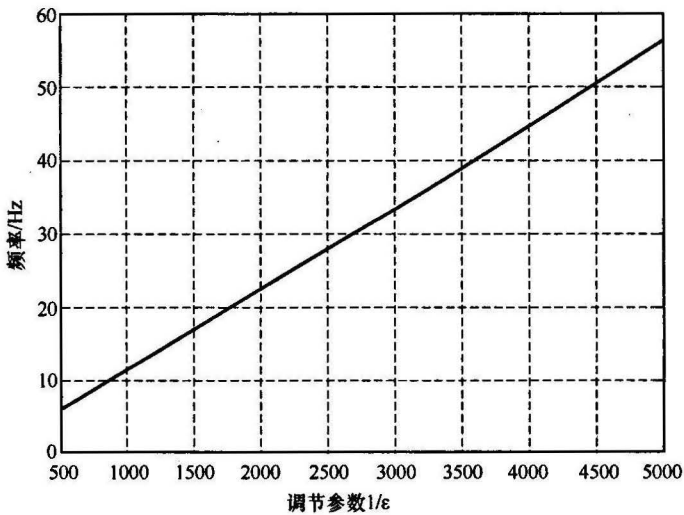


图 16.7 具有 1% 跟踪误差的参数 $1/\epsilon$ 和 r 的最大频率之间的关系。

$$C_{oc} = [-92879.9041 \quad 2140967 \quad -1.6821 \times 10^{12} \quad -2.5232 \times 10^{15}] \quad (16.55)$$

和

$$D_{oc} = -8.3040 \times 10^8 \quad (16.56)$$

以下的仿真结果是利用 Matlab 中的 Simulink 得到。利用 Simulink 中的 Runge-Kutta 5 方法对两种不同的参考输入进行仿真,最小步长是 10ms,最大步长

是 100ms,精度是 10^{-5} 。参考信号是:①频率为 30Hz,峰值为 $1\mu\text{m}$ 的余弦信号;②频率为 34Hz,峰值为 $1\mu\text{m}$ 的正弦信号。对余弦信号的结果在图 16.8~图 16.10 中。在图 16.8 中,实线代表 x_1 ,虚线代表参考信号。对于该参考信号的跟踪误差和控制信号分别如图 16.9 和图 16.10 所示。类似的,图 16.11~图 16.13 是正弦信号的结果。所有这些结果都表明设计目标已经实现。具体情况是 30Hz 余弦信号的跟踪误差约为 0.8%,比设计指标要好,控制信号的极端峰值小于 90V,也小于极限值 112.5V。两种情况下的 1%跟踪误差响应时间小于 0.003s。

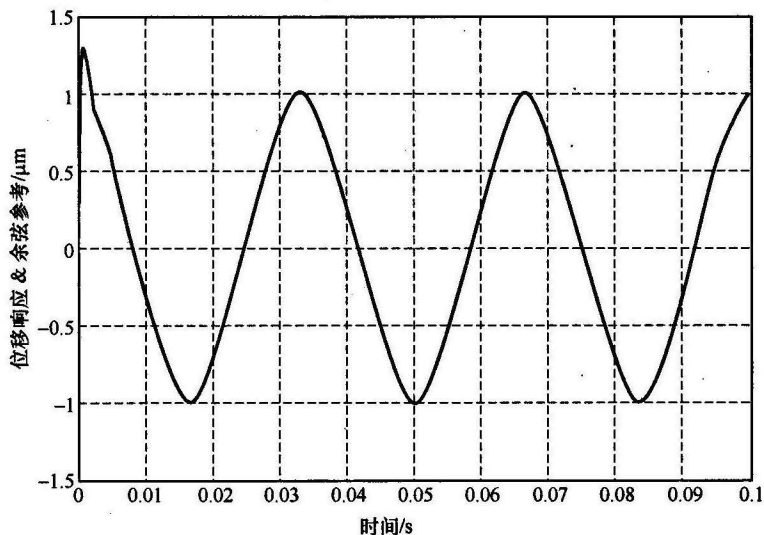
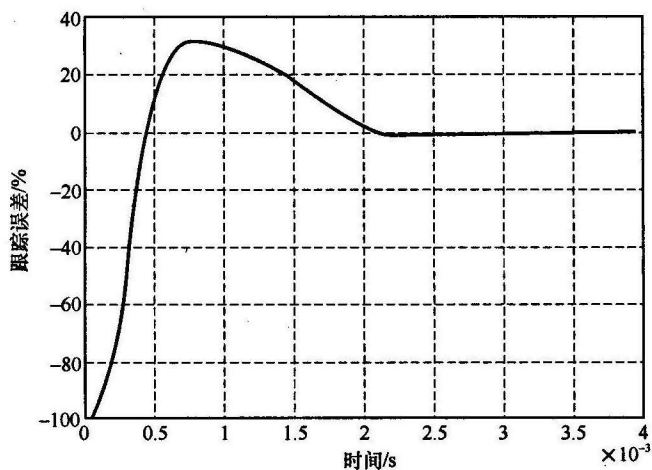
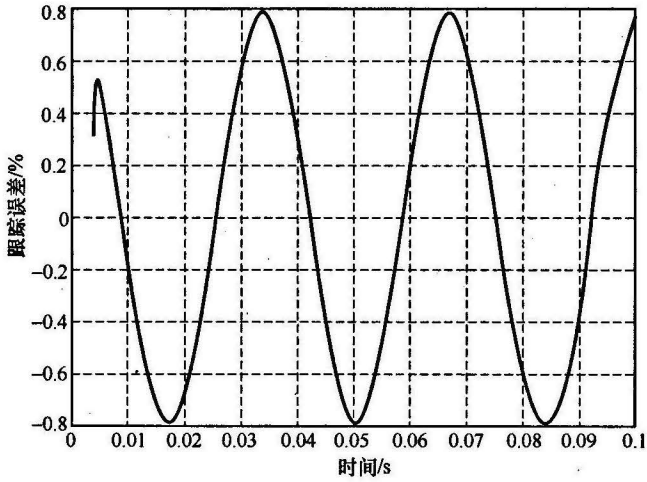


图 16.8 位移响应和 30Hz 的余弦参考



(a) 从 0~0.004s 的跟踪误差

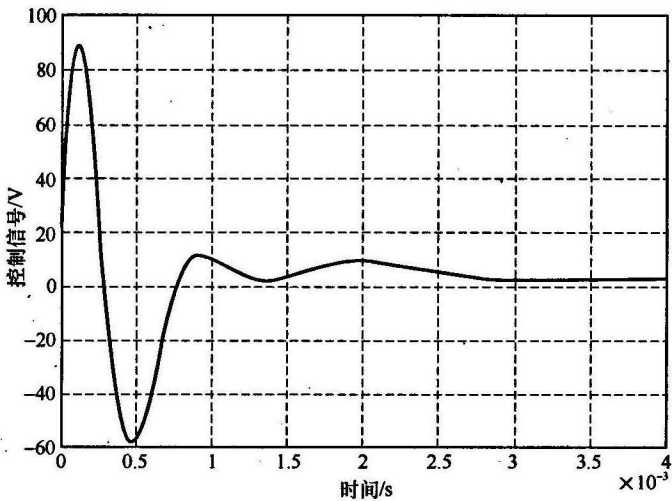
图 16.9 30Hz 余弦信号的跟踪误差



(b) 从0.004-0.1s的跟踪误差

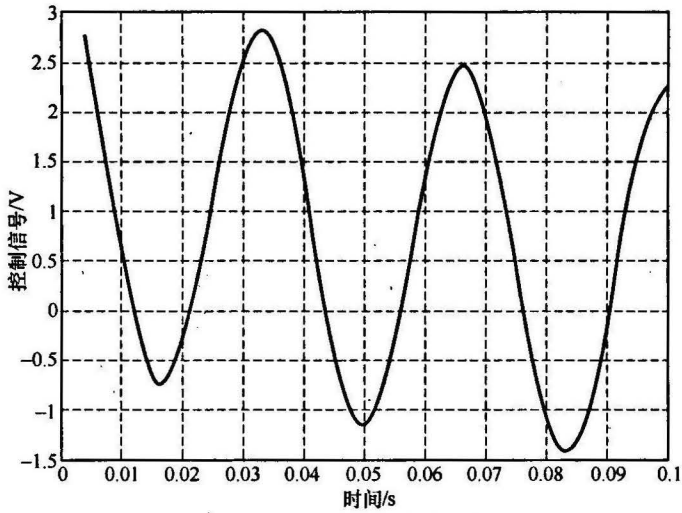
图 16.9 30Hz 余弦信号的跟踪误差(续)

因为压电执行器的工作范围是在平衡点的小范围内,非线性双压执行器的稳定性能和线性化模型基本相同。仿真结果也证实了这一点。事实上,实际的闭环系统性能甚至好于线性化的模型。



(a) 从0-0.004s的控制信号

图 16.10 30Hz 余弦的控制信号



(b) 从0.004~0.1s的控制信号

图 16.10 30Hz 余弦的控制信号(续)

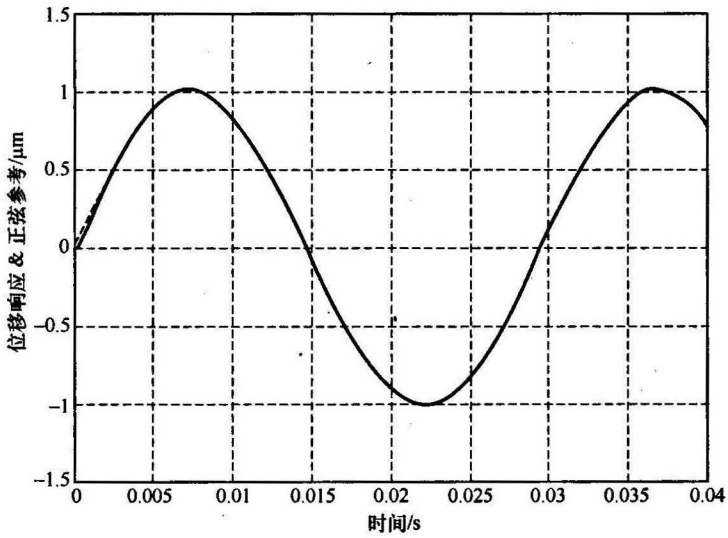


图 16.11 34Hz 正弦参考时的位移响应

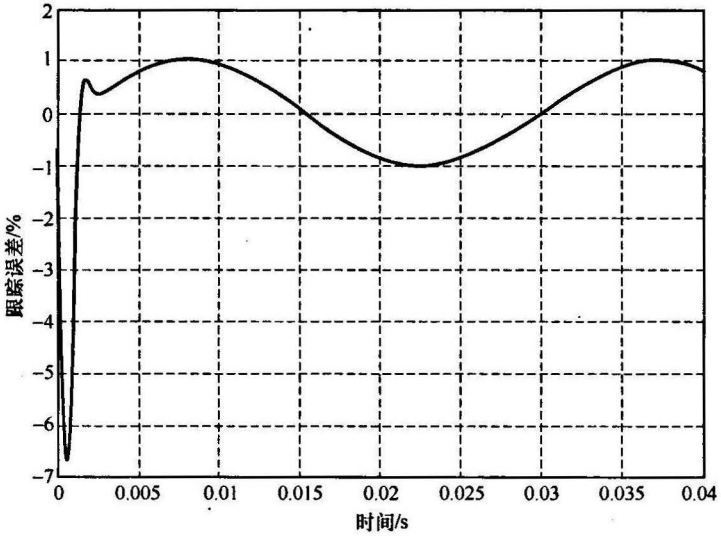


图 16.12 34Hz 正弦信号的跟踪误差

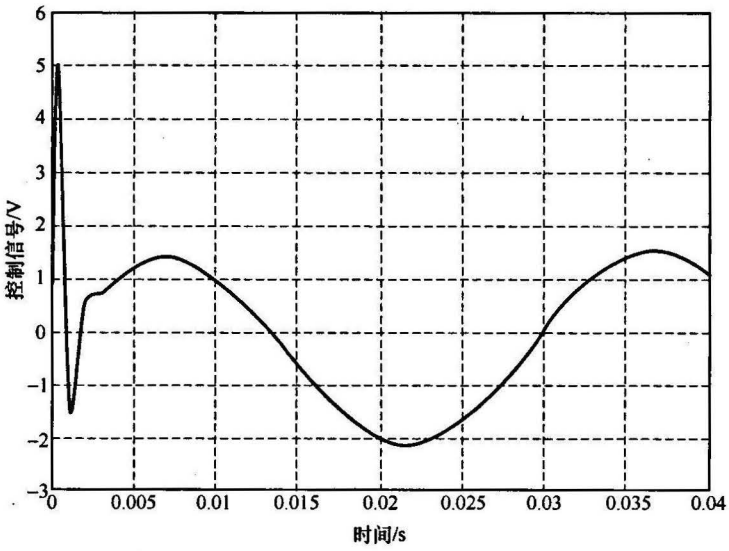


图 16.13 34Hz 正弦输入时的控制信号

第 17 章 陀螺稳定镜像定位系统的设计

17.1 导 论

光电传感器(electro-optical, E-O)通常被安装在如飞机、直升机和坦克等的平台上,需要承受由平台所引起的振动,这些振动使得光电传感器的定向线(line-of-sight, LOS)产生偏移,造成影像质量严重下降(可参见文献[162])。对放大倍数较高的系统尤其如此。克服这些困难的方法之一就是利用自由陀螺稳定系统。一个陀螺或回转仪实际上就是一个高速旋转的环轴对称体。角惯量和旋转速度都保持为恒定值,动量也是保持恒定的。注意动量是向量性质的,因而方位是保持不变的。因此在没有较大外力的作用下,一个陀螺是能够在惯性空间中保持旋转轴方位的。通过选择一个合适的旋转高速,和动量相比,由平台所引起的振动转矩是可以被忽略的。所以,我们只要简单地设计一个系统,使得 LOS 和陀螺的旋转轴在空间上保持平行,就能让 LOS 稳定下来。但是旋转的陀螺具有另外的进动特性。这意味着如果在一个轴上施加力矩,它会有背于通常的力学原理在另一个轴的方向上产生旋转^[163]。所以为了让 LOS 的空间定位可以变化,一个陀螺至少需要两个自由度。由于围绕一个轴的运动会产生围绕另一个轴的耦合运动,这样的特性给 LOS 的控制制造了很大的困难。所以我们需要设计一个控制器可产生正确的摆动(即计算出可产生期望进动的转矩)。

本章中考虑陀螺稳定镜像多变量伺服系统,也就是一个两输入两输出系统。由于两个轴之间存在耦合运动,控制这样一个多输入多输出系统并不是简单地应用传统的 PID 控制器就可解决的。除此之外,即使系统动态发生变化的情况下,控制器也要保持系统的稳定运行。在过去数年的时间里,有许多研究者对该系统进行了研究,所研究的控制方法包括自适应前馈策略(见文献[164])、神经网络控制(见文献[165])和模糊逻辑控制(见文献[166])。然而除了文献[165]中的控制器以外,利用这些技术所得到的控制器都过于复杂,很难在实际系统中实现。本章利用鲁棒和完全跟踪(RPT)方法来处理这个问题,设计出简单和低阶的控制器使得总的闭环系统具有快速跟踪和好的鲁棒性能。这一章的工作是由 Siew、Chen 和 Lee^[167]完成的。本章的内容安排如下:17.2 节是自由陀螺稳定镜像系统的力学描述及其动态方程。在 17.3 节,我们把控制器的设计问题转变成鲁棒和完全跟踪控制问题,然后利用第 10 章提出的所谓渐近时间尺度和特征结构配置(ATEA)来解决所提出问题。17.4 节给出了总体设计的仿真和实现结果。这些结果都清

楚地表明本章的设计可以达到给定的指标,总体性能非常令人满意。

17.2 自由陀螺稳定镜像系统

本节简要地介绍用于自由陀螺稳定镜像系统的硬件装置。整个系统由四个主要部分组成:①陀螺镜;②系统接口;③数据采集板;④个人计算机。总的硬件配置如图 17.1 所示。下面给出这四部分硬件的简单介绍。

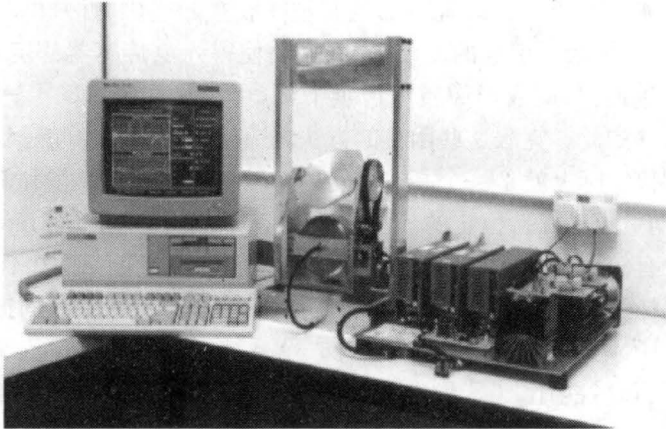


图 17.1 一个陀螺稳定镜像系统

1. 陀螺镜

自由陀螺稳定镜像系统的最关键部分当然就是陀螺镜本身了。图 17.2 为陀螺镜的示意图。它由三个基本部分组成:①飞轮和它的旋转电机;②平衡架(gimbals),它可为飞轮提供两个自由度,对电机产生两个转矩,这是为了产生摆动;③反射镜,它和平衡架通过一个 2:1 减速齿轮传动连接。

因为刚体不可能永久地旋转,一个饼状旋转电机(飞轮)被用作为回转仪(陀螺)。通过调节输入转矩,飞轮可以恒定的高速围绕转轴(spin axis)旋转(图 17.2 的 Axis 3)。飞轮安装在内平衡架上,可以上下自由地旋转。这个旋转轴就称为倾斜轴(pitch axis)(图 17.2 的 Axis 2)。内平衡架又依次安装在一个外平衡架上,提供了另一个轴(yaw axis 或 Axis 1)的自由度,使之可以左右运动。注意这三个轴是相互正交的,让镜轴和倾斜轴共线可使定向线(LOS)系统和 Axis 3 平行。

内外平衡架都分别连接到一个力矩电机上。这些力矩电机在偏转(yaw)或倾斜(pitch)轴方向上移动陀螺系统,所以分别称为偏转或倾斜电机。通过这些电机产生的适当转矩,可使系统相对于惯性坐标系进动到期望的定向线(LOS)。停止

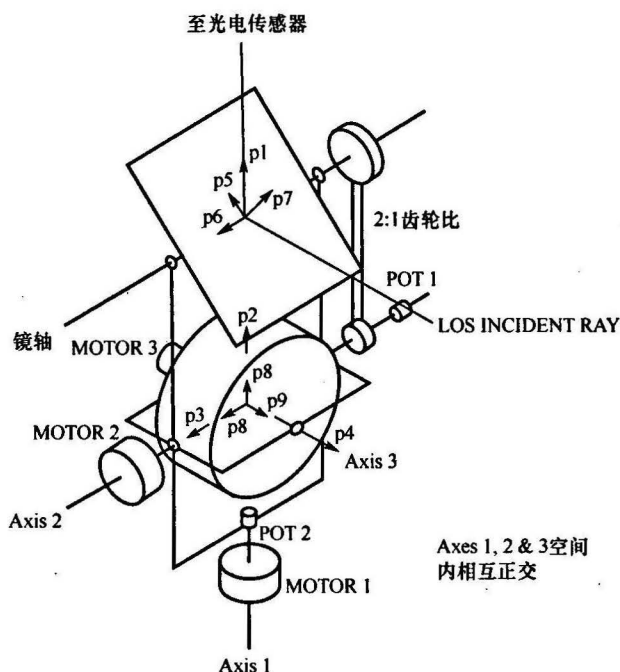


图 17.2 陀螺镜示意图

MOTOR 1 和 MOTOR 2: 力矩电机; MOTOR 3: 旋转电机; POT 1 和 POT 2: 电位计

这些转矩的作用时, LOS 就稳定在一个新的位置上。我们分别定义关于偏转和倾斜轴的角度为 θ_1 和 θ_2 。安装在外内平衡架上的电位计可以用来测量 θ_1 和 θ_2 。值得一提的是系统并没有速度传感器来测量 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 。由于实际条件的限制, 陀螺稳定镜像系统的工作范围被限制在 $-50^\circ \leq \theta_1 \leq 50^\circ$ 和 $-30^\circ \leq \theta_2 \leq 30^\circ$ 。偏转和倾斜电机的最大转矩也被限制在 $-0.5 \sim 0.5 \text{ Nm}$ 。

对这个特定的系统, 反射镜代替了实际的光电传感器。这样做的好处是光电传感器不再成为系统整体部件的一部分, 因此使用任何一种光电传感器都不会改变系统的动态特性。反射镜通过一个 2:1 的减速驱动连接到飞轮和平衡架结构。当反射镜标定 α 角时, 反射后的 LOS 旋转了 2α , 所以 2:1 的减速驱动是必需的。

利用 Lagrange 的运动方程^[168] 就可以得到陀螺镜的动态方程:

$$M_1(\theta)\ddot{\theta}_1 + H_1(\theta, \dot{\theta}) + G_1(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_3) = u_1 \quad (17.1)$$

$$M_2(\theta)\ddot{\theta}_2 + H_2(\theta, \dot{\theta}) + G_2(\theta, \dot{\theta}, \dot{\theta}_3) = u_2 \quad (17.2)$$

其中 $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$; u_1 和 u_2 是偏转和倾斜轴的驱动力矩; $\dot{\theta}_3$ 是飞轮的旋转速度。方程(17.1)和方程(17.2)中的参数定义如下:

$$M_1 = \bar{a} + \bar{d} + (\bar{b} - \bar{d} + \bar{l}) \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2}(\bar{e} + \bar{g}) + \frac{1}{2}(\bar{e} - \bar{g}) \sin \theta_2 \quad (17.3)$$

$$H_1 = -(\bar{b} - \bar{d} + \bar{l})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin 2\theta_2 + \frac{1}{2}(\bar{e} - \bar{g})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \bar{k}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2\cos\theta_2 \quad (17.4)$$

$$G_1 = \bar{k}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\cos\theta_2 \quad (17.5)$$

$$M_2 = \bar{c} + \frac{\bar{f}}{4} + \bar{l} \quad (17.6)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{d} + \bar{l})\dot{\theta}_1^2\sin 2\theta_2 - \frac{1}{4}(\bar{e} - \bar{g})\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2 - \bar{k}\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2\cos\theta_2 \quad (17.7)$$

$$G_2 = -\bar{k}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos\theta_2 \quad (17.8)$$

其中 \bar{a} 、 \bar{b} 、 \bar{d} 、 \bar{e} 、 \bar{f} 、 \bar{g} 、 \bar{l} 和 \bar{k} 是惯性系统中代表各种矩的物理常数。这些常数在文献 [166] 和 [168] 中已经得到辨识, 它们的取值为

$$\bar{a} = 0.004, \quad \bar{b} = 0.00128, \quad \bar{c} = 0.00098, \quad \bar{d} = 0.02 \quad (17.9)$$

$$\bar{e} = 0.0049, \quad \bar{f} = 0.0025, \quad \bar{g} = 0.00125, \quad \bar{l} = 0.0032, \quad \bar{k} = 0.0025 \quad (17.10)$$

以上参数的单位都是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。从上面的方程中可以发现系统是高度非线性的, 并在偏转和倾斜轴之间存在耦合项。

2. 系统接口

陀螺镜系统中的力矩电机和位置传感器都必须通过数据采集卡连接到个人计算机上。这些都是通过系统接口配置来完成的。图 17.3 是各接口的分布。

(1) 电源: 电源单元 A 和 B 是单个 28V 直流调节型的。把它们串联起来可以提供 $-24 \sim 0 \sim +24\text{V}$ 范围内的直流电压。该组合电源为力矩电机、位置传感器和模拟滤波器提供电力。单元 C 是 24V 直流, 用于驱动飞轮控制器。

(2) 飞轮控制器: 这是一个驱动单元(模块 MCH20-20-002CL)。通过电压计对旋转电机提供调速控制。转速范围为 $0 \sim 5000\text{rpm}$ 。

(3) 电流放大器: 有两个电流放大器, 一个为偏转电机, 另一个为倾斜电机。放大器的输入直接连接到 AD/DA 卡上的 D/A 输出, 然后把输出连接到力矩电机上。它们是用功率放大器组成的, 输出电压范围是 $-25 \sim +25\text{V}$ 。这些输出产生 $-0.5 \sim 0.5\text{Nm}$ 范围电动力矩。

(4) 模拟滤波器: 从电位计上得到的位置信号在连接到 AD/DA 卡上的 A/D 输入端之前先要通过这些滤波器。它们是截断频率在 19Hz 的低通滤波器, 可以抑制高频噪声。

3. 数据采集板

我们所采用的模拟-数字和数字-模拟(AD/DA)卡有两个模拟输入通道和两个模拟输出通道。模拟输入是滤波后的偏转和倾斜轴的位置信号, 而模拟输出是

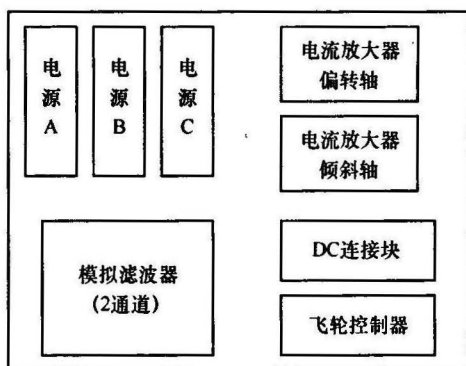


图 17.3 系统接口

控制电机的电压。所有通道的信号是 $-10\sim+10\text{V}$ 的直流电压,具有 12 位的精度。

4. 个人计算机

通过 AD/DA 卡,控制器就由一台个人计算机来实现。图 17.4 是实验平台的结构图。个人计算机的配置是一台 IBM PC,英特尔奔腾 75 处理器和一个 MS-DOS 6.0 的操作系统。

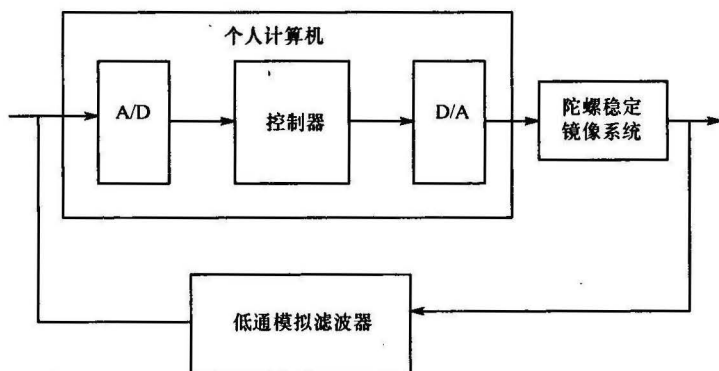


图 17.4 实验平台布置

17.3 利用 RPT 方法设计控制器

本节把自由陀螺稳定镜像系统的控制器设计转变成鲁棒和完全跟踪(RPT)控制问题,然后利用第 10 章的方法来设计控制器。目的是要设计一个如图 17.5

所示的简单和低阶的控制器结构,使得总体性能满足以下要求:

- (1) 闭环系统的偏转和倾斜轴能较快地跟踪阶跃输入信号,并尽量具有小的或没有超调;
- (2) 偏转轴和倾斜轴之间的耦合达到最小;
- (3) 总体系统对外界扰动和系统参数变化具有鲁棒性。

很快就会发现该控制器非常简单、阶次较低,所以利用低速的个人计算机、A/D和D/A卡就可以实现。

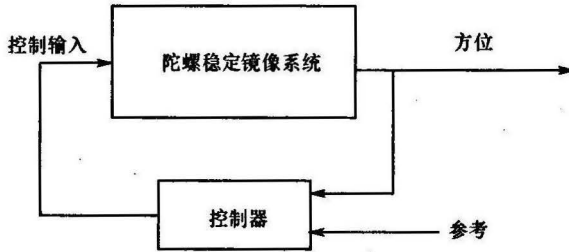


图 17.5 陀螺稳定镜像系统的控制器结构

首先需要对式(17.1)和式(17.2)所示的动态模型进行线性化,把它变成标准的状态空间模型。线性化的状态空间模型为

$$\dot{x}_g = A_g x_g + B_g u + E_g w_g \tag{17.11}$$

其中

$$x_g = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{17.12}$$

$w_g \in L_2$ 系统中的阻尼系数,当成扰动来处理。矩阵 A_g 、 B_g 和 E_g 的定义是

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{k}\dot{\theta}_3/N_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{k}\dot{\theta}_3/N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17.13}$$

和

$$B_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/N_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/N_2 \end{bmatrix}, \quad E_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{17.14}$$

这里

$$N_1 = \bar{a} + \bar{b} + \frac{\bar{e} + \bar{g}}{2} + \bar{l}, \quad N_2 = \bar{e} + \frac{\bar{f}}{4} + \bar{l} \quad (17.15)$$

自由陀螺稳定镜像系统的测量输出是

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (17.16)$$

由于我们只对 LOS 的方位变化感兴趣,所以只考虑阶跃函数的参考输入信号 $r(t)$,即

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} 1(t) = \Psi \cdot 1(t) \quad (17.17)$$

其中 $1(t)$ 是单位阶跃函数, ψ_1 和 ψ_2 是一些常数。又可得

$$\dot{r}(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} \delta(t) = \Psi \cdot \delta(t) \quad (17.18)$$

其中 $\delta(t)$ 是单位脉冲函数。现定义实际输出 θ 和参考输入 r 之间的误差作为被控输出 h , 即

$$e = \theta - r = \begin{bmatrix} \theta_1 - r_1 \\ \theta_2 - r_2 \end{bmatrix} \quad (17.19)$$

显然 e 就是跟踪误差。最后得到下面的辅助系统:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1 x + D_1 w \\ e = C_2 x + D_2 u \end{cases} \quad (17.20)$$

其中

$$x = \begin{bmatrix} r \\ x_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_g \\ \delta(t) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (17.21)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_g \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_g \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & \Psi \\ E_g & 0 \end{bmatrix} \quad (17.22)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (17.23)$$

以及

$$C_2 = [-I_2 \quad C_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = D_2 = 0 \quad (17.24)$$

现在不难验证①子系统(A_g, B_g, C_2, D_2)是可逆的,且有两个2阶的无限零点;② $\text{Ker}(C_2) = \text{Ker}(C_1)$ 。根据第10章的结果,我们可以证明对该系统是可以实现鲁棒和完全跟踪的,即存在一组测量反馈控制律:

$$\Sigma_{\text{cmp}}: \begin{cases} \dot{v} = A_{\text{cmp}}(\epsilon)v + B_{\text{cmp}}(\epsilon)y \\ u = C_{\text{cmp}}(\epsilon)v + D_{\text{cmp}}(\epsilon)y \end{cases} \quad (17.25)$$

当应用到陀螺稳定镜像系统时,有

(1)对充分小的 ϵ ,闭环系统是渐近稳定的;

(2)对任意初始条件 x_0 和任意扰动 $w \in L_2$,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,和 ϵ 相关的跟踪误差 e 具有性质 $\|e\|_2 \rightarrow 0$ 。

所以从原理上讲, $\theta(t)$ 可以在任意短的时间内,没有超调地完全跟踪指令信号 $r(t)$ 。当然,为此优良性能所付出的代价是无限的控制输入,即增益无限大。这是不现实的事情。在前面已经指出控制输入的实际范围是 $-0.5 \sim 0.5\text{Nm}$,因此,在实际应用中,我们需要作出适当的权衡。

利用第10章的结果,我们既可以设计全阶观测器型控制器,也可以设计降阶观测器型控制器来解决以上问题。对于全阶观测器型控制器,控制器的阶次为6。另一方面,因为只需要重构速度状态变量,降阶观测器型控制器的阶次是2。因此从实用的观点出发,一般更希望使用降阶观测器型的控制器。我们把控制器的设计分成下面的两步:

(1)第一步是假设式(17.20)所示的系统 Σ 的所有六个状态都可以得到,设计一个静态的状态反馈律

$$u = Fx \quad (17.26)$$

使得闭环系统具有期望的性能。

(2)在第二步中设计降阶观测器型控制器。存在一个降阶观测器增益矩阵 K_R 可以恢复第一步中的状态反馈律所达到的性能。

利用文献[88](或文献[74])的工具软件中的 m 函数`atea.m`,经过几步迭代,我们得到下面的状态反馈增益:

$$F = - \begin{bmatrix} -2.3732 & -1.4264 & 2.3732 & 1.0271 & 1.4264 & 0.0000 \\ 1.4264 & -2.3732 & -1.4264 & 0.0000 & 2.3732 & 1.0113 \end{bmatrix} \quad (17.27)$$

仿真结果表明用上面的状态反馈所得到的闭环系统性能是相当令人满意的。接下来应用第10章的算法得到形如式(17.25)所示的二阶测量反馈律,其中

$$A_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} -174.3280 & -74.2370 \\ 106.2743 & -332.7939 \end{bmatrix} \quad (17.28)$$

$$B_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 1.0269 & 0.6172 & -83.3798 & -64.5160 \\ -1.4843 & 2.4695 & 11.5772 & -194.7265 \end{bmatrix} \quad (17.29)$$

$$C_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} -205.4112 & 0 \\ 0 & -202.2678 \end{bmatrix} \quad (17.30)$$

$$D_{\text{cmp}} = \begin{bmatrix} 2.3732 & 1.4264 & -90.1288 & -23.2207 \\ -1.4264 & 2.3732 & -20.0343 & -126.0777 \end{bmatrix} \quad (17.31)$$

17.4 仿真和实现结果

为利用硬件装置实现前节设计的控制器,我们需要将其离散化。然后利用 Matlab Simulink 来评估离散化控制器的性能。最后应用到实际的自由陀螺稳定镜像系统。利用著名的双线性变换(参见第 4 章),采样时间为 4ms,我们得到下面的离散化控制器:

$$\Sigma_{\text{dcmp}} : \begin{cases} v(k+1) = A_{\text{dcmp}}v(k) + B_{\text{dcmp}}y(k) \\ u(k) = C_{\text{dcmp}}v(k) + D_{\text{dcmp}}y(k) \end{cases} \quad (17.32)$$

其中

$$A_{\text{dcmp}} = \begin{bmatrix} 0.4624 & -0.1304 \\ 0.1866 & 0.1841 \end{bmatrix} \quad (17.33)$$

$$B_{\text{dcmp}} = \begin{bmatrix} 0.8476 & 0.2904 & -61.7225 & -34.4820 \\ -0.7830 & 1.5179 & -0.9257 & -121.3119 \end{bmatrix} \quad (17.34)$$

$$C_{\text{dcmp}} = \begin{bmatrix} -0.6008 & 0.0536 \\ -0.0755 & -0.4790 \end{bmatrix} \quad (17.35)$$

$$D_{\text{dcmp}} = \begin{bmatrix} 2.0249 & 1.3072 & -64.7719 & -9.0547 \\ -1.1097 & 1.7584 & -19.6598 & -77.0027 \end{bmatrix} \quad (17.36)$$

为了得到更加精确的结果,我们用方程(17.1)和方程(17.2)所示的非线性模型来作仿真。仿真是在 Runge-Kutta 5 的方法下进行,最大和最小步长都设置为采样周期,即 4ms。考虑到力矩电机的限制,每个都增加了一个饱和模块。幅度限制在 $\pm 0.5\text{Nm}$ 。仿真中的陀螺旋转速度设定为 2500rpm。

陀螺开始按指令同时运动到(偏转,倾斜) = $(5^\circ, -5^\circ)$ 。在第 5s 从该位置移动到 $(20^\circ, -20^\circ)$ 。然后是一个水平跨动,即陀螺在水平方向从 20° 移动到 -5° ,而保持倾斜的 -20° 不变。接下来是垂直跨动,此时偏转位置保持在 -5° ,而倾斜位置从 -20° 变到 5° 。最后在返回到零位置之前,陀螺运动到边界位置 $(-50^\circ, 30^\circ)$ 。陀螺的响应以及每个轴的力矩输入显示在图 17.6 和图 17.7 中。

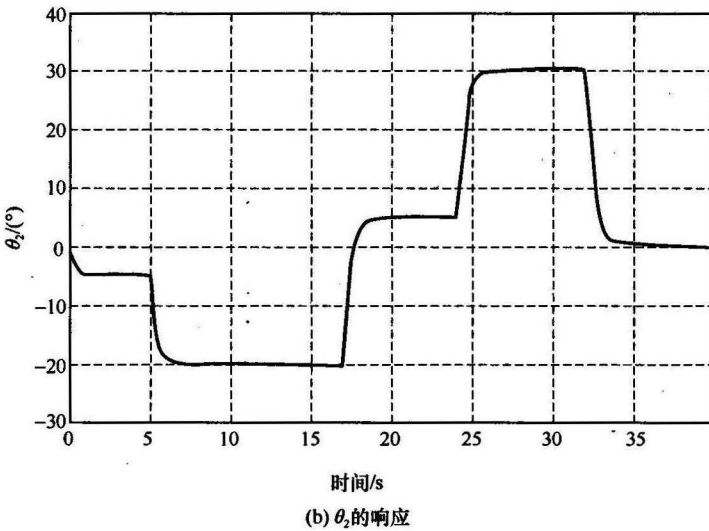
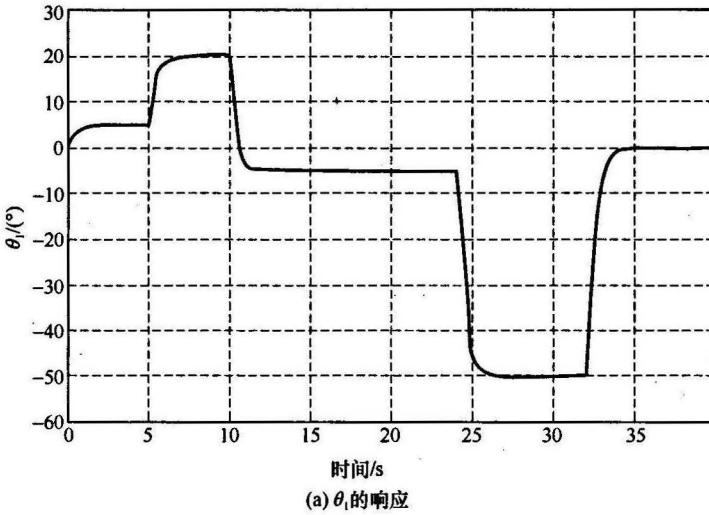
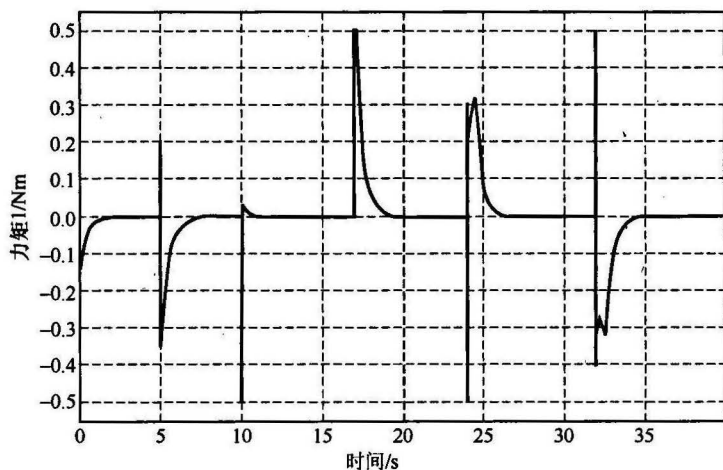
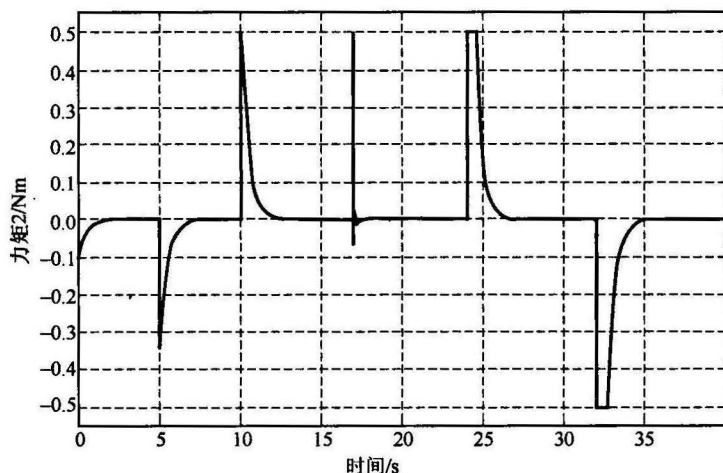


图 17.6 仿真结果： θ_1 和 θ_2 的响应

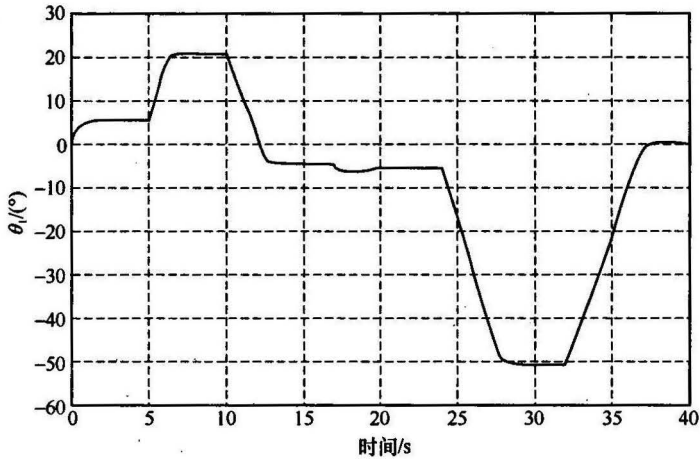
在上面的测试中我们选择了各种给定信号, 这样在位置变换过程中, 位移的变换范围可以从小的 5° 变换到大的 45° 。这是为了验证本章所设计的控制器在整个工作范围内具有良好的性能(尽管是在线性化的模型上进行设计的)。同时运动是为了测试控制器能否实现两个轴的完全跟踪, 跨动是为了检验控制器在陀螺稳定镜像系统中的“解耦”效果。从图 17.6 中的响应可以看出, 陀螺可以到达指定的位置而没有稳定状态误差, 而且没有存在超调。从边界位置回到零位置的响应时间约为 3.5s。由于移动 θ_2 所引起的最大 θ_1 联动大约是 0.15° , 移动 θ_1 所引起的最大

θ_2 连动大约是 0.5° 。观察图 17.7 可见所有这些指标的实现都让力矩保持在 $\pm 0.5\text{Nm}$ 的范围内。由此可见本章所设计的控制器是相当令人满意的。

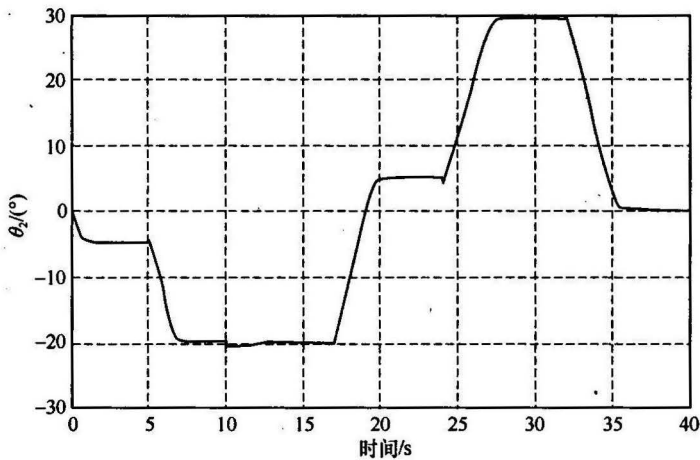
(a) 控制输入 u_1 (b) 控制输入 u_2 图 17.7 仿真结果:控制输入 u_1 和 u_2

接下来对自由陀螺稳定镜像系统用计算机来实现实际控制,并再次进行整个测试。测试的结果显示在图 17.8 和图 17.9 中。

比较图 17.6 和图 17.7 与图 17.8 和图 17.9,我们注意到大体的波形都是相同的,但是在两个轴上都存在稳态误差,而且实际的系统响应时间稍微要长一些。例如,现在需要 5s 而不是原来 3.5s 的时间从边界位置返回到零。由于一个轴的运动所引起的另一个轴的连动作用也比仿真结果要大(偏转轴是 1.6° ,倾斜轴是



(a) θ_1 的响应



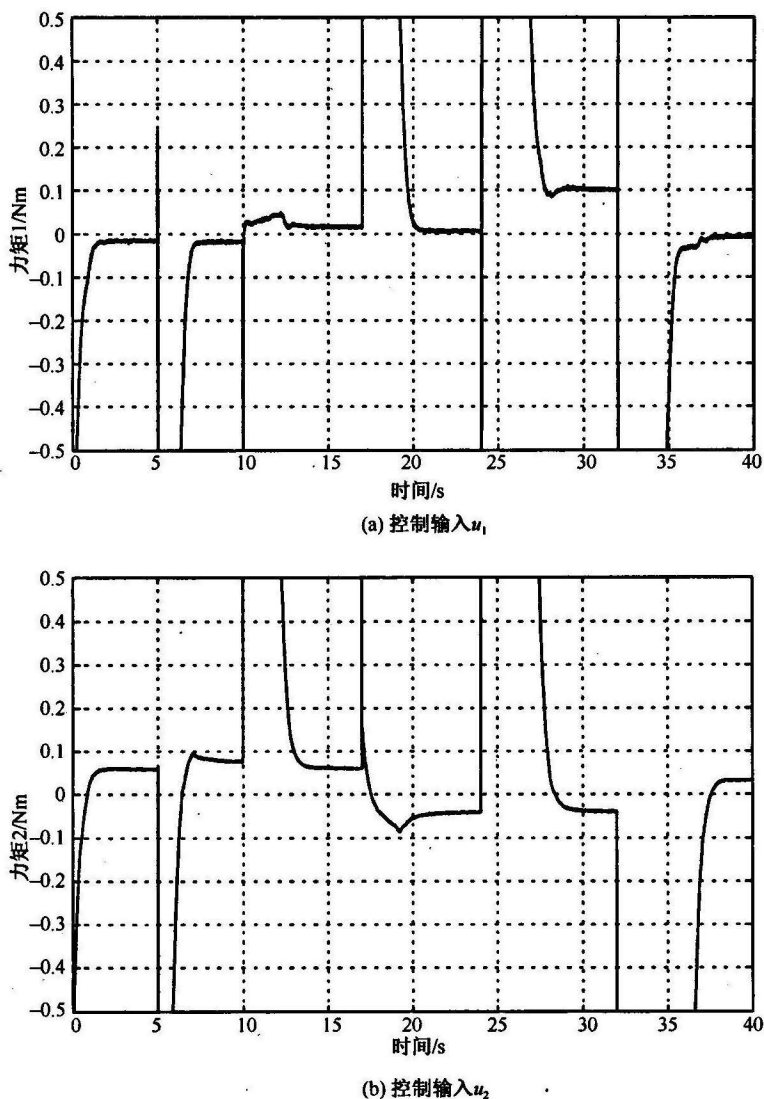
(b) θ_2 的响应

图 17.8 实现结果: θ_1 和 θ_2 的响应

0.55°)。控制器实现后的性能显然不如仿真的结果好,原因在硬件系统的欠缺。

系统的最大缺陷可能是力矩电机的死区。研究一下图 17.9,我们注意到尽管转矩还没归零,位移却已经到达了稳定状态。这只有在力矩电机工作在死区时才会发生。实际上,经过几次测试,我们发现倾斜电机的死区更加明显,而且在运行过程中还发生变化。根据以前的资料(见文献[90])记载:“死区和陀螺镜机械振动有关。在陀螺镜发生振动时,引起系统‘松动’,结果是产生小的死区;而当陀螺镜被稳定下来并平稳旋转之后,存在大的死区。”这一现象使得死区的补偿非常困难。但是经过实验,我们观察到死区的幅值补偿似乎和给定信号有下面的关系:

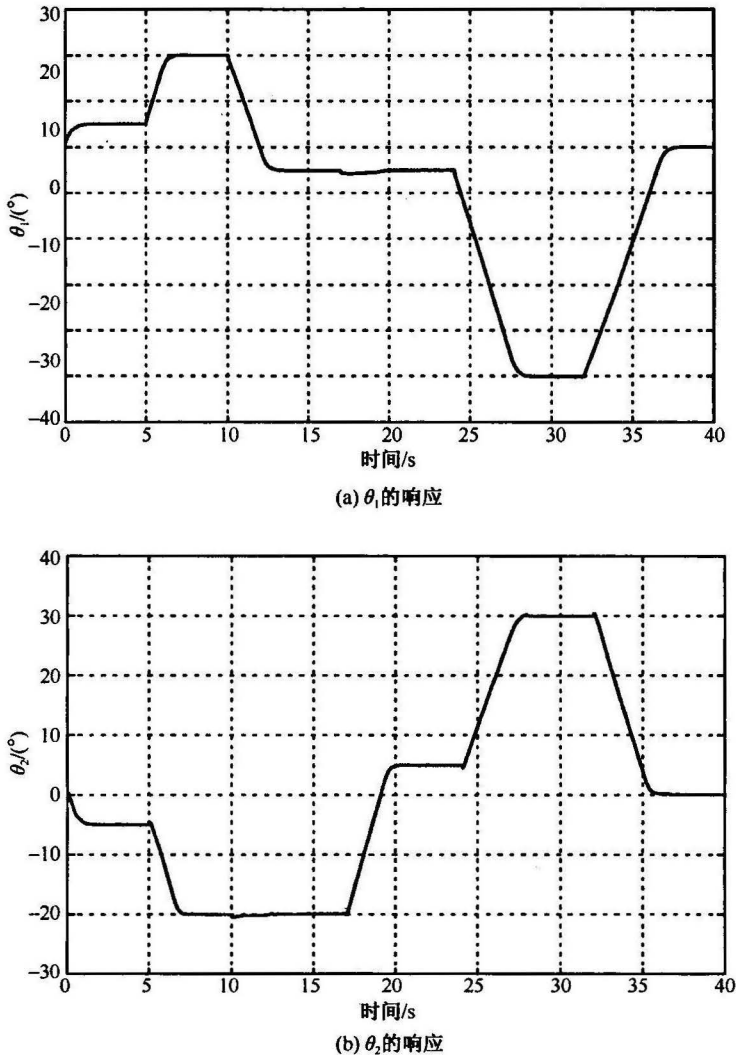
$$u_{os1} = \alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2 \quad (17.37)$$

图 17.9 实现结果:控制输入 u_1 和 u_2

$$u_{os2} = \alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 \quad (17.38)$$

其中 u_{os1} 和 u_{os2} 是分别需要加到 u_1 和 u_2 上的值。可用 (r_1, r_2) 不同的取值来调节 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 和 β_2 , 从而得到加到控制输入上的合适校正量, 使得死区的影响最小。图 17.10 和图 17.11 是加了死区补偿的控制器的测试结果, 所用的死区补偿参数是

$$\alpha_1 = -0.001125, \quad \beta_1 = -0.000125, \quad \alpha_2 = -0.0049875, \quad \beta_2 = -0.00059375 \quad (17.39)$$

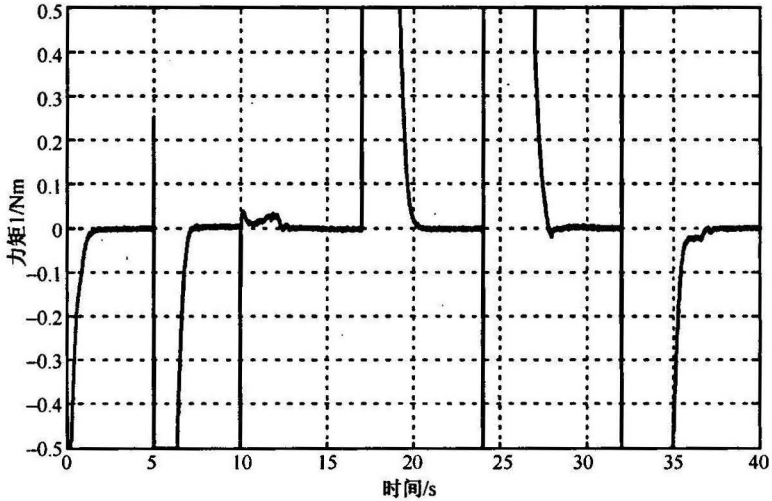
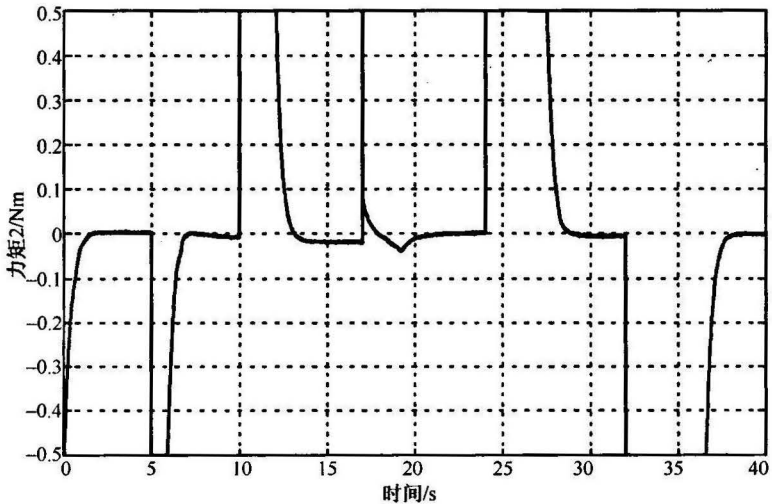
图 17.10 带有死区补偿的实现结果: θ_1 和 θ_2 的响应

在死区补偿下,我们再次看到控制器可以具有快速的跟踪性能,在两个轴上都没有超调及最小的连动作用(偏转轴为 0.8° , 倾斜轴为 0.5°)。

为了检验控制器的鲁棒性,我们同时对偏转轴方向($+20^\circ$)和倾斜轴方向(-20°)发出移动指令。然后有意引进一些扰动到系统中(通过敲击平衡架)。如图 17.12 所示,控制器对外部干扰具有不错的鲁棒性。

在测试过程中,陀螺旋转速度是通过电位计来控制的,因此设定精确的旋转速度是很困难的。更糟糕的是陀螺本身会变化旋转速度,因为自由陀螺稳定镜

像系统的动态依赖它的旋转速度,故系统动态也在变化。而且模型中的物理参数是几年以前对自由陀螺稳定镜像系统做实验而得到的。经过这些年的时间,自由陀螺稳定镜像系统经历过多次的磨损和维修,从前得到的物理参数值可能不再准确了。因此从模型不确定的角度来看,本章所设计的控制系统仍然是非常令人满意的。

(a) 控制输入 u_1 (b) 控制输入 u_2 图 17.11 带有死区补偿的实现结果:控制输入 u_1 和 u_2

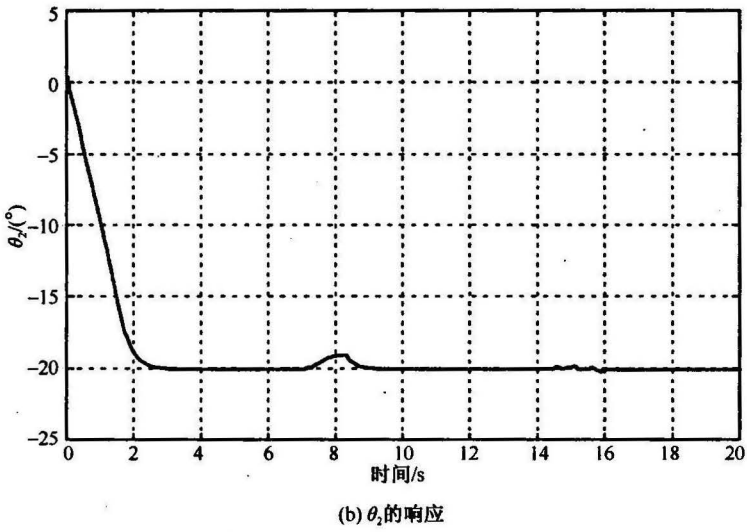
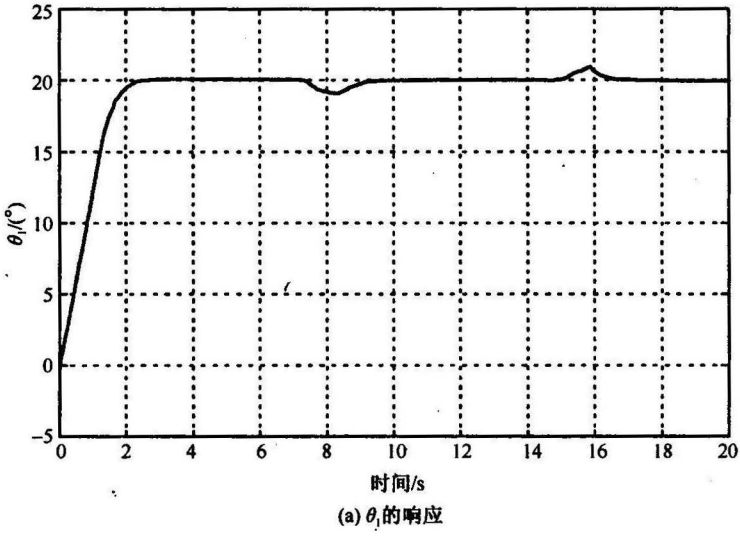


图 17.12 控制系统的鲁棒性测试

参考文献

- [1] Chen B M. H_∞ Control and Its Applications// Lecture Notes in Control and Information Sciences, 235. London: Springer, 1998.
- [2] Chen B M. Robust and H_∞ Control. New York: Springer, 2000.
- [3] 陈本美, 林宗利, 雅科夫·司马诩. 线性系统理论: 结构分解法. 席斌译. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [4] Zames G. Feedback and optimal sensitivity; Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26: 301—320.
- [5] Limebeer D J N, Anderson B D O. An interpolation theory approach to H_∞ controller degree bounds. Linear Algebra and Its Applications, 1988, 98: 347—386.
- [6] Doyle J C. Lecture Notes in Advances in Multivariable Control. Minneapolis: ONR Honeywell Workshop, 1984.
- [7] Francis B A. A Course in H_∞ Control Theory//Lecture Notes in Control and Information Sciences, 88. Berlin: Springer, 1987.
- [8] Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds. International Journal of Control, 1984, 39: 1115—1193.
- [9] Kwakernaak H. A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems. International Journal of Control, 1986, 41: 117—156.
- [10] Kimura H. Chain-Scattering Approach to H_∞ -Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [11] Chen B M, Guo Y, Lin Z L. Non-iterative computation of infimum in discrete-time H_∞ -optimization and solvability conditions for the discrete-time disturbance decoupling problem. International Journal of Control, 1996, 65: 433—454.
- [12] Chen B M, Saberi A, Ly U. Exact computation of the infimum in H_∞ -optimization via output feedback. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37: 70—78.
- [13] Doyle J C, Glover K. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. Systems & Control Letters, 1988, 11: 167—172.
- [14] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34: 831—847.
- [15] Khargonekar P P, Petersen I R, Rotea M A. H_∞ -optimal control with state feedback. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33: 786—788.
- [16] Petersen I R. Disturbance attenuation and H_∞ -optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation. IEEE Transactions on Automatic Control, 1987, 32: 427—429.
- [17] Saberi A, Chen B M, Lin Z L. Closed-form solutions to a class of H_∞ -optimization problem. International Journal of Control, 1994, 60: 41—70.
- [18] Sampei M, Mita T, Nakamichi M. An algebraic approach to H_∞ -output feedback control problem. Systems & Control Letters, 1990, 14: 13—24.
- [19] Scherer C. H_∞ -control by state feedback and fast algorithm for the computation of optimal H_∞ norms. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35: 1090—1099.

- [20] Scherer C. H_∞ -control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1992, 30: 123—142.
- [21] Scherer C. H_∞ -optimization without assumptions on finite or infinite zeros. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1992, 30: 143—166.
- [22] Stoorvogel A A. *The H_∞ Control Problem; A State Space Approach*. Englewood Cliffs; Prentice Hall, 1992.
- [23] Stoorvogel A A, Saberi A, Chen B M. The discrete-time H_∞ control problem with measurement feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4: 457—479.
- [24] Tadmor G. Worst-case design in the time domain; The maximum principle and the standard H_∞ problem. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1990, 3: 301—324.
- [25] Zhou K, Doyle J, Glover K. *Robust and Optimal Control*. New York; Prentice Hall, 1996.
- [26] Zhou K, Khargonekar P. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ 4-optimization. *Systems & Control Letters*, 1988, 11: 85—91.
- [27] Başar T, Bernhard P. *H_∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems; A Dynamic Game Approach*. 2nd Edition. Boston; Birkhäuser, 1995.
- [28] Papavassilopoulos G P, Safonov M G. Robust control design via game theoretic methods. *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control*, Tampa, 1989: 382—387.
- [29] Barnett S. *Matrices in Control Theory*. Malabar; Robert E. Krieger Publishing Company, 1984.
- [30] Chen C T. *Linear System Theory and Design*. 2nd Edition. New York; Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [31] Desoer C A, Vidyasagar M. *Feedback Systems; Input-Output Properties*. New York; Academic Press, 1975.
- [32] Golub G H, van Loan C F. *Matrix Computations*. Baltimore; The Johns Hopkins University Press, 1983.
- [33] 黄琳. *系统与控制中的线性代数*. 北京: 科学出版社, 1984.
- [34] Kailath T. *Linear Systems*. Englewood Cliffs; Prentice Hall, 1980.
- [35] Kreyszig E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York; Wiley, 1989.
- [36] 须田信英, 児玉慎三, 池田雅夫. *自动控制中的矩阵理论*. 曹长修译. 北京: 科学出版社, 1979.
- [37] Trentelman H L, Stoorvogel A A, Hautus M L J. *Control Theory for Linear Systems*. New York; Springer, 2001.
- [38] Wielandt H. On the eigenvalues of $A+B$ and AB . *Journal of Research of the National Bureau of Standards(B, Mathematical Science)*, 1973, 77: 61—63.
- [39] Wonham W M. *Linear Multivariable Control; A Geometric Approach*. New York; Springer, 1979.
- [40] Chen B M, Lin Z L, Shamash Y. *Linear Systems Theory; A Structural Decomposition Approach*. Boston; Birkhäuser, 2004.
- [41] Antsaklis P J, Michel A N. *Linear Systems*. New York; McGraw Hill, 1997.
- [42] Callier F M, Desoer C A. *Linear System Theory*. New York; Springer, 1991.
- [43] DeCarlo R A. *Linear Systems; A State Variable Approach with Numerical Implementation*. Englewood Cliffs; Prentice Hall, 1989.
- [44] Rugh W J. *Linear System Theory*. 2nd Edition. Upper Saddle River; Prentice Hall, 1996.
- [45] 郑大钟. *线性系统理论*. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [46] Rosenbrock H H. *State-Space and Multivariable Theory*. New York; John-Wiley, 1970.

- [47] Verghese G. Infinite frequency behavior in generalized dynamical systems[Ph. D. Dissertation]. Palo Alto; Stanford University, 1978.
- [48] Commault C, Dion J M. Structure at infinity of linear multivariable systems; A geometric approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27: 693—696.
- [49] Kouvaritakis B, MacFarlane A G J. Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Part 1; Square systems & Part 2; Non-square systems. International Journal of Control, 1976, 23: 149—181.
- [50] MacFarlane A G J, Karcianias N. Poles and zeros of linear multivariable systems; A survey of the algebraic, geometric and complex variable theory. International Journal of Control, 1976, 24: 33—74.
- [51] Moylan P. Stable inversion of linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22: 74—78.
- [52] Owens D H. Invariant zeros of multivariable systems; A geometric analysis. International Journal of Control, 1978, 28: 187—198.
- [53] Pugh A C, Ratcliffe P A. On the zeros and poles of a rational matrix. International Journal of Control, 1979, 30: 213—227.
- [54] Saberi A, Chen B M, Sannuti P. Theory of LTR for nonminimum phase systems, recoverable target loops, recovery in a subspace—Part 1; Analysis and Part 2; Design. International Journal of Control, 1991, 53: 1067—1160.
- [55] Popov V M. Hyperstability of Control Systems. Berlin; Springer, 1973 (translation of Romanian edition, 1966).
- [56] Belevitch V. Classical Network Theory. San Francisco; Holden-Day, 1968.
- [57] Hautus M L J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. Ned. Akad. Wetenschappen, Proc. Ser. A, 1969, 72: 443—448.
- [58] Luenberger D G. Observers for linear multivariable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, 11: 190—197.
- [59] Sannuti P, Saberi A. A special coordinate basis of multivariable linear systems-finite and infinite zero structure, squaring down and decoupling. International Journal of Control, 1987, 45: 1655—1704.
- [60] Youla D C, Bongiorno Jr J J, Lu C N. Single loop feedback stabilization of linear multivariable plants. Automatica, 1974, 10: 159—173.
- [61] Davison E J, Wang S H. Properties and calculation of transmission zeros of linear multivariable systems. Automatica, 1974, 10: 643—658.
- [62] Davison E J, Wang S H. Remark on multiple transmission zeros of a system. Automatica, 1976, 12: 195.
- [63] Gantmacher F R. Theory of Matrices. New York; Chelsea, 1959.
- [64] Morse A S. Structural invariants of linear multivariable systems. SIAM Journal on Control, 1973, 11: 446—465.
- [65] Basile G, Marro G. Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory. Journal of Optimization Theory and Applications, 1968, 3: 306—315.
- [66] Schumacher J M. Compensator synthesis using (C, A, B) pairs. IEEE Transactions on Automatic Control, 1980, 25: 1133—1138.
- [67] Willems J C. Almost invariant subspaces; An approach to high gain feedback design—Part I; Almost controlled invariant subspaces. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26: 235—252.
- [68] Willems J C. Almost invariant subspaces; An approach to high gain feedback design—Part II; Almost conditionally invariant subspaces. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27: 1071—1085.

- [69] Wonham W M, Morse A S. Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems, A geometric approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1970, 8: 1—18.
- [70] Saberi A, Sannuti P. Squaring down of non-strictly proper systems. *International Journal of Control*, 1990, 51: 621—629.
- [71] Silverman L M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14: 270—276.
- [72] Chen B M. On properties of the special coordinate basis of linear systems. *International Journal of Control*, 1998, 71: 981—1003.
- [73] Chen B M. A simple algorithm for the stable/unstable decomposition of a linear discrete-time system. *International Journal of Control*, 1995, 61: 255—260.
- [74] Lin Z, Chen B M, Liu X. Linear Systems Toolkit, MATLAB Software Package. <http://uav.ece.nus.edu.sg/~bmchen/>, 2004.
- [75] Chen B M, Saberi A, Sannuti P. Explicit expressions for cascade factorization of general nonminimum phase systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37: 358—363.
- [76] Lin Z, Chen B M, Saberi A, et al. Input-output factorization of discrete-time transfer matrices. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, 1996, 43: 941—945.
- [77] Chen B M, Saberi A, Sannuti P. On blocking zeros and strong stabilizability of linear multivariable systems. *Automatica*, 1992, 28: 1051—1055.
- [78] Chen B M, Zheng D Z. Simultaneous finite and infinite zero assignments of linear systems. *Automatica*, 1995, 31: 643—648.
- [79] Chen B M. Theory of loop transfer recovery for multivariable linear systems [Ph. D. Dissertation]. Washington: Washington State University, 1991.
- [80] Chen B M, Chen Y L. Loop transfer recovery design via new observer based and CSS architecture based controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5: 649—669.
- [81] Saberi A, Chen B M, Sannuti P. *Loop Transfer Recovery: Analysis and Design*. London: Springer, 1993.
- [82] Chen B M, Saberi A, Sannuti P, et al. Construction and parameterization of all static and dynamic H_2 -optimal state feedback solutions, optimal fixed modes and fixed decoupling zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38: 248—261.
- [83] Chen B M, Saberi A, Shamash Y, et al. Construction and parameterization of all static and dynamic H_2 -optimal state feedback solutions for discrete time systems. *Automatica*, 1994, 30: 1617—1624.
- [84] Saberi A, Sannuti P, Chen B M. H_2 Optimal Control. London: Prentice Hall, 1995.
- [85] Chen B M. Solvability conditions for the disturbance decoupling problems with static measurement feedback. *International Journal of Control*, 1997, 68: 51—60.
- [86] Lin Z. Global and semi-global control problems for linear systems subject to input saturation and minimum-phase input-output linearizable systems [Ph. D. Dissertation]. Washington: Washington State University, 1994.
- [87] Lin Z. *Low Gain Feedback*//Lecture Notes in Control and Information Sciences, 240. London: Springer, 1999.
- [88] Chen B M. Linear systems and control toolbox, Technical Report. Singapore: Department of Electrical Engineering, National University of Singapore, 1997.
- [89] Fama C, Matthews K. Linear Algebra I, Lecture Notes MP274. Queensland: Department of Mathe-

- ematics, The University of Queensland, 1991.
- [90] Luenberger D G. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12: 290—293.
- [91] Brunovsky P. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika (Praha)*, 1970, 3: 173—187.
- [92] Miu D K, Tai Y C. Silicon micromachined SCALED technology. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 234—239.
- [93] Chen B M, Weller S R. Mappings of the finite and infinite zero structures and invertibility structures of general linear multivariable systems under the bilinear transformation. *Automatica*, 1998, 34: 111—124.
- [94] Åström K J, Wittenmark B. *Computer Controlled Systems; Theory and Design*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1984.
- [95] Franklin G F, Powell J D, Workman M L. *Digital Control of Dynamic Systems*. Reading: Addison-Wesley, 1990.
- [96] Åström K J, Hagander P, Sternby J. Zeros of sampled systems. *Automatica*, 1984, 20: 21—38.
- [97] Grizzle J W, Shor M H. Sampling, infinite zeros and decoupling of linear systems. *Automatica*, 1988, 24: 387—396.
- [98] Stoorvogel A A, Trentelman H L. The quadratic matrix inequality in singular H_∞ -control with state feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1990, 28: 1190—1208.
- [99] Hinrichsen D, Pritchard A J. Real and complex stability radii; A survey. *Proceedings of an International Workshop, Bremen*, 1989: 119—162.
- [100] Vidyasagar M. *Control System Synthesis; A Factorization Approach*. Cambridge: MIT Press, 1985.
- [101] Chan S W, Goodwin G C, Sin K S. Convergence properties of the Riccati difference equation in optimal filtering of nonstabilizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, 29: 110—118.
- [102] Kučera V. The discrete Riccati equation of optimal control. *Kybernetika*, 1972, 8: 430—447.
- [103] Lancaster P, Ran A C M, Rodman L. State space approach to discrete time H_∞ control. *International Journal of Control*, 1986, 44: 777—802.
- [104] Pappas T, Laub A J, Sandell Jr N R. On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, 25: 631—641.
- [105] Ran A C M, Vreugdenhill R. Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete- time systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 1988, 99: 63—83.
- [106] Silverman L M. Discrete Riccati equations; Alternative algorithms, asymptotic properties, and system theory interpretations. *Control and Dynamical Systems*, 1976, 12: 313—386.
- [107] Iglesias P A, Glover K. State space approach to discrete time H_∞ control. *International Journal of Control*, 1991, 54: 1031—1073.
- [108] Limebeer D J N, Green M, Walker D. Discrete time H_∞ control. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, 1989: 392—396.
- [109] Chen B M, Saberi A, Shāmah Y. A non-recursive method for solving the general discrete time algebraic Riccati equation related to the H_∞ control problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4: 503—519.
- [110] Laub A J. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24: 913—921.
- [111] Chen B M. Exact computation of infimum for a class of continuous-time H_∞ optimal control problem

- with a nonzero direct feedthrough term from the disturbance input to the controlled output. *Systems & Control Letters*, 1997, 32: 99—109.
- [112] Chen B M, Saberi A. Non-iterative computation of infimum in H_∞ -optimization for plants with invariant zeros on the $j\omega$ axis. *IEE Proceedings—Part D: Control Theory and Applications*, 1993, 140: 298—304.
- [113] Chen B M, Saberi A, Ly U. Exact computation of the infimum in H_∞ -optimization via state feedback. *Control Theory and Advanced Technology*, 1992, 8: 17—35.
- [114] Chen B M, Saberi A, Ly U. A non-iterative method for computing the infimum in H_∞ -optimization. *International Journal of Control*, 1992, 56: 1399—1418.
- [115] Richardson T J, Kwong R H. On positive definite solutions to the algebraic Riccati equation. *Systems & Control Letters*, 1986, 7: 99—104.
- [116] Saberi A, Sannuti P. Time-scale structure assignment in linear multivariable systems using high-gain feedback. *International Journal of Control*, 1989, 49: 2191—2213.
- [117] Stoorvogel A A, Saberi A, Chen B M. A reduced order observer based controller design for H_∞ -optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39: 355—360.
- [118] Chen B M, Saberi A, Bingulac S, et al. Loop transfer recovery for non-strictly proper plants. *Control Theory and Advanced Technology*, 1990, 6: 573—594.
- [119] Kwakernaak H, Sivan P. *Linear Optimal Control Systems*. New York: John Wiley, 1972.
- [120] Saberi A, Sannuti P. Observer design for loop transfer recovery and for uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35: 878—897.
- [121] Weiland S, Willems J C. Almost disturbance decoupling with internal stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34: 277—286.
- [122] Ozcetin H K, Saberi A, Sannuti P. Design for H_∞ almost disturbance decoupling problem with internal stability via state or measurement feedback—Singular perturbation approach. *International Journal of Control*, 1993, 55: 901—944.
- [123] Ozcetin H K, Saberi A, Shamash Y. H_∞ -almost disturbance decoupling for non-strictly proper systems—A singular perturbation approach. *Control Theory and Advanced Technology*, 1993, 9: 203—245.
- [124] Chen B M, Lin Z, Hang C C. Design for general H_∞ almost disturbance decoupling problem with measurement feedback and internal stability—An eigenstructure assignment approach. *International Journal of Control*, 1998, 71: 653—685.
- [125] Lin Z. Almost disturbance decoupling with global asymptotic stability for nonlinear systems with disturbance affected unstable zero dynamics. *Systems & Control Letters*, 1998, 33: 163—169.
- [126] Lin Z, Bao X, Chen B M. Further results on almost disturbance decoupling with global asymptotic stability for nonlinear systems. *Automatica*, 1999, 35: 709—717.
- [127] Chen B M. Software manual for the special coordinate basis of multivariable linear systems, Washington State University Technical Report No: ECE 0094. Washington: Washington State University, 1988.
- [128] Lin Z. The implementation of special coordinate basis for linear multivariable systems in MATLAB, Washington State University Technical Report No: ECE0100. Washington: Washington State University, 1989.
- [129] Chen B M, Saberi A, Ly U. Closed loop transfer recovery with observer based controllers—Part 1: Analysis. *Control and Dynamic Systems*, 1992, 51: 247—293.
- [130] Chen B M, Saberi A, Ly U. Closed loop transfer recovery with observer based controllers—Part 2: De-

- sign. Control and Dynamic Systems, 1992, 51: 295—348.
- [131] Liu K, Chen B M, Lin Z. On the problem of robust and perfect tracking for linear systems with external disturbances. International Journal of Control, 2001, 74: 158—174.
- [132] Kwakernaak H, Sivan R. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. IEEE Transactions on Automatic Control, 1972, 17: 79—86.
- [133] Francis B A. The optimal linear quadratic time-invariant regulator with cheap control. IEEE Transactions on Automatic Control, 1979, 24: 616—621.
- [134] Kimura H. A new approach to the perfect regulation and the bounded peaking in linear multivariable control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26: 253—270.
- [135] Scherzinger B M, Davison E J. The optimal LQ regulator with cheap control for not strictly proper systems. Optimal Control Applications and Methods, 1985, 6: 291—303.
- [136] Lin Z, Saberi A, Sannuti P, et al. Perfect regulation of linear multivariable systems—A low-and-high-gain design. Proceedings of the Workshop on Advances on Control and Its Applications, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1996, 208: 172—193.
- [137] Chen B M, Liu K, Lin Z. Solvability conditions and solutions to perfect regulation problem under measurement output feedback. Systems & Control Letters, 2000, 40: 269—277.
- [138] Lawrence D A, Rugh W J. Almost perfect tracking for linear systems. Systems & Control Letters, 1991, 17: 281—289.
- [139] Davison E J, Chow S G. Perfect control in linear time-invariant multivariable systems: The control inequality principle//Control System Design by Pole-Zero Assignment. New York: Academic Press, 1977: 1—15.
- [140] Davison E J, Scherzinger B M. Perfect control of the robust servomechanism problem. IEEE Transactions on Automatic Control, 1987, 32: 689—702.
- [141] Chen B M. Direct computation of infimum in discrete-time H_∞ -optimization using measurement feedback. Systems & Control Letters, 1998, 35: 269—278.
- [142] Chen B M, He J, Chen Y L. Explicit solvability conditions for general discrete-time H_∞ almost disturbance decoupling problem with internal stability. International Journal of Systems Science, 1999, 30: 105—115.
- [143] Lin Z, Chen B M. Solutions to general H_∞ almost disturbance decoupling problem with measurement feedback and internal stability for discrete-time systems. Automatica, 2000, 36: 1103—1122.
- [144] Stoorvogel A A, van der Woude J W. The disturbance decoupling problem with measurement feedback and stability for systems with direct feedthrough matrices. Systems & Control Letters, 1991, 17: 217—226.
- [145] Chen B M, Lin Z, Liu K. Robust and perfect tracking of discrete-time systems. Automatica, 2002, 38: 293—299.
- [146] Hanselmann H, Engelke A. LQG-control of a highly resonant disk drive head positioning actuator. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1988, 35: 100—104.
- [147] Weerasooriya S, Phan D T. Discrete-time LQG/LTR design and modeling of a disk drive actuator tracking servo system. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1995, 42: 240—247.
- [148] McCormick J, Horowitz R. A direct adaptive control scheme for disk file servos. Proceedings of the 1993 American Control Conference, San Francisco, 1993: 346—351.

- [149] Goh T B, Li Z, Chen B M, et al. Design and implementation of a hard disk drive servo system using robust and perfect tracking approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9: 221—233.
- [150] Eykhoff P. *System Identification—Parameter and State Estimation*. New York: John Wiley, 1981.
- [151] Goh T B. Development of a dual actuator controller in hard disk drives [Master of Engineering Thesis]. Singapore: Department of Electrical Engineering, National University of Singapore, 1999.
- [152] Chen B M, Lee T H, Peng K, et al. *Hard Disk Drive Servo Systems*. 2nd Edition. New York: Springer, 2006.
- [153] Chen B M, Lee T H, Hang C C, et al. An H_{∞} almost disturbance decoupling robust controller design for a piezoelectric bimorph actuator with hysteresis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, 7: 160—174.
- [154] Low T S, Guo W. Modeling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1995, 4: 230—237.
- [155] Tsuchiura K M, Tsukuba H H, Toride H O, et al. Disk system with sub-actuators for fine head displacement. US Patent No. 5189578, 1993.
- [156] Fan L S, Ottesen H H, Reiley T C, et al. Magnetic recording head positioning at very high track densities using a microactuator based, two stage servo system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42: 222—233.
- [157] Chang T P. Seismic response analysis of nonlinear structures using the stochastic equivalent linearization technique [Ph. D. Dissertation]. New York: Columbia University, 1985.
- [158] Caughey T K. Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation. *Journal of Acoustical Society of America*, 1963, 35: 1683—1692.
- [159] Crandall S T. Perturbation techniques for random vibration of nonlinear systems. *Journal of Acoustical Society of America*, 1963, 35: 1700—1705.
- [160] Lyon R H. Response of a nonlinear string to random excitation. *Journal of Acoustical Society of America*, 1960, 32: 953—960.
- [161] Booton Jr R C. Nonlinear control systems with random inputs. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 1954, 1: 9—18.
- [162] Bigley W J, Rizzo V J. Wideband linear quadratic control of a gyro-stabilized electro-optical sight system. *IEEE Control Systems*, 1987, 7: 20—24.
- [163] Perry J. *Spinning Tops and Gyroscopic Motion*. New York: Dover Publications, 1957.
- [164] Lee T H, Koh E K, Loh M K. Stable adaptive control of multivariable servomechanisms, with application to a passive line-of-sight stabilization system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1996, 43: 98—105.
- [165] Ge S S, Lee T H, Harris C J. *Adaptive Neural Network Control of Robotic Manipulators*. Singapore: World Scientific, 1998.
- [166] Lee M W. An investigation in fuzzy logic [Bachelor of Engineering Thesis]. Singapore: Department of Electrical Engineering, National University of Singapore, 1995.
- [167] Siew B C, Chen B M, Lee T H. Design and implementation of a robust controller for a free gyro-stabilized mirror system. *ASME Transactions-Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*,

1999, 121, 550—556.

- [168] Ng W K. Design considerations of a gyro-stabilized mirror system[Bachelor of Engineering Thesis]. Singapore; Department of Electrical Engineering, National University of Singapore, 1986.

(TP-4919.0101)

系统与amp;控制丛书

广义Hamilton控制系统理论——实现、控制与应用

王玉振

全局工况系统预测控制及其应用

李少远

时滞系统鲁棒控制——自由权矩阵方法

吴敏 何勇

H_∞ 控制及应用

陈本美 席斌

Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems

Min Wu Yong He Jin-Hua She

Analysis and Design of Nonlinear Control Systems

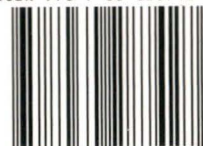
Daizhan Cheng Xiaoming Hu Tielong Shen

科学出版社

电话: 010-64034617

E-mail: gcjs@mail.sciencep.com

ISBN 978-7-03-028742-7



9 787030 287427 >

定价: 68.00 元

销售分类建议: 自动化-控制理论