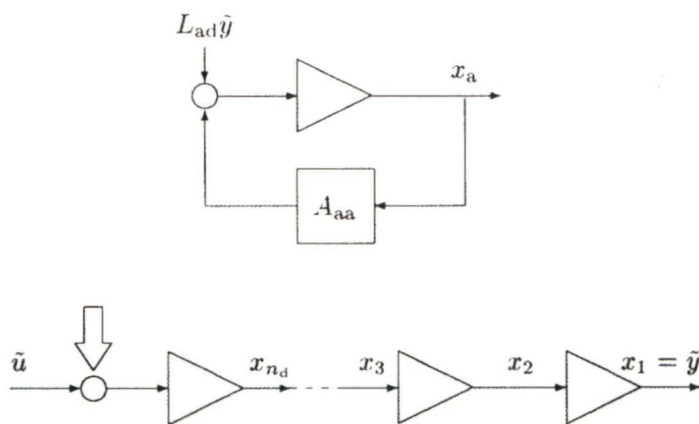


线性系统理论： 结构分解法

Linear Systems Theory:
A Structural Decomposition Approach



Ben M. Chen, Zongli Lin, Yacov Shamash
陈本美 林宗利 雅科夫·司马弼 (著)

席斌 (译)



清华大学出版社

线性系统理论： 结构分解法

Linear Systems Theory:
A Structural Decomposition Approach

Ben M. Chen, Zongli Lin, Yacov Shamash
陈本美 林宗利 雅科夫·司马诰

著

席斌 译

清华大学出版社
北京

北京市版权局著作权合同登记号 图字：01-2007-2423

Translation from the English language edition:

Linear Systems Theory: A Structural Decomposition Approach, by Ben M. Chen, Zongli Lin and Yacov Shamash

Copyright © 2004 Birkhäuser Boston

Birkhäuser is a part of Springer Science+Business Media

All Rights Reserved.

本书中文简体字翻译版由德国施普林格公司授权清华大学出版社在中华人民共和国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区和中国台湾地区)独家出版发行。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论:结构分解法/(新加坡)陈本美,(美)林宗利,(美)司马诒著;席斌译. —北京:清华大学出版社,2008. 2

书名原文: *Linear Systems Theory: A Structural Decomposition Approach*

ISBN 978-7-302-16367-1

I. 线… II. ①陈… ②林… ③司… ④席… III. 线性系统理论 IV. O231.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 168920 号

责任编辑:王一玲

责任校对:白蕾

责任印制:孟凡玉

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175 邮购热线:010-62786544

投稿咨询:010-62772015 客户服务:010-62776969

印刷者:清华大学印刷厂

装订者:三河市溧源装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:175×245 印 张:22.25 字 数:479 千字

版 次:2008 年 2 月第 1 版 印 次:2008 年 2 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:39.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:025697-01

此书谨献给我们的家人

前两位作者谨以这中译版献给
他们的母校——厦门大学

序

在控制理论的学科领域,线性系统理论是一门发展最为成熟和研究最为充分的分支学科。线性系统理论,以其学科上的最具基础性、体系上的最具系统性和应用上的最具实用性,长期以来始终在控制理论的教学与研究中处于重要的位置。随着所采用的分析工具和所采用的系统描述的不同,在线性系统理论中相继创立和形成了影响较大和各具特色的几个分支,包括“线性系统的状态空间法”、“线性系统的几何理论”、“线性系统的代数理论”和“线性系统的多变量频域方法”等,通常认为它们以不同的研究工具和方法构成了线性系统理论中的几个主要学派。陈本美(Ben M. Chen)等三位教授的这本著作的英文版《Linear Systems Theory: A Structural Decomposition Approach》在2004年由Birkhäuser出版社出版,本书的出版可以说意味着线性系统理论中一个新分支或新学派“线性系统的结构分解法”的面世和形成。

本书的核心内容是对线性系统引入和应用一种特定的和巧妙的系统结构变换,使之对系统结构实现按“有限零点结构、左右可逆结构以及无限零点结构”的全面分解,并系统地建立和发展了分析和综合线性系统的较为完整的方法,论述严谨详细,方法统一实用,尽管表达形式看起来会比较复杂一些,但全书注重突出各个变换阵的构造原则和构造方法,使相应部分的内容仍然具有很好的可读性和可理解性。这种结构分解法之所以有效和重要,就在于它能提供实际的可能性和方便的手段,使可以同时从结构上有效地研究线性控制系统的稳定性、性能和鲁棒性,本书的内容充分表明这种系统结构分解法在适用领域上的广泛性和系统分析与综合上的方便性。一个明显的例子是,如本书中的定理10.2.2所揭示的那样,在这种结构分解架构下,可以简单明了地揭示出先前被分别独立研究的 H_2 控制和 H_∞ 控制以及扰动解耦控制之间的内在关系。尽管本书的框架总体上仍然是建立在线性系统的状态空间描述的基础上的,但相比于线性系统理论的已有学派,如“线性系统的状态空间法”、“线性系统的几何方法”、“线性系统的多变量频域方法”等,“线性系统的结构分解法”具有方法统一性、工程直观性和易于在计算机上实现计算等重要优点。

本书的框架、内容和体系大都源自于作者及其合作者多年来在本领域的持续研究成果。还是在陈本美教授20世纪80年代末在华盛顿州立大学攻读博士学位期间,他就已经注意到对线性系统的这种特定的和巧妙的系统结构变换,为此开发了相应的软件工具箱,开始了“线性系统的结构分解法”的研究,并将这种方法开创性地拓展应用到其他控制领域,如 H_2 控制和 H_∞ 控制等。我和陈本美教授相识于1993年上半年,那时他刚刚在纽约州立大学石溪分校电机系任教不久,而我恰好是第二次去该系从事访问研究,他的为

人豪爽仗义和为学严谨朴实给我很深的印象,于是就此相识、相知,并从此建立了深厚的友谊,即便不久他出于朴素的感情转去新加坡国立大学任教后,彼此之间也一直保持着紧密的联系。也正是从那个时候起,我开始知道和了解了线性系统的这种特定的和巧妙的系统结构变换,并开始认识到这种特定系统结构变换在应用领域上的广泛性和系统分析综合上的有效性。2003年初,陈本美等三位教授完成了本书英文版的手稿,并邀请我对书稿进行审读。我对此书的体系和方法很是欣赏和振奋,除提了一些细节性的意见和建议外,最为令人高兴的一个直觉是这或许意味着线性系统理论中一个新分支或新学派“线性系统的结构分解法”的形成。现在,在陈本美教授的直接指导下,本书的中文版得以高质量地翻译完成并顺利出版,使得更多的国内同行和读者能有机会认识和使用线性系统的这种特定的和巧妙的系统结构变换,认识和使用线性系统的结构分解法,感受这种系统结构分解法在适用领域上的广泛性和系统分析与综合上的方便性,并还将由此吸引更多研究者的参与,以推动这种方法的进一步发展与开拓。我想,这也必将是出版本书中文版所会激发的效应,而这想必同时也正是本书的三位作者们所期望的。

在本书中文版出版之际,作为本书第一作者和我多年好友的陈本美教授,一再嘱咐我务必为本书中文版写一个序,我自知才疏学浅,推辞未果,思考再三,权且写成上面一些文字以为序。

郑大钟 教授

2007年7月于北京清华大学

前 言

系统的结构特性对我们理解以状态空间表示的线性系统起着重要作用。线性系统的结构化规范形表示不仅揭示了系统的结构特性,而且能使各种反馈控制策略的设计更为便利。具体地说,结构化规范形将系统分解成各种子系统,这些子系统以及它们之间存在的相互内在联系清晰地显示了系统的结构特性。子系统的简洁性和相互之间的显式连接,使我们能够更深入地理解反馈控制对整体控制系统所产生的作用,从而能够清晰地构造满足设计目标的反馈律。系统结构化规范形在反馈控制设计中的应用及研究已有相当长的历史。近来,结构分解的优点已经非常广泛和深入地应用在非线性系统控制理论中。

本书的目的是系统地给出线性系统的各种规范分解、清晰地显示系统的不同结构特性、对在系统分析和设计方面应用的最新进展情况进行综述。我们所考虑的系统将包括自治系统,它的内在特性完全由代表其动态特性的矩阵决定;无驱动或无检测系统,它的内在特性由一对矩阵确定,一个是代表内部动态的矩阵,另一个是测量或控制矩阵;还有正则系统,它的内在特性由一个矩阵三元组或矩阵四元组来决定。我们也将考虑线性奇异系统,它的结构特性由一个矩阵五元组决定。所有的结果都分别以连续时间和离散时间形式给出。同时,也建立在双线性变换下连续时间系统和离散时间系统的结构特性之间的相互关系。

本书面向的读者包括研究生、从事控制应用的工程师,以及系统和控制工程相关领域的研究人员。在本书的撰写过程中,我们力图达到自成一体。所以,在本书的开始部分,全面回顾了从矩阵理论到线性系统理论的各种主题。尽管如此,读者还是需要些线性代数、线性系统和控制理论的基础知识。

前两位作者要对已故的华盛顿州立大学教授 Chin S. Hsu 表达深深的谢意,作者在华盛顿州立大学求学时得到了他的热心帮助,他的线性系统理论课程生动且有趣。第 3 章的一些练习题就是来自于他所布置的课后练习和测试题。前两位作者还要感谢华盛顿州立大学的 Ali Saberi 教授和美国新泽西州罗特格斯大学的 Pedda Sannuti 教授,作者在华盛顿州立大学攻读博士学位期间得到了他们的严谨指导,是他们把我们引入了线性系统特殊坐标基(SCB)理论,这是本书的关键部分。第三位作者要感谢 Ali Saberi 教授,是他把作者引入了这个研究方向并且有早期的合作。第一位作者要特别感谢 Pedda Sannuti 教授在撰写科学专著方面所给予的无价指导。第二位作者还要感谢北京控制工程研究所的严拱添老师,他对作者在矩阵理论和线性系统理论方面进行了严格的训练。

新加坡国立大学的刘新民先生为本书的 MATLAB 工具箱的完成做出了贡献,清华大学郑大钟教授在书稿的校正方面提供了帮助,我们谨表万分谢意。我们还要感谢新加

坡国立大学的储德林教授、彭可茂博士、程国杨博士、何英杰博士和何明华博士。我们和新加坡国立大学的李崇兴教授、美国得克萨斯州阿灵顿得克萨斯大学的 Frank L. Lewis 教授、澳大利亚墨尔本大学的 Iven Mareels 教授、加拿大西蒙弗雷泽大学的 Mehrdad Saif 教授有过许多有益的学术讨论，在此表示感谢。感谢新加坡国立大学、弗吉尼亚大学、纽约州立大学石溪分校为我们各自的基础研究工作提供了优越的环境。

系列丛书的主编 William S. Levine 教授对我们完成这本书给予了热情的鼓励。我们还要感谢 Birkhäuser 的编辑们，特别是 Thomas Grasso 先生和 Seth Barnes 先生对我们的编辑工作所提供的宝贵帮助。

最后，我们要强调，书中所包括的每个算法都已经包含在 MATLAB 环境下的线性系统工具箱中。读者可以在 <http://linearsystemskit.net> (或 <http://hdd.ece.nus.edu.sg/~bmchen/>) 上得到工具箱的 beta 版本。这个工具箱将极有助于理解书中各种分析和设计算法的应用。对于那些已经有早期版本的有兴趣的读者，即由 Chen (1988)^[17]、Lin (1989)^[84] 和 Lin 等 (1991)^[90] 所报道的特殊坐标基 (SCB) 实现软件，我们建议更新到最新版的工具箱。特殊坐标基 (SCB) 是本书所包括的结构化分解技术之一，新版的工具箱是基于 Chu 等 (2002)^[36] 最近发表的更加稳定的数值计算方法，以及本书中所介绍的新方法来实行的。

本书是作者采用 LATEX 排版。所有的仿真和数值计算由 MATLAB 完成。插图则由 LINUX 中的 XFIG 和 MATLAB 中的 SIMULINK 所生成的。

陈本美，新加坡肯特冈

林宗利，美国弗吉尼亚州夏城

雅科夫·司马诩，美国纽约州石溪

2004 年 6 月

目 录

第 1 章 导论和预览	1
1.1 背景	1
1.2 各章预览	2
1.3 符号和术语	4
第 2 章 数学基础	7
2.1 导论	7
2.2 向量空间和子空间	7
2.3 矩阵代数和特性	9
2.3.1 行列式、逆和求导	9
2.3.2 秩、特征值和 Jordan 形	11
2.3.3 特殊矩阵	14
2.3.4 奇异值分解	17
2.4 范数.....	19
2.4.1 向量范数	19
2.4.2 矩阵范数	20
2.4.3 连续时间信号范数	20
2.4.4 离散时间信号范数	21
2.4.5 连续时间系统范数	21
2.4.6 离散时间系统范数	22
第 3 章 线性系统理论复习	23
3.1 导论.....	23
3.2 动态响应.....	24
3.3 系统稳定性.....	26
3.4 可控性和可观性.....	29
3.5 系统可逆性.....	35
3.6 常态秩、有限零点和无限零点	37
3.7 几何子空间.....	42

3.8	状态反馈和输出馈入的特性	46
3.9	练习	49
第4章	无驱动和/或无检测系统的分解	53
4.1	导论	53
4.2	自治系统	53
4.3	无驱动系统	61
4.4	无检测系统	75
4.5	练习	82
第5章	正则系统的分解	85
5.1	导论	85
5.2	SISO 系统	85
5.3	严格正则系统	93
5.4	非严格正则系统	127
5.5	结构化分解性质的证明	136
5.6	系统矩阵的 Kronecker 形和 Smith 形	146
5.7	离散时间系统	152
5.8	练习	154
第6章	奇异系统的分解	158
6.1	导论	158
6.2	SISO 奇异系统	161
6.3	MIMO 奇异系统	168
6.4	定理 6.3.1 和性质的证明	174
6.5	离散时间奇异系统	186
6.6	练习	188
第7章	双线性变换下结构特性的映射	191
7.1	导论	191
7.2	连续时间系统到离散时间系统的映射	192
7.3	离散时间系统到连续时间系统的映射	197
7.4	定理 7.2.1 的证明	202

7.5 练习	214
第 8 章 系统因子分解	216
8.1 导论	216
8.2 严格正则系统	217
8.3 非严格正则系统	225
8.4 离散时间系统	233
8.5 练习	238
第 9 章 通过选择传感器/执行器实现的结构配置	240
9.1 导论	240
9.2 有限和无限零点结构的同时配置	241
9.2.1 SISO 系统	241
9.2.2 MIMO 系统	244
9.3 完全结构配置	248
9.4 练习	258
第 10 章 通过状态反馈实现时标和特征结构配置	261
10.1 导论	261
10.2 连续时间系统	261
10.2.1 设计步骤和基本特性	262
10.2.2 H_2 控制、 H_∞ 控制和干扰解耦	271
10.3 离散时间系统	276
10.3.1 设计步骤和基本特性	277
10.3.2 H_2 控制、 H_∞ 控制和干扰解耦	279
10.4 练习	280
第 11 章 静态输出反馈下的干扰解耦	283
11.1 导论	283
11.2 左可逆系统	284
11.3 一般多变量系统	289
11.4 练习	302
第 12 章 软件工具箱	304
12.1 导论	304

12.2	m 函数描述	307
12.2.1	自治系统的分解	307
12.2.2	无驱动和无检测系统的分解	308
12.2.3	正则系统的分解和性质	311
12.2.4	向量空间的运算	316
12.2.5	奇异系统的分解和性质	316
12.2.6	系统因子分解	318
12.2.7	通过选择传感器/执行器实现结构配置	320
12.2.8	具有特征结构配置的状态反馈控制	320
12.2.9	静态输出反馈下的干扰解耦	325
参考文献		327
索引		336

第 1 章 导论和预览

1.1 背景

线性系统的状态空间表示是动态系统分析和设计的基础,现代控制理论就建立在系统的状态空间这个概念的基石之上,状态空间可以很好地揭示动态系统的本质特性。自从引入状态的概念以后,在状态空间的框架下对线性系统的研究就一直非常活跃,研究主题涵盖甚广,从稳定性、可观性、可控性、冗余性和最小性等系统基本概念,到更为精细的有限和无限零点结构、可逆性和几何子空间。对线性系统的深层次理解促进了现代控制理论的发展,反过来,对现代控制理论的迫切期待则要求我们了解和应用线性系统中更微妙的特性。

线性系统理论的重要性,以及与此相关的活跃研究可以从持续不断出版的线性系统理论教科书和专著中得到佐证,如 Kalman 和他的合作者^[66,71-73], Gilbert^[58], Zadeh 和 Desoer^[157]所发表的有关状态空间的可控性、可观性和稳定性及其相关主题的经典著作。Naidu^[103]最近对在各个不同时期出版的线性系统理论书籍进行了全面的述评。在 20 世纪 60 和 70 年代出版的几本早期著作是 DeRusso 等 (1965)^[47], Ogata (1967)^[104], Brockett (1970)^[14], Chen (1970)^[32], Rosenbrock (1970)^[112], Blackman (1977)^[13]。对于 20 世纪 80 年代以来的线性系统理论,比较新的著作有 Kailath (1980)^[70], McClamroch (1980)^[98], Chen (1984)^[33], DeCarlo (1989)^[46], Sontag (1990)^[132], Antoulas (1991)^[3], Callier 和 Desoer (1991)^[16], Rugh (1996)^[114], Antsaklis 和 Michel (1997)^[4], DeRusso (1998)^[48], Sontag (1998)^[133], Bay (1999)^[10], Chen (1999)^[34], Aplevich (2000)^[5] 和 Trentelman 等 (2001)^[141]。

这些书采用不同的方法呈现了线性系统理论的基本要素和反映该领域的最新进展,而本书是采用结构分解的方法研究线性时不变系统。结构分解并不是一个新的概念,在现有的许多线性系统理论教科书中都可以找到多种结构分解。状态空间表示下的线性时不变系统的基本特性都可以用系数矩阵来表述,如稳定性、可控性和可观性。对于一个可控的系统,控制信号在内部如何到达系统的不同部分,就可用可控性指数来表示。可控性指数是一个在状态变换下保持不变的结构特性。选择适当的状态变换,就可以把系统表示成所谓可控规范形。在此规范形下,可控性指数便一目了然,镇定的反馈控制律的设计也相当直截了当。可控规范形的表示就是一种结构分解,它揭示了系统的可控性指数。

在线性系统理论教科书中还能找到其他的结构分解的例子,包括可观规范形(揭示了可观性指数)和 Kalman 分解(揭示系统可控和可观模态)。

上面的结构化分解方法在状态观测和镇定方面显示了很好的功效。然而,当对控制问题的研究不局限在镇定和状态观测时,我们需要更深入地了解比可控性和可观性更加精细的结构特性,如有限零点结构、无限零点结构及系统可逆性结构等。此类精细特性和 H_2 与 H_∞ 的最优控制理论密切相关,所以线性系统的各种结构化特性以及它们在控制系统分析和设计中的应用必然引起人们的很大研究兴趣。正因如此,我们有必要简单回顾一下线性系统结构分解技术的发展历史。就我们所知,首先在动态系统中应用结构分解概念解决除稳定性以外问题的是研究高增益和低成本(Cheap)控制问题(见 Sannuti^[121])。Sannuti^[121]在讨论高增益和低成本控制的重要特性时,通过分离我们所知道的一致秩(uniform rank)及系统的有限和无限零点结构,证明了利用特殊坐标基(SCB)这样一种分解方法的优越性。后来,Sannuti 和 Wason^[123]把特殊坐标基(SCB)的概念推广到了一般的可逆系统,并建立了和多变量根轨迹理论的重要联系。通过利用并改进 Silverman^[131]的结构算法,Sannuti 和 Saberi^[122],Saberi 和 Sannuti^[119]奠定了一般线性多变量系统特殊坐标基(SCB)的概念。特殊坐标基(SCB)在结构上与 Aling 和 Schumacher^[2]的九重规范分解十分相似,两者都可辨别出系统的重要特性,如几何控制理论中的子空间及其相关的特性以及 Morse^[100]指数。然而,在文献[122,119]的原文中,关于特殊坐标基(SCB)的所有特性并没有给出详细的证明。Chen^[21]最近完善了该理论,在一般严格和非严格正则系统特殊坐标基(SCB)的框架下,文献[21]对所有特殊坐标基(SCB)的特性都进行了严格的证明。最近,He 和 Chen^[64],He、Chen 和 Lin^[65]进一步把该技术推广到奇异系统。在过去的几年中,我们和我们的合作者一起对结构特性进行了系统的研究,并且展示了结构分解在解决大量控制问题中的应用。我们在线性系统和控制理论方面的研究成果虽已自成一体,但大多散落在诸多不同的文献之中,本书的目的是把这些成果聚集在一起,统一在同一框架之下。

1.2 各章预览

本书共分 12 章,可以划分为 3 个部分。第 1 部分是第 1 章~第 3 章,涉及本书所需的背景材料,即线性系统理论的基础内容。第 1 章是本书的导论,同时也给出本书所用的符号和术语,第 2 章汇集了矩阵理论的一些基本结果,第 3 章总结了线性系统理论的基本结论。第 2 章和第 3 章一起构成了本书所需的背景材料。

本书的第 2 部分是第 4 章~第 7 章,我们给出了连续时间和离散时间线性系统的各种结构分解,在结构分解的基础上研究了系统各种复杂的特性。具体地说,第 4 章给出了无驱动和/或无检测系统的结构分解。对于既无驱动又无检测的系统,即自治系统,结构

特性主要集中在系统稳定性上,它包括了稳定性结构分解(SSD),即系统被分解成稳定和
不稳定动态以及和虚轴极点相关联的动态,和实 Jordan 分解(RJD)。和书中其他的分解
一样,我们始终突出分解方法的数值稳定性。对于无驱动系统,将给出两种结构分解,即
可观结构分解(OSD)和块对角可观结构分解(BDOSD)。对于无检测系统,我们也可以对
偶地给出两种分解,即可控性结构分解(CSD)和块对角可控性结构分解(BDCSD)。无驱
动和/或无检测系统的这些分解在控制系统中得到了许多应用,包括在第9章中讨论的传
感器/执行器的配置问题。

第5章和第6章分别是对正则线性系统和奇异系统的结构分解。正则线性系统结构
分解的核心是由 Sannuti 和 Saberi^[122]提出的特殊坐标基(SCB)。对于严格正则系统,特
殊坐标基(SCB)与 Aling 和 Schumacher^[2]提出的九重规范分解基本类似。这些结构分解
展示了线性系统的各种结构特性,包括有限和无限零点结构、系统可逆性和几何子空间。
正则系统的结构分解在解决许多控制问题中发挥了很大的作用,包括在第8章~第11章
提出的一些控制问题。同样,我们相信,第6章有关奇异系统的结构分解,在奇异系统的
控制问题中也将发挥相似的作用。

第7章研究了在双线性变换下的系统结构特性。双线性和逆双线性变换被广泛应
用在数字控制和信号处理中,在解决 H_∞ 控制问题时也发挥了重要作用。实际上,工
程中的许多问题,包括采样控制系统设计和数字信号处理,都需要进行连续时间到离散时
间模型的转换。因此有大量离散化方法,包括零阶和一阶保持器的输入近似、脉冲不变变
换和双线性变换。在这一章中,我们将以清晰和易于理解的方式给出在双线性(逆双
线性)变换下,一般的连续时间系统(离散时间系统)的结构特性是如何变换到离散时间系
统(连续时间系统)下的,即有限和无限零点结构、可逆结构以及几何子空间之间的变换。

本书的余下部分是第4章~第7章中的结构分解在线性控制系统分析和设计中的几
个应用。

第8章给出了一般线性系统的两种系统因子分解的算法,一个是最小相位和全通串
级因子分解,众所周知的内外因子分解是它的一个特例;另一个是广义串级因子分解。
这些因子分解在电气工程的许多领域都有重要的应用,包括系统和控制分析与设计。特
别是最小相位和全通串级因子分解,把一个非最小相位和非左可逆的系统分解成一个具
有最小相位左可逆的系统与一个具有单位增益的、稳定的全通系统的串联。我们的算法
表明,对于一个给定系统,一旦对它采用了第5章的结构分解,就可以轻而易举地得到这
些串级因子分解,其中包括内外因子分解。

第9章研究了对于一个给定的线性系统进行结构特性配置的可能性,导出了可以产
生各种结构特性的传感器矩阵集合。众所周知,把 H_2 和 H_∞ 这些多变量控制系统综合
技术应用到实际中去的一个主要困难,是对控制性能和实际实施之间的联系缺乏研究,包
括硬件的选配,如选择能够满足鲁棒性和控制性能要求的传感器。这种联系提供了在控
制对象设计初始阶段就可以进行各种权衡的基础,因此人们可以尽早地把精心的控制设

计融合到全面的工程设计中。

第 10 章研究了渐进时标配置问题。基于一个给定系统的结构分解,我们给出一个系统化的反馈律设计方法,使得闭环系统具有预先设定的特征结构。这个时标配置的关键在于充分利用了系统结构分解所得到的各种子系统,正如结构分解所揭示的那样,这些子系统代表了系统的有限和无限零点结构,以及可逆结构。诸多成果表明,时标配置技术对许多现代控制问题,如 H_∞ 控制、 H_2 控制、回路传递函数恢复和干扰解耦问题起着至关重要的作用。

第 11 章论证了在静态测量输出反馈下的干扰解耦问题(包括有或没有内稳定的情况)。过去 30 年来,很多学者对干扰解耦问题已经有了很深入的研究,也由此推动了几何方法在线性系统和控制理论中的应用,在一些重要问题中,如分散(decentralized)控制、非交互(noninteracting)控制、模型参考跟踪控制和 H_∞ 控制中扮演了关键的角色。对于定常或静态测量输出反馈下的干扰解耦问题,文献所载甚少。借助于系统的结构分解,这一章推导了在静态测量输出反馈下,干扰解耦问题的可解性条件,对于从控制输入到被控输出具有左可逆传递函数的一类系统,我们给出了所有可能的解。对于一般的系统,根据第 5 章的结构分解技术,我们先从给定的系统得到不可简约的降阶系统,然后再导出静态测量输出反馈下干扰解耦问题的解。

第 12 章包括了实现本书所有分析和设计算法的 MATLAB 工具箱。该工具箱的 beta 版本可在 <http://linearsystemskit.net> 或 <http://hdd.ece.nus.edu.sg/~bmchen/> 上免费下载。

1.3 符号和术语

全书将采用以下符号和术语:

\mathbb{R} := 实数集合,

\mathbb{R}_+ := 非负实数的集合,

\mathbb{N} := 自然数的集合,即 $0, 1, 2, \dots$

\mathbb{C} := 整个复平面,

\mathbb{K} := 和一个矢量空间相关联的标量域,

\mathbb{C}° := 复平面上的单位圆,

\mathbb{C}° := 在单位圆内的复数集合,

\mathbb{C}^\ominus := 在单位圆外的复数集合,

\mathbb{C}^j := 复平面上的虚轴,

\mathbb{C}^- := 开左半复平面,

- \mathbb{C}^+ := 开右半复平面,
 $\operatorname{Re} \alpha$:= 标量 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的实部,
 $\operatorname{Im} \alpha$:= 标量 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的虚部,
 α^* := 标量 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的复共轭,
 0 := 零标量、零向量或零矩阵,
 \emptyset := 空集合,
 I := 具有一定维数的单位矩阵,
 I_k := $k \times k$ 的单位矩阵,
 $\operatorname{diag}\{\cdots\}$:= 对角矩阵,
 $\operatorname{blkdiag}\{\cdots\}$:= 块对角矩阵,
 $X = [x_{ij}]$:= 元素为 x_{ij} 的矩阵 X ,
 X' := 矩阵 X 的转置,
 X^H := 矩阵 X 的共轭转置,
 $\det(X)$:= 矩阵 X 的行列式,
 $\operatorname{rank}(X)$:= 矩阵 X 的秩,
 $\operatorname{normrank}(X)$:= 有理矩阵 X 的常态秩,
 $\operatorname{trace}(X)$:= 矩阵 X 的迹,
 $\operatorname{cond}(X)$:= 矩阵 X 的条件数,
 X^+ := 矩阵 X 的 Moore-Penrose(伪)逆,
 $\lambda_i(X)$:= 矩阵 X 的第 i 个特征值,
 $\lambda_{\min}(X)$:= $\lambda(X) \subset \mathbb{R}$ 的矩阵 X 的最小特征值,
 $\lambda_{\max}(X)$:= $\lambda(X) \subset \mathbb{R}$ 的矩阵 X 的最大特征值,
 $\lambda(X)$:= 矩阵 X 的特征值集合,
 $\rho(X)$:= 矩阵 X 的谱半径,
 $\sigma_i(X)$:= 矩阵 X 的第 i 个奇异值,
 $\sigma_{\min}(X)$:= 矩阵 X 的最小奇异值,
 $\sigma_{\max}(X)$:= 矩阵 X 的最大奇异值,
 $\operatorname{im}(X)$:= 矩阵 X 的像或值域空间,
 $\ker(X)$:= 矩阵 X 的核或零空间,
 \mathcal{X} := 向量空间或子空间,
 $\dim(\mathcal{X})$:= 子空间 \mathcal{X} 的维数,
 \mathcal{X}^\perp := 子空间 \mathcal{X} 的正交补空间,
 $C^{-1}\{\mathcal{X}\}$:= 子空间 \mathcal{X} 在映射 C 下的逆像,

$\mathcal{X}/\mathcal{V} :=$ 空间 \mathcal{X} 对子空间 \mathcal{V} 取模的商空间,

$\oplus :=$ 矢量子空间的直和,

$\langle x, y \rangle :=$ 两个矢量 x 和 y 的内积,

$\| \cdot \| :=$ 范数,

$\| x \|_p :=$ 矢量 x 的 p 范数, $p \in [1, \infty]$,

$|x| :=$ 矢量 x 的 Euclidean 范数,

$\| X \|_p :=$ 矩阵 X 的 p 范数,

$\| X \|_F :=$ 矩阵 X 的 Frobenius 范数,

$\| g \|_p :=$ 信号 $g(t)$ 或 $g(k)$ 的 l_p 范数,

$L_p :=$ 所有 l_p 范数有限的函数集合,

$\| G \|_2 :=$ 稳定系统 $G(s)$ 或 $G(z)$ 的 H_2 范数,

$\| G \|_\infty :=$ 稳定系统 $G(s)$ 或 $G(z)$ 的 H_∞ 范数,

$\Sigma :=$ 一个连续或离散时间系统,

$P_\Sigma(s) :=$ Σ 的系统矩阵,

$\mathbf{I}_i(\Sigma) :=$ Morse 不变列, $i=1, 2, 3, 4$,

$S_\beta^*(\Sigma) :=$ Σ 的有限零点 β 的零点结构,

$S_\infty^*(\Sigma) :=$ Σ 的无限零点结构,

$S_R^*(\Sigma) :=$ Σ 的右可逆结构,

$S_L^*(\Sigma) :=$ Σ 的左可逆结构,

$\mathcal{V}^*(\Sigma) :=$ Σ 的弱不可观子空间,

$\mathcal{S}^*(\Sigma) :=$ Σ 的强可控子空间,

$\mathcal{R}^*(\Sigma) :=$ Σ 的可控弱不可观子空间,

$\mathcal{N}^*(\Sigma) :=$ Σ 的分布的弱不可观子空间,

最后, 符号 \blacksquare 表示证明的结束。

第2章 数学基础

2.1 导论

我们在这一章里要回顾一些必要的数学背景知识,包括矢量空间和矩阵理论的一些基本内容,以及矢量、矩阵、信号和有理传递函数的各种范数的定义和性质。这些内容对后面章节的研究和学习都十分有用。这些方面的更加详细的论述可以在专门的数学教科书,或其他线性系统和控制理论教科书中找到(可参见 Barnett^[8], Chen^[22], Chen^[33], Desoer 和 Vidyasagar^[49], Golub 和 Van Loan^[59], Huang^[68], Kailath^[70], Kreyszig^[78], Saberi 等^[120], Suda 等^[138], Trentelman 等^[141], Wielandt^[150] 和 Wonham^[154])。

2.2 矢量空间和子空间

我们假设读者对标量域和矢量空间的基本定义已有所了解。

令 \mathcal{X} 为一个标量域 \mathbb{K} 上的矢量空间。若 S 是 \mathcal{X} 的子集,并且它本身是在域 \mathbb{K} 上的矢量空间,则称 S 是 \mathcal{X} 的子空间。子空间 S 的维数用 $\dim S$ 表示,就是 S 中可能最大的线性独立的矢量个数。

矢量 $s_1, s_2, \dots, s_k \in S, k = \dim S$, 如果它们是线性独立的,即只有在 $\alpha_i = 0$ 时有 $\sum_{i=1}^k \alpha_i s_i = 0$ 成立,则称该组矢量形成 S 的一个基。如果 $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{0\}$, 则称两个子空间 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 是独立的。

我们在全书中只用到两个常用的矢量空间,即 \mathbb{R}^n (标量域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) 和 \mathbb{C}^n (标量域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), 以及它们的子空间。所以两个矢量的内积,比如说 x 和 y , 既可以在 \mathbb{R}^n 中,也可以在 \mathbb{C}^n 中,定义为

$$\langle x, y \rangle = x^H y = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \dots + x_n^* y_n, \quad (2.2.1)$$

其中, x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 分别为 x 和 y 中的分量。 x^H 是 x 的复共轭转置, x_i^* 是 x_i 的复共轭。如果 $\langle x, y \rangle = 0$, 则矢量 x 和 y 是正交的。

下面我们回顾矢量空间和子空间中的一些常用概念和性质。

定义 2.2.1 (子空间的和) 令 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 为矢量空间 \mathcal{X} 的子空间, 则子空间 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 的和定

义为

$$S = \mathcal{V} + \mathcal{W} := \{v + w \mid v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}\}. \quad (2.2.2)$$

如果 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 是独立的, S 也称为 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 的直和,用 $S = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ 来表示。显然,在两种情况下, S 都是 \mathcal{X} 的子空间。

定义 2.2.2 (正交补子空间) 令 \mathcal{V} 是向量空间 \mathcal{X} 的一个子空间,则 \mathcal{V} 的正交补定义为

$$\mathcal{V}^\perp := \{x \in \mathcal{X} \mid \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in \mathcal{V}\}. \quad (2.2.3)$$

\mathcal{V}^\perp 同样是 \mathcal{X} 的一个子空间。

定义 2.2.3 (商空间和余维(codimension)) 令 \mathcal{V} 是向量空间 \mathcal{X} 的一个子空间, $x + \mathcal{V}$ 表示一个元素 $x \in \mathcal{X}$ 关于 \mathcal{V} 的陪集(coset),它的定义为

$$x + \mathcal{V} := \{w \mid w = x + v, v \in \mathcal{V}\}. \quad (2.2.4)$$

它的代数运算定义为

$$(w + \mathcal{V}) + (x + \mathcal{V}) = (w + x) + \mathcal{V} \quad (2.2.5)$$

和

$$\alpha(w + \mathcal{V}) = \alpha w + \mathcal{V}, \quad (2.2.6)$$

可以直接证明,陪集构成了向量空间的元素。所产生的空间叫做 \mathcal{X} 关于 \mathcal{V} (或对 \mathcal{V} 取模)的商空间(quotient space)或因素空间(factor space),用 \mathcal{X}/\mathcal{V} 来表示。它的维数叫做 \mathcal{V} 的余维,用 $\text{codim } \mathcal{V}$ 表示,

$$\text{codim } \mathcal{V} = \dim \mathcal{X}/\mathcal{V} = \dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{V}. \quad (2.2.7)$$

注意 \mathcal{X}/\mathcal{V} 并不是 \mathcal{X} 的子空间,除非 $\mathcal{V} = \{0\}$ 。

定义 2.2.4 (矩阵的核和像) 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (或 $\mathbb{R}^{m \times n}$),即一个从 $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$ (或 \mathbb{R}^n)到 $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^m$ (或 \mathbb{R}^m)的线性映射,则 A 的核或零空间定义为

$$\ker(A) := \{x \in \mathcal{X} \mid Ax = 0\}, \quad (2.2.8)$$

A 的像空间或值域空间定义为

$$\text{im}(A) = A\mathcal{X} := \{Ax \mid x \in \mathcal{X}\}. \quad (2.2.9)$$

显然, $\ker(A)$ 是 \mathcal{X} 的子空间, $\text{im}(A)$ 是 \mathcal{Y} 的子空间。

定义 2.2.5 (一个子空间的逆像) 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (或 $\mathbb{R}^{m \times n}$),即一个从 $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$ (或 \mathbb{R}^n)到 $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^m$ (或 \mathbb{R}^m)的线性映射,和一个 \mathcal{Y} 的子空间 \mathcal{V} ,则在该线性映射下, \mathcal{V} 的逆像定义为

$$A^{-1}\{\mathcal{V}\} := \{x \in \mathcal{X} \mid Ax \in \mathcal{V}\}, \quad (2.2.10)$$

显然,这是 \mathcal{X} 的一个子空间。

定义 2.2.6 (不变子空间) 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (或 $\mathbb{R}^{n \times n}$),即一个从 $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$ (或 \mathbb{R}^n)到 \mathcal{X} 的线性映射, \mathcal{V} 是 \mathcal{X} 的一个子空间,如果

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}, \quad (2.2.11)$$

则称 \mathcal{V} 是 A 不变的,也叫做 A 的不变子空间。

下面是子空间运算中的一些有用性质:令 S, \mathcal{V} 和 \mathcal{W} 是向量空间的子空间,我们有

$$(\mathcal{S}^\perp)^\perp = \mathcal{S}, \quad (2.2.12)$$

$$(\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp, \quad (2.2.13)$$

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp, \quad (2.2.14)$$

$$\mathcal{S} + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subset (\mathcal{S} + \mathcal{V}) \cap (\mathcal{S} + \mathcal{W}), \quad (2.2.15)$$

$$\mathcal{S} \cap (\mathcal{V} + \mathcal{W}) \supset (\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) + (\mathcal{S} \cap \mathcal{W}). \quad (2.2.16)$$

如果 $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$, 则

$$\mathcal{S} \cap (\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \mathcal{V} + (\mathcal{S} \cap \mathcal{W}). \quad (2.2.17)$$

对一个线性映射 A 和具有适当维数的子空间 \mathcal{V} 和 \mathcal{W} , 我们有

$$A(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subset A\mathcal{V} \cap A\mathcal{W}, \quad (2.2.18)$$

$$A(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = A\mathcal{V} + A\mathcal{W}, \quad (2.2.19)$$

$$A^{-1}\{\mathcal{V} \cap \mathcal{W}\} = A^{-1}\{\mathcal{V}\} \cap A^{-1}\{\mathcal{W}\}, \quad (2.2.20)$$

$$A^{-1}\{\mathcal{V} + \mathcal{W}\} \supset A^{-1}\{\mathcal{V}\} + A^{-1}\{\mathcal{W}\}, \quad (2.2.21)$$

$$(A^{-1}\{\mathcal{V}\})^\perp = A^H \mathcal{V}^\perp, \quad (2.2.22)$$

$$\ker(A^H) = \{\operatorname{im}(A)\}^\perp, \quad (2.2.23)$$

其中, A^H 是 A 的复共轭转置。最后, 有下面的等价关系:

$$A\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \Leftrightarrow A^H \mathcal{V}^\perp \subset \mathcal{S}^\perp. \quad (2.2.24)$$

2.3 矩阵代数和特性

这一节简要回顾一些基本的矩阵代数和常用的矩阵性质。为了便于引用, 我们把像 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 这样的 $m \times n$ 矩阵记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}], \quad (2.3.1)$$

即如果一个大写字母表示一个矩阵的话, 相应的小写字母和下标 ij 就表示它的第 (i, j) 分量。 A 的转置定义为

$$A' := C = [c_{ij} := a_{ji}], \quad (2.3.2)$$

它的共轭转置定义为

$$A^H := C = [c_{ij} := a_{ji}^*], \quad (2.3.3)$$

其中, a_{ji}^* 是 a_{ji} 的复共轭。

2.3.1 行列式、逆和求导

对于一个方的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 它的行列式 $\det(A)$ 可表示为

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{ij} \det(A_{ij}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3.4)$$

其中, A_{ij} 是去掉 A 的第 i 行和第 j 列后的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵。对于 $A(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, 如果所有的元素都对 t 可导, 那么它的导数定义为

$$\frac{d}{dt}A(t) := \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t) \right] = [\dot{a}_{ij}(t)]. \quad (2.3.5)$$

如果两个方的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $AB = BA = I$, 则称 B 为 A 的逆, 用 A^{-1} 来表示。如果 A 逆存在, 则说 A 是非奇异的, 否则就是奇异的。注意, A 是非奇异的, 当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 。

下面是行列式、逆矩阵和求导的一些有用性质和等式, 给定 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$, 我们有

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \cdot \det(B), \quad (2.3.6)$$

$$\det(A') = \det(A), \quad (2.3.7)$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A). \quad (2.3.8)$$

假设 A 和 B 是具有适当维数的方阵, 如果 A 是非奇异的, 则有

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(B - CA^{-1}D) \quad (2.3.9)$$

或者, 如果 B 是非奇异的, 则有

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det(B) \cdot \det(A - DB^{-1}C) \quad (2.3.10)$$

给定 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 从式(2.3.9)和式(2.3.10)可得

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA). \quad (2.3.11)$$

给定一个非奇异的 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 及满足 $v^H A^{-1} u \neq -1$ 的 $u, v \in \mathbb{C}^n$, 有

$$(A + uv^H)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^H A^{-1}}{1 + v^H A^{-1}u}, \quad (2.3.12)$$

这就是 Sherman-Morrison 公式(见 Golub 和 Van Loan^[59]), 它的推广形式对导出系统和控制理论中的许多有趣结果是非常有用的。下面的 Sherman-Morrison-Woodbury 公式或简称 Woodbury 公式就是它的推广之一,

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}, \quad (2.3.13)$$

其中, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是非奇异的, B 和 D 都具有适当的维数, $(DA^{-1}B + C^{-1})$ 是非奇异的。下面的等式特别有用:

$$(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}, \quad (2.3.14)$$

$$[I + C(sI - A)^{-1}B]^{-1} = I - C(sI - A + BC)^{-1}B \quad (2.3.15)$$

和

$$(I - BD)^{-1} = I + B(I - DB)^{-1}D. \quad (2.3.16)$$

对于矩阵块的求逆(见参考文献[70]),下面的等式也是非常有用的:如果 A 和 B 是非奇异的,则有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

和

$$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.3.18)$$

如果 A 是非奇异的,则

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}D\Delta^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}D\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.3.19)$$

其中, $\Delta := B - CA^{-1}D$. 若 B 也是非奇异的,根据式(2.3.13)可得

$$A^{-1} + A^{-1}D(B - CA^{-1}D)^{-1}CA^{-1} = (A - DB^{-1}C)^{-1},$$

这样,就可以把式(2.3.19)写成

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - DB^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}D\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.3.20)$$

同样地,如果 B 是非奇异的,则

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \nabla^{-1} & -\nabla^{-1}DB^{-1} \\ -B^{-1}C\nabla^{-1} & B^{-1} + B^{-1}C\nabla^{-1}DB^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.3.21)$$

其中, $\nabla = A - DB^{-1}C$. 除此以外,如果 A 也是非奇异的,则

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \nabla^{-1} & -\nabla^{-1}DB^{-1} \\ -B^{-1}C\nabla^{-1} & (B - CA^{-1}D)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.3.22)$$

下面给定 $A(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times p}$, 它们的元素关于 t 是可导的,则

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] = \left[\frac{d}{dt}A(t)\right]B(t) + A(t)\left[\frac{d}{dt}B(t)\right]. \quad (2.3.23)$$

给定 $A(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, 如果 $A(t)$ 对所有 t 都是非奇异的,它的元素关于 t 可以求导,则

$$\frac{d}{dt}[A(t)^{-1}] = -A(t)^{-1}\left[\frac{d}{dt}A(t)\right]A(t)^{-1}. \quad (2.3.24)$$

2.3.2 秩、特征值和 Jordan 形

现在我们把矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 改写为

$$A = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}, \quad (2.3.25)$$

其中 $c_i, i=1, 2, \dots, n$ 和 $r_i, i=1, 2, \dots, m$ 分别是 A 的列和行。定义 A 的秩为 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 中的最大线性独立矢量的个数, 或等价地为 $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 中最大线性独立矢量的个数, 用 $\text{rank}(A)$ 来表示, 显然有

$$\text{rank}(A) = \dim\{\text{im}(A)\} = n - \dim\{\ker(A)\}. \quad (2.3.26)$$

以下是关于矩阵秩的一些有用性质。令 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$, 则

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}, \quad (2.3.27)$$

这就是 Sylvester 不等式。如果 A 是方的非奇异矩阵, 则

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B). \quad (2.3.28)$$

一般来说, 如果 A 和 B 有相同的维数, 则

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B). \quad (2.3.29)$$

矩阵秩的计算在书中的各种线性系统结构分解中起到了十分关键的作用, 利用在 2.3.4 节中的奇异值分解, 就可以有效地计算出矩阵的秩。

对于一个方的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和一个标量 $\lambda \in \mathbb{C}$, 如果

$$Ax = \lambda x (\Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0), \quad (2.3.30)$$

对某非零矢量 $x \in \mathbb{C}^n$ 成立, 则称 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 A 的一个特征值。这样的 x 叫做和特征值 λ 相关联的(右)特征矢量。

现在, 从式(2.3.30)就可以知道, 对一个特征值 λ , 有

$$\text{rank}(\lambda I - A) < n (\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0). \quad (2.3.31)$$

所以 A 的特征值就是它的特征多项式

$$\mathcal{X}(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (2.3.32)$$

的根, 总共有 n 个根。这些根或 A 的特征值的整体用集合 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 来表示。

下面的性质是 Cayley-Hamilton 定理,

$$\mathcal{X}(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0. \quad (2.3.33)$$

定义 A 的谱半径为

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \lambda(A)\}, \quad (2.3.34)$$

A 的迹为

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad (2.3.35)$$

它和 A 的特征值的关系是

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.3.36)$$

假设一个方的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有 n 个线性独立的特征矢量 x_1, x_2, \dots, x_n 分别和特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (不一定要相异) 相关联, 令

$$T := [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad (2.3.37)$$

这就是 A 的特征矢量矩阵, 则有

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.3.38)$$

对于一个方的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 通常存在一个非奇异变换 $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和一个整数 k , 使得

$$T^{-1}AT = J := \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}, \quad (2.3.39)$$

其中 $J_i, i=1, 2, \dots, k$ 是一些下面形式的 Jordan 块:

$$J_i := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}. \quad (2.3.40)$$

显然有 $\lambda_i \in \lambda(A), i=1, 2, \dots, k$ 和 $\sum_{i=1}^k n_i = n$. 式(2.3.39)中, J 的特殊结构被称为 A 的 Jordan 规范形. 我们在 Bingleac 和 Luse^[12] 所报道的算法基础上进行了改进, 完成了可以计算 Jordan 规范形的 m 函数 jcf. m . 众所周知, 在计算 Jordan 形的时候有很大的数值计算困难(见 Kailath^[70]), 但如果能够精确地算出, 就可以在后面章节中有效地揭示线性系统的有限零点结构和其他特性. 需要进一步指出的是, 尽管 Jordan 形是分析系统特性的有效工具, 在实际中却是很少使用. 本书主要利用 Jordan 规范形提供理论帮助和技术分析.

下面是关于一般方形矩阵特征值的一些非常有用的不等式. 下一小节将给出特殊矩阵的更多结果. 对于任意一个矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 我们有

$$\lambda_{\min} \left(\frac{A + A^H}{2} \right) \leq \operatorname{Re} \lambda_i(A) \leq \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^H}{2} \right) \quad (2.3.41)$$

和

$$\lambda_{\min} \left(\frac{A - A^H}{2j} \right) \leq \operatorname{Im} \lambda_i(A) \leq \lambda_{\max} \left(\frac{A - A^H}{2j} \right), \quad (2.3.42)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$.

对于 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 我们有以下关于 $A+B$ 的特征值不等式:

$$\max_i |\lambda_i(A+B)| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} + \sqrt{\lambda_{\max}(B^H B)} \quad (2.3.43)$$

和

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \left(\frac{A^H + A}{2} \right) + \lambda_{\min} \left(\frac{B^H + B}{2} \right) &\leq \operatorname{Re} \lambda_i(A+B) \\ &\leq \lambda_{\max} \left(\frac{A^H + A}{2} \right) + \lambda_{\max} \left(\frac{B^H + B}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

对于具有相同维数的方阵 A 和 B , 我们有以下关于 AB 特征值的性质:

$$\lambda(AB) = \lambda(BA) \quad (2.3.45)$$

和

$$\max_i |\lambda_i(AB)| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}(B^H B)}. \quad (2.3.46)$$

对于 $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 并且 $n > m$, 我们有

$$\lambda(AB) = \lambda(BA) \cup \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{n-m} \Rightarrow \text{trace}(AB) = \text{trace}(BA). \quad (2.3.47)$$

对 $x, z \in \mathbb{C}^n$, 特别有

$$\lambda(xz^H) = \{z^H x, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}\} \Rightarrow z^H x = \text{trace}(xz^H). \quad (2.3.48)$$

2.3.3 特殊矩阵

我们在这一节里要讨论一些常用的特殊矩阵。我们将特别强调正定的和半正定矩阵, 因为它们在解许多系统和控制问题时起到重要作用, 尤其是和系统稳定性相关的问题。给定一个 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果当 $i \neq j$ 时有 $a_{ij} = 0$, 则说 A 是对角矩阵, 有时表示成

$$A = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \quad (2.3.49)$$

即 $a_{ii} = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。同样地, 我们把分块对角矩阵写成

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = \text{blkdiag}\{A_1, A_2, \dots, A_k\}. \quad (2.3.50)$$

下面是几类重要的方形矩阵。我们说矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是

1. 对称的, 如果 $A' = A$ (矩阵的所有特征值都在实轴上);
2. 旋转对称的, 如果 $A' = -A$ (矩阵的所有特征值都在虚轴上);
3. 正交的, 如果 $A'A = AA' = I$ (矩阵的所有特征值在单位圆上);
4. 幂零, 如果对整数 k 有 $A^k = 0$ (矩阵的所有特征值都在原点);
5. 幂等, 如果 $A^2 = A$ (矩阵的特征值都是 1 或 0);
6. 置换矩阵, 如果 A 是非奇异的, 它的每一列 (或行) 只有一个等于 1 的非零元素。

我们说矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是

1. Hermitian (厄米的), 如果 $A^H = A$ (矩阵的特征值都在实轴上);
2. 酉阵, 如果 $A^H A = AA^H = I$ (矩阵的特征值都在单位圆上);
3. 正定, 如果对每个非零矢量 $x \in \mathbb{C}^n$, 有 $x^H A x > 0$;
4. 半正定, 如果对每个矢量 $x \in \mathbb{C}^n$, 有 $x^H A x \geq 0$;

5. 负定, 如果对每个非零矢量 $x \in \mathbb{C}^n$, 有 $x^H A x < 0$;
6. 半负定, 如果对每个矢量 $x \in \mathbb{C}^n$, 有 $x^H A x \leq 0$;
7. 不定, 如果 A 既不是正定, 也不是半负定的。

如果 A 是正定(半正定)的, 我们记 $A > 0 (A \geq 0)$; 如果 A 是负定(半负定)的, 我们记 $A < 0 (A \leq 0)$ 。给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 如果 $A - B \geq 0$, 我们记 $A \geq B$; 如果 $A - B > 0$, 我们记 $A > B$ 。

在系统和控制应用中, 与对称或 Hermitian 矩阵的正定性和半正定性相关的结果特别让我们感兴趣。下面就给出关于对称或 Hermitian 矩阵, 以及正定矩阵的一些有用结果。

给定一个 Hermitian 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 它的所有特征值都是实的, 即 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$, 令

$$\lambda_{\min}(A) := \min\{\lambda(A)\}, \quad \lambda_{\max}(A) := \max\{\lambda(A)\}, \quad (2.3.51)$$

我们有

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x} \quad (2.3.52)$$

和

$$-\max_i |\lambda_i(A)| \leq \lambda_{\min}(A) \leq \lambda_i(A) \leq \lambda_{\max}(A) \leq \max_i |\lambda_i(A)|. \quad (2.3.53)$$

假设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 Hermitian 的, 则关于 $A+B$ 的特征值有以下的不等式:

$$\max_i |\lambda_i(A+B)| \leq \max_i |\lambda_i(A)| + \max_i |\lambda_i(B)|, \quad (2.3.54)$$

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_i(A+B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B), \quad (2.3.55)$$

$$\lambda_{\min}(A+B) \leq \min\{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(B), \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(B)\}, \quad (2.3.56)$$

$$\lambda_{\max}(A+B) \geq \max\{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(B), \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(B)\}. \quad (2.3.57)$$

关于 AB 的特征值也有以下的不等式:

$$\max_i |\lambda_i(AB)| \leq \max_i |\lambda_i(A)| \cdot \max_i |\lambda_i(B)| \quad (2.3.58)$$

(译者注: 在原著中, 以上不等式为(2.3.46), 有误)和

$$\lambda_{\min}(B)\lambda_i(A^2) \leq \lambda_i(ABA) \leq \lambda_{\max}(B)\lambda_i(A^2), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3.59)$$

其中, $\lambda_i(\cdot)$ 的排序是 $\lambda_1(\cdot) \geq \lambda_2(\cdot) \geq \dots \geq \lambda_n(\cdot)$ 。

我们知道, 一个 Hermitian 矩阵是正定的(半正定的), 当且仅当它的所有特征值是正的(非负的); 是负定的(半负定), 当且仅当它的所有特征值都是负的(非正的)。把一个 Hermitian 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 划分为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^H & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.3.60)$$

其中, A_{11} 和 A_{22} 是方阵。则 A 是正定的, 当且仅当下面两个条件之一成立:

$$A_{11} > 0, \quad A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} > 0; \quad (2.3.61)$$

或

$$A_{22} > 0, \quad A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^H > 0. \quad (2.3.62)$$

连续地使用这个结论,可以证明 A 是正定的,当且仅当它的所有主子式都是正的; A 是半正定的,当且仅当它的所有主子式都是非负的。对负定和半负定矩阵,也可以得到相似的结论。

给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 我们有

$$A \geq B > 0 \Leftrightarrow B^{-1} \geq A^{-1} > 0. \quad (2.3.63)$$

如果 A 和 B 是可交换的,即 $AB=BA$, 则

$$A > B > 0 \Rightarrow A^k > B^k > 0. \quad (2.3.64)$$

给定 Hermitian 矩阵 $A, B, S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 并且 $A > 0, B > 0$ 和 $S > 0$, 则

$$ASA > BSB \Rightarrow A > B. \quad (2.3.65)$$

式(2.3.65)在相反方向一般并不成立,但却可以有

$$A > B \Rightarrow \text{存在一个 } S = S^H > 0, \text{ 使得 } ASA > BSB. \quad (2.3.66)$$

在推导线性系统和控制理论的许多结果中,下面几个有关 $A+B$ 和 AB 的特性也是很有用的。给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 假设 A 和 $A+B$ 的特征值以下面的方式排序:

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A) \quad (2.3.67)$$

和

$$\lambda_1(A+B) \geq \lambda_2(A+B) \geq \dots \geq \lambda_n(A+B), \quad (2.3.68)$$

如果 $B > 0$, 则有

$$\lambda_i(A+B) > \lambda_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3.69)$$

如果 $B \geq 0$, 则有

$$\lambda_i(A+B) \geq \lambda_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.70)$$

给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其中 $B > 0$, 我们有

$$\lambda(AB) \subset \mathbb{R} \quad \text{和} \quad \lambda(AB^{-1}) \subset \mathbb{R}, \quad (2.3.71)$$

即 AB 和 AB^{-1} 的特征值都是实的,特别有

$$\lambda_{\min}(AB^{-1}) = \min_{x \neq 0} \frac{x^H Ax}{x^H Bx} \quad (2.3.72)$$

和

$$\lambda_{\max}(AB^{-1}) = \max_{x \neq 0} \frac{x^H Ax}{x^H Bx}. \quad (2.3.73)$$

显然,如果 A 还是正定的(半正定),则 AB 和 AB^{-1} 的所有特征值都是正的(非负)。

给定两个 Hermitian 矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 并且 $A \geq 0$ 和 $B \geq 0$, 我们有

$$\lambda_{\min}(B)\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B)\text{trace}(A) \leq \text{trace}(AB) \leq \lambda_{\max}(B)\text{trace}(A). \quad (2.3.74)$$

2.3.4 奇异值分解

给定一个矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 它的奇异值被定义为

$$\sigma_i(A) := \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^H)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.3.75)$$

其中 $k := \min\{m, n\}$, 假设 $A^H A$ 和 AA^H 的特征值以降序方式排列, 显然有 $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_k(A) \geq 0$. 定义 A 的条件数为

$$\text{cond}(A) = \sigma_1(A)/\sigma_k(A). \quad (2.3.76)$$

令

$$\Delta_1 = \text{diag}\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_k(A)\}. \quad (2.3.77)$$

可以证明, 存在两个酉矩阵, 使得 A 能够被分解为

$$A = U\Delta V^H, \quad (2.3.78)$$

其中

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{若 } m \geq n, \quad (2.3.79)$$

或

$$\Delta = [\Delta_1 \quad 0], \quad \text{若 } m \leq n. \quad (2.3.80)$$

式(2.3.78)的分解就是 A 的奇异值分解。我们现在回顾奇异值的一些有用性质。

性质 2.3.1 给定 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 我们有

$$\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B). \quad (2.3.81)$$

如果 A 和 B 都是方的矩阵, 我们有

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A)\sigma_{\min}(B) &\leq \sigma_{\min}(AB) \\ &\leq \min\{\sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B), \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B)\} \\ &\leq \max\{\sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B), \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B)\} \\ &\leq \sigma_{\max}(AB) \\ &\leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B). \end{aligned} \quad (2.3.82)$$

证明 我们知道

$$\lambda_{\max}(BB^H)AA^H = A[\lambda_{\max}(BB^H)I - BB^H]A^H + ABB^HA^H, \quad (2.3.83)$$

并注意 $\lambda_{\max}(BB^H)I - BB^H \geq 0$, 则根据式(2.3.70)可得

$$\lambda_{\max}(BB^H)\lambda_i(AA^H) \geq \lambda_i(ABB^HA^H), \quad (2.3.84)$$

这样就有

$$\lambda_{\max}(BB^H)\lambda_{\max}(AA^H) \geq \lambda_{\max}(ABB^HA^H),$$

或等价地, $\sigma_{\max}^2(B)\sigma_{\max}^2(A) \geq \sigma_{\max}^2(AB)$, 因而式(2.3.81)的结果成立。

对于方的矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 式(2.3.84)也意味着

$$\sigma_{\max}(B)\sigma_i(A) \geq \sigma_i(AB), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.85)$$

同样地, 利用

$$\lambda_{\max}(A^H A)B^H B = B^H[\lambda_{\max}(A^H A)I - A^H A]B + B^H A^H A B \quad (2.3.86)$$

和它的性质, 我们可以证明

$$\sigma_{\max}(A)\sigma_i(B) \geq \sigma_i(AB), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.87)$$

接下来, 注意到

$$-\lambda_{\min}(BB^H)AA^H = A[BB^H - \lambda_{\min}(BB^H)I]A^H - ABB^H A^H$$

和

$$-\lambda_{\min}(A^H A)B^H B = B^H[A^H A - \lambda_{\min}(A^H A)I]B - B^H A^H A B,$$

我们可以证明

$$\sigma_{\min}(B)\sigma_i(A) \leq \sigma_i(AB) \quad (2.3.88)$$

和

$$\sigma_{\min}(A)\sigma_i(B) \leq \sigma_i(AB), \quad (2.3.89)$$

$i=1, 2, \dots, n$. 令 $i=1$ 和 $i=n$, 式(2.3.82)的结果可以从式(2.3.85)、式(2.3.87)和式(2.3.88)或式(2.3.89)中得到, 分别与最大和最小奇异值的定义相对应。■

利用和性质 2.3.1 的证明相类似的方法, 对于任意的 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 通过仔细地比较 m 、 n 和 p 值, 我们可以导出关于 AB 的更有趣结果。

1. 如果 $n \leq p$, 则

$$\sigma_{\max}(AB) \geq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B). \quad (2.3.90)$$

2. 如果 $n \leq m$, 则

$$\sigma_{\max}(AB) \geq \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B). \quad (2.3.91)$$

3. 如果 $\min\{m, n\} \leq \min\{m, p\}$, 则

$$\sigma_{\min}(AB) \leq \sigma_{\min}(A)\sigma_{\max}(B). \quad (2.3.92)$$

4. 如果 $\min\{n, p\} \leq \min\{m, p\}$, 则

$$\sigma_{\min}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B). \quad (2.3.93)$$

5. 如果 $p \leq n \leq m$ 或 $m \leq n \leq p$, 则

$$\sigma_{\min}(AB) \geq \sigma_{\min}(A)\sigma_{\min}(B). \quad (2.3.94)$$

可以直接验证下面的关于矩阵 $A+B$ 的奇异值不等式成立:

$$\sigma_{\max}(A+B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B). \quad (2.3.95)$$

从式(2.3.78)的分解中可以清楚地看出, 矩阵 A 的秩就是 A 的非零奇异值的个数。由于奇异值的分解只需要用到酉变换, 它的条件数为 1, 所以它的数值稳定性良好, 可以精确地确定出矩阵的秩。奇异值分解也可用于计算非奇异矩阵的逆。例如, 如果 A 是非奇异的方阵, 则它的逆为

$$A^{-1} = V\Delta^{-1}U^H. \quad (2.3.96)$$

注意, 在求 Δ^{-1} 时, 只需要对标量求逆。奇异值分解的另一个应用就是计算矩阵的伪逆。给

定一个矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 它的伪逆或 Moore-Penrose 逆的定义为一个惟一的矩阵 $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

1. $AA^\dagger A = A$,
2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$,
3. $AA^\dagger = (AA^\dagger)^H$,
4. $A^\dagger A = (A^\dagger A)^H$.

令 q 为 A 的非零奇异值的个数, 则式(2.3.78)中 A 的奇异值分解可以重新写为

$$A = U\Delta V^H = U \begin{bmatrix} \Delta_* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H, \quad (2.3.97)$$

其中 $\Delta_* = \text{diag}\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_q(A)\}$. 可以直接证明 A 的伪逆为

$$A^\dagger = V \begin{bmatrix} \Delta_*^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H, \quad (2.3.98)$$

还有相关的性质:

$$0_{m \times n}^\dagger = 0_{n \times m}, \quad (A^\dagger)^\dagger = A, \quad (A^\dagger)^H = (A^H)^\dagger, \quad (2.3.99)$$

$$A^H = A^H AA^\dagger = A^\dagger AA^H, \quad (A^H A)^\dagger = A^\dagger (A^H)^\dagger, \quad (2.3.100)$$

$$A^\dagger = (A^H A)^\dagger A^H = A^H (AA^H)^\dagger, \quad (2.3.101)$$

$$\text{im}(A) = \text{im}(AA^\dagger) = \text{im}(AA^H), \quad (2.3.102)$$

$$\text{im}(A^\dagger) = \text{im}(A^H) = \text{im}(A^\dagger A) = \text{im}(A^H A), \quad (2.3.103)$$

$$\text{im}(I - A^\dagger A) = \ker(A^\dagger A) = \ker(A) = \text{im}(A^H)^\perp, \quad (2.3.104)$$

$$\text{im}(I - AA^\dagger) = \ker(AA^\dagger) = \ker(A^H) = \ker(A^\dagger) = \text{im}(A)^\perp. \quad (2.3.105)$$

2.4 范数

范数用来度量一个矢量或矩阵的长度或大小。范数也可以对信号和有理传递函数进行定义。

给定一个在标量域 \mathbb{K} 上的线性空间 \mathcal{X} , 任何一个关于 $x \in \mathcal{X}$ 的实值标量函数(通常用 $\|x\|$ 来表示)在满足下面性质的情况下都是在 \mathcal{X} 上的一个范数:

1. $\|x\| > 0$, 当 $x \neq 0$ 和 $\|x\| = 0$, 当 $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathcal{X}$;
3. $\|x+z\| \leq \|x\| + \|z\|$, $\forall x, z \in \mathcal{X}$.

2.4.1 矢量范数

下面的 p 范数是在矢量空间 \mathbb{C}^n 上最常用的范数:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.4.1)$$

和

$$\|x\|_\infty := \max_i |x_i|, \quad (2.4.2)$$

其中, x_1, x_2, \dots, x_n 是 $x \in \mathbb{C}^n$ 的分量。 $\|x\|_2$ 也叫做 x 的 Euclidean 范数, 用 $|x|$ 来简化表示。

2.4.2 矩阵范数

给定一个矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 它的 Frobenius 范数定义为

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i(A) \right)^{1/2} \quad (2.4.3)$$

A 的 p 范数从矢量的 p 范数诱导而来, 即

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p. \quad (2.4.4)$$

具体地说, 对于 $p=1, 2, \infty$, 我们有

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad (2.4.5)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)} = \sigma_{\max}(A), \quad (2.4.6)$$

这也被称为 A 的谱范数, 另有

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (2.4.7)$$

可以证明

$$\|A\| \geq \rho(A), \quad (2.4.8)$$

其中, $\|A\|$ 是 A 的任何范数, $\rho(A)$ 是 A 的谱半径。注意, 所有这些矩阵范数在酉变换下是不变的。

2.4.3 连续时间信号范数

对任何 $p \in [1, \infty)$, 令 L_p^m 表示所有满足以下性质的可测信号 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ 所形成的线性空间:

$$\int_0^\infty |g(t)|^p dt < \infty.$$

对于任何一个 $g \in L_p^m; p \in [1, \infty)$, 其 L_p 范数定义为

$$\|g\|_p := \left(\int_0^\infty |g(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.4.9)$$

令 L_∞^m 表示所有满足以下性质的信号 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ 所形成的线性空间:

$$|g(t)| < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

对于任何一个 $g \in L_\infty^m$, 其 L_∞ 范数定义为

$$\|g\|_\infty := \sup_{t \geq 0} |g(t)|. \quad (2.4.10)$$

下面是很有用的信号范数的 Hölder 不等式,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \quad (2.4.11)$$

其中, $1 < p < \infty$ 和 $1/p + 1/q = 1$. 也可以证明, 如果 $g(t) \in L_1 \cap L_\infty$, 则 $g(t) \in L_2$.

2.4.4 离散时间信号范数

对任何 $p \in [1, \infty)$, 令 l_p^m 表示所有满足以下性质的离散时间信号 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 所组成的线性空间:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|^p < \infty.$$

对任何 $g \in l_p^m, p \in [1, \infty)$, 其 l_p 范数定义为

$$\|g\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.4.12)$$

令 l_∞^m 表示所有满足以下性质的信号 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 组成的线性空间:

$$|g(k)| < \infty, \quad \forall k \geq 0.$$

对于任意 $g \in l_\infty^m$, 其 l_∞ 范数定义为

$$\|g\|_\infty := \sup_{k \geq 0} |g(k)|. \quad (2.4.13)$$

如果 $g(k) \in l_1^m$, 则可以证明 $\|g\|_p \leq \|g\|_1 < \infty, p \in (1, \infty]$, 这意味着 $l_1 \subset l_p, p \in (1, \infty]$. 一般来说, $l_1^m \subset l_p^m \subset l_\infty^m, p \in (1, \infty)$.

2.4.5 连续时间系统范数

给定一个传递函数为 $G(s)$ 的稳定、正则的连续时间系统, 其 H_2 范数定义为

$$\|G\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \text{trace} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)G(j\omega)^H d\omega \right] \right)^{1/2}, \quad (2.4.14)$$

其 H_∞ 范数为

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in [0, \infty)} \sigma_{\max}[G(j\omega)] = \sup_{\|w\|_2=1} \frac{\|h\|_2}{\|w\|_2}, \quad (2.4.15)$$

其中, $w(t)$ 和 $h(t)$ 分别是 $G(s)$ 的输入和输出.

令 (A, B, C, D) 是稳定传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个状态空间实现, 即 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. 可以直接证明, 当且仅当 $D=0$ 时, $\|G\|_2 < \infty$. 在 $D=0$ 的情况下, 可

以通过解以下的两个 Lyapunov 方程之一的惟一解 $P>0$ 或 $Q>0$ 来准确地计算 $\|G\|_2$ ：

$$A'P + PA = -C'C, \quad AQ + QA' = -BB', \quad (2.4.16)$$

这时有

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{trace}(B'PB)} = \sqrt{\text{trace}(CQC')}. \quad (2.4.17)$$

$\|G\|_\infty$ 的计算比较繁琐,通过找一个标量 $\gamma>\sigma_{\max}(D)$,使得

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D'C & \gamma^{-2}BR^{-1}B' \\ -C'(I + DR^{-1}D')C & -(A + BR^{-1}D'C)' \end{bmatrix}, \quad (2.4.18)$$

在虚轴上至少有一个特征值,其中 $R := \gamma^2 I - D'D$ 。如果这样的 γ 存在,比如说 $\gamma = \gamma^*$,则 $\|G\|_\infty = \gamma^*$; 否则 $\|G\|_\infty = \sigma_{\max}(D)$ 。

2.4.6 离散时间系统范数

给定一个稳定、正则的离散时间系统传递函数矩阵 $G(z)$,其 H_2 范数定义为

$$\|G\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \text{trace} \left[\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) G(e^{j\omega})^H d\omega \right] \right)^{1/2}, \quad (2.4.19)$$

其 H_∞ 范数定义为

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma_{\max}[G(e^{j\omega})] = \sup_{\|w\|_2=1} \frac{\|h\|_2}{\|w\|_2}, \quad (2.4.20)$$

其中, $w(k)$ 和 $h(k)$ 分别是 $G(z)$ 的输入和输出。

假设 (A, B, C, D) 是 $G(z)$ 的一个状态空间实现。在 $D=0$ 的情况下,只要把下面两个 Lyapunov 方程中的一个 $P>0$ 或 $Q>0$ 给解出来,就可以计算出 $\|G\|_2$ 了,即

$$A'PA - P = -C'C, \quad AQA' - Q = -BB', \quad (2.4.21)$$

这时有

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{trace}(B'PB)} = \sqrt{\text{trace}(CQC')}. \quad (2.4.22)$$

$\|G\|_\infty$ 的计算同样是繁琐的,可以利用双线性变换把 $G(z)$ 等价成一个连续时间系统。可以证明,在双线性变换下, $G(z)$ 的 H_∞ 范数等于它的连续时间等价系统的 H_∞ 范数。我们要指明的是,不论是连续时间系统,还是离散时间系统,都有

$$\|G_1 G_2\|_\infty \leq \|G_1\|_\infty \cdot \|G_2\|_\infty. \quad (2.4.23)$$

这个特性是不等式(2.3.81)的一个简单推论。

第3章 线性系统理论复习

3.1 导论

我们在这一章要回顾多变量线性时不变系统的一些基本概念。系统响应和稳定性,以及可控性和可观性这些概念已经在文献中被广泛讨论过,可以在大多数的线性系统理论入门教科书中找到(如 Antsaklis 和 Michel^[4], Callier 和 Desoer^[16], Chen^[33], DeCarlo^[46], Kailath^[70], Rugh^[114] 和 Zheng^[158])。在这里,我们将采用 Chen^[33] 和 Zheng^[158] 中的一些优美的推导。另一方面,有的内容对有些读者或低年级研究生可能比较抽象,如线性系统的不变零点结构(也叫做有限零点结构)和无限零点结构,可逆性结构以及几何子空间。这些将在后面的章节中进行详细讨论,也可以在一些关于线性系统的高级专著和研究论文中找到,如 Rosenbrock^[112], Trentelman 等^[141], Verghese^[146], Wonham^[154], 还有一些研究文章(参见 Commault 和 Dion^[41], Kouvaritakis 和 MacFarlane^[77], MacFarlane 和 Karcanias^[96], Moylan^[102], Owens^[105], Pugh 和 Ratcliffe^[110] 和 Saberi, Chen 和 Sannuti^[115])。在这里,我们要通过众所周知的 Kronecker 规范形来引入有限和无限零点结构,以及可逆性结构的概念,关于几何子空间的内容则大部分取自 Trentelman 等^[141]。这些基本概念和结果是本书的主要立足点,对后面章节内容的理解也是很有帮助的。

我们主要考虑连续时间线性时不变系统,由下面的状态和输出方程来描述:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是系统输入, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 是系统输出, A, B, C 和 D 是具有适当维数的常数矩阵。当上下文的关系比较清楚时,我们将把 t 变量从式(3.1.1)中的 x, u 和 y 中省去。虽然式(3.1.1)是本书考虑的主要对象,但是我们在第6章会考虑另一种类型的线性系统,就是所谓的奇异系统或广义(descriptor)系统,其状态方程为 $E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, 其中 E 是一个奇异矩阵。到了第6章,我们会详细地研究这种类型的系统。注意, Σ 有一个传递函数(频域表示):

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.1.2)$$

类似地,离散时间系统的表示为

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (3.1.3)$$

同样, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是系统输入, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ 是系统输出。相应的结果将会和连续时间系统同步地给出。离散时间系统(3.1.3)的传递函数为

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (3.1.4)$$

以下的要点是本章要回顾的线性系统的基本概念:

1. 线性时不变系统的动态响应;
2. 系统稳定性;
3. 可控性和可观性;
4. 系统可逆性和可逆性结构;
5. 有限和无限零点结构;
6. 几何子空间;
7. 状态反馈和输出馈入的性质。

3.2 动态响应

我们在这一节里要导出线性时不变系统的状态和输出响应的解。首先考虑式(3.1.1)的连续时间系统 Σ 。对于初始条件 $x_0 = x(0)$, Σ 的状态变量 $x(t)$ 的解或状态响应可以惟一地表示为

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \quad (3.2.1)$$

其中, 第一项是由于初始条件 x_0 引起的响应, 第二项是外部控制 $u(t)$ 所引起的响应。为了引出矩阵指数函数的定义, 我们分别考虑下面两种情况: i) 系统没有外部输入, 即 $u(t) = 0$; ii) 系统初始状态为零, 即 $x_0 = 0$ 。

1. 当外部输入信号 $u(t) = 0$ 时, 状态方程(3.1.1)变成

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0. \quad (3.2.2)$$

令上面自治系统解的表示为

$$x(t) = \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 t + \bar{\alpha}_2 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\alpha}_k t^k, \quad t \geq 0, \quad (3.2.3)$$

其中 $\bar{\alpha}_k \in \mathbb{R}^n, k=0, 1, \dots$, 是待确定的参数。把式(3.2.3)代入式(3.2.2)可得

$$\dot{x}(t) = \bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 t + 3\bar{\alpha}_3 t^2 + \cdots = A\bar{\alpha}_0 + A\bar{\alpha}_1 t + A\bar{\alpha}_2 t^2 + \cdots. \quad (3.2.4)$$

因为等式(3.2.4)对所有 $t \geq 0$ 都必须成立, 所以我们有

$$\bar{\alpha}_1 = A\bar{\alpha}_0, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{1}{2}A\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{2!}A^2\bar{\alpha}_0, \quad \bar{\alpha}_3 = \frac{1}{3}A\bar{\alpha}_2 = \frac{1}{3!}A^3\bar{\alpha}_0,$$

其通式为

$$\bar{\alpha}_k = \frac{1}{k!}A^k\bar{\alpha}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.5)$$

考虑到初始条件后,可得

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \right) \bar{\alpha}_0 = e^{At} x_0, \quad t \geq 0, \quad (3.2.6)$$

其中

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k. \quad (3.2.7)$$

可以直接证明

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k = A e^{At} = e^{At} A. \quad (3.2.8)$$

2. 系统(3.1.1)在零初始条件 $x_0=0$ 和非零的外部输入 $u(t)$ 的情况下,我们考虑下面的等式:

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} x) = \frac{d e^{-At}}{dt} x + e^{-At} \dot{x} = e^{-At} (\dot{x} - Ax) = e^{-At} Bu(t). \quad (3.2.9)$$

对式(3.2.9)两边积分,可得

$$e^{-At} x(t) - x_0 = e^{-At} x(t) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau, \quad (3.2.10)$$

这意味着

$$x(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (3.2.11)$$

可以直接验证式(3.1.1)具有初始条件 $x(0) = x_0$ 的状态响应为式(3.2.6)和式(3.2.11)之和,即解的形式为式(3.2.1)。式(3.1.1)具有初始条件 $x(0) = x_0$ 的解的惟一性可以这样证明:假设 x_1 和 x_2 是式(3.1.1)在 $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ 的解。令 $\bar{x}(t) = x_1(t) - x_2(t)$, 因此 $\bar{x}_0 = \bar{x}(0) = 0$, 我们有

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = Ax_1 + Bu - Ax_2 - Bu = A\bar{x}. \quad (3.2.12)$$

从式(3.2.6)可得 $\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}_0 \equiv 0$, 即 $x_1(t) \equiv x_2(t)$, 对所有 $t \geq 0$ 成立。最后,容易看出系统(3.1.1)对应的输出响应为

$$y(t) = Ce^{At} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t), \quad t \geq 0. \quad (3.2.13)$$

术语“零输入响应”指的是在没有输入信号的情况下,由初始状态所引起的响应。对连续时间系统(3.1.1)来说,术语“单位阶跃响应”和“脉冲响应”是指在零初始条件下,分别对输入信号

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (3.2.14)$$

所产生的响应,其中 $\delta(t)$ 是单位脉冲函数。

离散时间系统(3.1.3)的动态响应可以通过一些简单的处理来计算。在初始条件为

$x(0) = x_0$ 时,可以直接把式(3.1.3)的状态响应表示为

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i), \quad k \geq 0, \quad (3.2.15)$$

相应的输出响应为

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B u(i) + Du(k), \quad k \geq 0. \quad (3.2.16)$$

类似地,术语“零输入响应”指的是在没有输入信号的情况下,由初始条件所引起的输出响应。术语“单位阶跃响应”和“单位脉冲响应”分别指的是式(3.2.16)在零初始条件下对输入信号

$$u(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad u(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \delta(k) \quad (3.2.17)$$

的响应,其中

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

3.3 系统稳定性

稳定性总是设计有意义控制系统的主题,特别是内部稳定性。对于线性系统,不论是连续时间系统(3.1.1)还是离散时间系统(3.1.3),系统内部稳定性的概念所针对的都是没有外部输入 u 时的状态轨迹。所以,对连续时间系统(3.1.1)来说,内部稳定性就是

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (3.3.1)$$

的轨迹;对于离散时间系统(3.1.3),就是

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0 \quad (3.3.2)$$

的轨迹。具体地说,如果连续时间系统(3.1.1)的状态轨迹对每个有界的初始条件 x_0 都是有界的,则称该系统是临界(marginally)稳定的或在 Lyapunov 意义下是稳定的,或者简单地说是稳定的。如果系统(3.3.1)是稳定的,并对任意初始条件,其状态轨迹都满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0, \quad (3.3.3)$$

则称该系统是渐近稳定的。可以直接证明,连续时间线性系统(3.1.1)或(3.3.1)是稳定的,当且仅当 A 的特征值在闭左半复平面,并且虚轴上的特征值所对应的 Jordan 块大小均为 1;给定系统是渐近稳定的,当且仅当 A 的特征值在开左半平面,即 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ 。证明这些结论时,可以首先把 A 变换成 Jordan 规范形,比如

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_q \end{bmatrix}, \quad (3.3.4)$$

其中, $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是一个非奇异的矩阵, 这里

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (3.3.5)$$

然后, 我们有

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_q t} \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (3.3.6)$$

其中

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \cdots & t^{n_i-1} e^{\lambda_i t} / (n_i - 1)! \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & t^{n_i-2} e^{\lambda_i t} / (n_i - 2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}, \quad (3.3.7)$$

$i=1, 2, \dots, q$ 。很显然, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$, 当且仅当 $\lambda_i \in \mathbb{C}^-$, 这样一来, 对于任何 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = P \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{J_1 t} & & & \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{J_q t} \end{bmatrix} P^{-1} x_0 = 0, \quad (3.3.8)$$

当且仅当 $\lambda_i \in \mathbb{C}^-, i=1, 2, \dots, q$ 或 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ 。另一方面, 如果对所有初始条件, 解都保持有界, 当且仅当 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^0$ 和对 $\lambda_i(A) \in \mathbb{C}^0$ 有 $n_i=1$ 。

下面的结果对采用 Lyapunov 方法进行稳定性分析至关重要。

定理 3.3.1 连续时间系统(3.3.1)是渐近稳定的, 当且仅当对任何给定的正定矩阵 $Q=Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Lyapunov 方程

$$A'P + PA = -Q \quad (3.3.9)$$

有一个惟一的正定解 $P=P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

证明 系统的渐近稳定性, 意味着 A 的特征值都有负实部。所以, 下面矩阵的定义

是成立的：

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{A't} dt. \quad (3.3.10)$$

我们在后面会证明, 这样的一个 P 是 Lyapunov 方程(3.3.9)的惟一解, 并且是正定的。

首先把式(3.3.10)代入式(3.3.9), 可得

$$\begin{aligned} A'P + PA &= \int_0^{\infty} A' e^{A't} Q e^{A't} dt + \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{A't} A dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A't} Q e^{A't}) dt \\ &= e^{A't} Q e^{A't} \Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= -Q, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

我们在这里已经应用了当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $e^{A't} \rightarrow 0$ 的事实。这表明式(3.3.10)定义的 P 确实是式(3.3.9)的解。为了证明式(3.3.9)解的惟一性, 令 P_1 和 P_2 为两个解, 即

$$A'P_1 + P_1A = -Q \quad (3.3.12)$$

和

$$A'P_2 + P_2A = -Q. \quad (3.3.13)$$

从式(3.3.12)中减去式(3.3.13)可得

$$A'(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A = 0, \quad (3.3.14)$$

这意味着

$$e^{A't} A'(P_1 - P_2) e^{A't} + e^{A't} (P_1 - P_2) A e^{A't} = \frac{d}{dt} e^{A't} (P_1 - P_2) e^{A't} = 0. \quad (3.3.15)$$

对式(3.3.15)从 $t=0$ 到 ∞ 积分可得

$$e^{A't} (P_1 - P_2) e^{A't} \Big|_{t=0}^{\infty} = P_1 - P_2 = 0. \quad (3.3.16)$$

这表明, 式(3.3.10)所定义的 P 是 Lyapunov 方程(3.3.9)的惟一解。

因为 Q 是对称的, 很显然, P 也是对称的。 P 的正定性可以从下面的事实中看出: 对任何非零的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x'Px = \int_0^{\infty} x' e^{A't} Q e^{A't} x dt > 0, \quad (3.3.17)$$

这是因为 Q 是正定的, $e^{A't}$ 对任何 t 都是非奇异的。

反过来, 如果存在正定的 P 和 Q 满足 Lyapunov 方程(3.3.9), 则 A 的所有特征值具有负实部。为证明这一点, 令 λ 是 A 的特征值, 相应的特征矢量 $v \neq 0$, 即

$$Av = \lambda v,$$

这等同于

$$v^* A' = \lambda^* v^*.$$

用 v^* 和 v 分别前乘和后乘式(3.3.9), 可得

$$-v^* Q v = v^* A' P v + v^* P A v = (\lambda^* + \lambda) v^* P v = 2\operatorname{Re}(\lambda) v^* P v,$$

因为 P 和 Q 都是正定的, 所以 $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. ■

现在我们回到式(3.1.1)所描述的系统 Σ 。下面的系统输入和输出特性来自 Desoer 和 Vidyasagar([49], 第59页), 它适用于渐近稳定的系统。

定理 3.3.2 考虑式(3.1.1)所描述的时间系统 Σ , 其中 A 是渐近稳定的。在 $D=0$ 时, 即 Σ 是严格正则的, 我们有

1. 如果 $u \in L_1^m$, 则 $y \in L_1^p \cap L_\infty^p, \dot{y} \in L_1^p, y$ 绝对连续, 当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $y(t) \rightarrow 0$;
2. 如果 $u \in L_2^m$, 则 $y \in L_2^p \cap L_\infty^p, \dot{y} \in L_2^p, y$ 连续, 当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $y(t) \rightarrow 0$;
3. 如果 $u \in L_\infty^m$, 则 $y \in L_\infty^p, \dot{y} \in L_\infty^p, y$ 是一致连续的;
4. 如果 $u \in L_\infty^m$, 并当 $t \rightarrow \infty$ 时 $u(t) \rightarrow u_\infty \in \mathbb{R}^m$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $y_\infty \in \mathbb{R}^p$, 并且是指数收敛;
5. 如果 $u \in L_q^m, 1 < q < \infty$, 则 $y \in L_q^p$ 和 $\dot{y} \in L_q^p$ 。

当 $D \neq 0$ 时, 即 Σ 是非严格正则的, 我们只有这样的结果: 如果 $u \in L_q^m, 1 \leq q \leq \infty$, 则 $y \in L_q^p$ 。

注意式(3.3.6)和式(3.3.7), 对于稳定的系统, 可以直接证明: 存在正的标量 $h_m > 0$ 和 $\alpha > 0$, 使得

$$\|e^{At}\| \leq h_m e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.18)$$

定理 3.3.2 的结论可以通过一些直接验算来证明。

下面, 我们讨论离散时间系统的稳定性问题。如果对每个有界的初始条件 x_0 , 系统相应的状态轨迹都是有界的, 则称离散时间系统(3.3.2)是临界稳定的, 在 Lyapunov 意义下稳定, 或简单地说是稳定的。如果系统是稳定的, 并且对任何初始条件 x_0 , 其相应的状态轨迹 $x(k)$ 都满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0 = 0, \quad (3.3.19)$$

则称其为渐近稳定的。类似地可以证明, 如果 A 的所有特征值在单位圆内, 在单位圆上特征值的 Jordan 块大小为 1, 则离散时间系统(3.3.2)是稳定的。给定的系统是渐近稳定的, 当且仅当下面的条件之一成立:

1. A 的特征值都在单位圆内, 即 $\lambda(A) \subset \mathbb{C}^\circ$ 。
2. 对于给定的任何正定矩阵 $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 离散时间 Lyapunov 方程

$$A' P A - P = -Q \quad (3.3.20)$$

有惟一和正定的解 $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

3.4 可控性和可观性

让我们首先考虑可控性。可控性的概念涉及通过输入来控制一个给定系统的状态轨迹。简单地说, 如果在有限的时间内, 通过选择合适的控制输入, 系统的状态在状态空间

里可以从任何一点转移到其他任何一点,则称该系统是可控的。对于一个线性时不变系统,这个性质等价于从任意一点到状态空间的原点都进行状态轨迹的控制。具体地说,我们考虑以下连续时间系统:

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (3.4.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。

定义 3.4.1 如果对任何初始条件 x_0 和任何 $x_1 \in \mathbb{R}^n$, 存在一个时间 $t_1 > 0$ 和控制信号 $u(t), t \in [0, t_1]$, 使得状态轨迹满足 $x(t_1) = x_1$, 则称式(3.4.1)所描述的系统 Σ 是可控的; 否则就是不可控的。

我们有下面的结论。

定理 3.4.1 由式(3.4.1)给定的系统 Σ 是可控的, 当且仅当矩阵

$$W_c(t) := \int_0^t e^{-Ar} BB' e^{-Ar} dr \quad (3.4.2)$$

对所有 $t > 0$ 是非奇异的。 $W_c(t)$ 被称为 Σ 的可控性 gramian 矩阵。

证明 如果 $W_c(t_1)$ 对某 $t_1 > 0$ 是非奇异的, 我们令

$$u(t) = -B' e^{-At} W_c^{-1}(t_1)(x_0 - e^{-At_1} x_1), \quad t \in [0, t_1], \quad (3.4.3)$$

则根据式(3.2.1)可得

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} Bu(t) dt \\ &= e^{At_1} x_0 - \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} BB' e^{-At} dt \right) W_c^{-1}(t_1)(x_0 - e^{-At_1} x_1) \\ &= e^{At_1} x_0 - e^{At_1} \left(\int_0^{t_1} e^{-At} BB' e^{-At} dt \right) W_c^{-1}(t_1)(x_0 - e^{-At_1} x_1) \\ &= e^{At_1} x_0 - e^{At_1} x_0 + x_1 \\ &= x_1. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

根据定义, Σ 是可控的。

我们通过反证法来进行反方向的证明。假设 Σ 是可控的, 但是 $W_c(t)$ 对某个 $t > 0$ 是奇异的, 事实上可以证明, 这意味着 $W_c(t_1)$ 对所有 $t_1 > 0$ 是奇异的, 则存在一个非零的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$x_0' W_c(t_1) x_0 = 0, \quad (3.4.5)$$

因而可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_1} x_0' e^{-At} BB' e^{-At} x_0 dt \\ &= \int_0^{t_1} (B' e^{-At} x_0)' (B' e^{-At} x_0) dt \\ &= \int_0^{t_1} |B' e^{-At} x_0|^2 dt, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

这意味着

$$B'e^{-At}x_0 = 0, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.4.7)$$

因为 Σ 是可控的, 对于任何 x_1 , 根据定义, 存在一个控制 $u(t)$ 使得

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu(t)dt. \quad (3.4.8)$$

特别对 $x_1=0$, 我们有

$$0 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{-At}Bu(t)dt, \quad (3.4.9)$$

或者

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-At}Bu(t)dt, \quad (3.4.10)$$

联系到式(3.4.7), 可得

$$\|x_0\|^2 = x_0'x_0 = \left[-\int_0^{t_1} e^{-At}Bu(t)dt\right]'x_0 = -\int_0^{t_1} u'(t)B'e^{-At}x_0dt = 0.$$

和假设 $x_0 \neq 0$ 相矛盾。因此, 对 $W_c(t)$, 所有 $t > 0$ 是非奇异的。 ■

定理 3.4.2 由式(3.4.1)给定的系统 Σ 是可控的, 当且仅当

$$\text{rank}(Q_c) = n, \quad (3.4.11)$$

其中

$$Q_c := [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (3.4.12)$$

被称为 Σ 的可控矩阵。

证明 我们再次应用反证法。假设 $\text{rank}(Q_c) = n$, 但 Σ 是不可控的, 则根据定理 3.4.1 可知

$$W_c(t) = \int_0^{t_1} e^{-At}BB'e^{-At}dt, \quad \forall t_1 > 0 \quad (3.4.13)$$

对某个 $t_1 > 0$ 是奇异的。同样, 根据定理 3.4.1 证明中的等式(3.4.7)可知, 存在一个非零的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$x_0'e^{-At}B = 0, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.4.14)$$

对式(3.4.14)求关于 t 的导数, 并令 $t=0$ 可得

$$x_0'B = 0, \quad x_0'AB = 0, \quad \cdots, \quad x_0'A^{n-1}B = 0, \quad (3.4.15)$$

或

$$x_0'[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = x_0'Q_c = 0, \quad (3.4.16)$$

联系到 $x_0 \neq 0$ 的事实, 可推出 $\text{rank}(Q_c) < n$ 。显然导致矛盾, 因此 Σ 是可控的。

反过来, 我们要证明: 如果 Σ 是可控的, 则 $\text{rank}(Q_c) = n$ 。如果 Σ 是可控的, 但是 $\text{rank}(Q_c) \neq n$, 即 $\text{rank}(Q_c) < n$, 则存在一个非零的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $x_0'Q_c = 0$, 即

$$x_0'B = 0, \quad x_0'AB = 0, \quad \cdots, \quad x_0'A^{n-1}B = 0. \quad (3.4.17)$$

根据式(2.3.33)描述的 Cayley-Hamilton 定理, 有

$$x_0'A^k B = 0, \quad k = n, n+1, \cdots \quad (3.4.18)$$

所以

$$x_0' e^{-At} B = 0 \quad (3.4.19)$$

和

$$x_0' \left(\int_0^t e^{-At} B B' e^{-A't} dt \right) x_0 = x_0' W_c(t) x_0 = 0, \quad (3.4.20)$$

这意味着 $W_c(t)$ 对所有 $t > 0$ 是奇异的, 因此根据定理 3.4.1, 给定系统 Σ 是不可控的。导致矛盾, 所以 Q_c 必须满秩。 ■

定理 3.4.3 由式(3.4.1)给定的系统 Σ 是可控的, 当且仅当对 A 的每个特征值 λ_i , $i=1, 2, \dots, n$, 都满足

$$\text{rank}[\lambda_i I - A \quad B] = n. \quad (3.4.21)$$

这个定理就是 PBH (Popov-Belevitch-Hautus) 检验, 由 Popov^[109], Belevitch^[11], Hautus^[63] 发现。

证明 如果 Σ 是可控的, 我们将证明式(3.4.21)成立。再次利用反证法。假设式(3.4.21)对可控的 Σ 不成立, 即对某些 λ_i ,

$$\text{rank}[\lambda_i I - A \quad B] < n, \quad (3.4.22)$$

这样就存在一个非零的 $v \in \mathbb{C}^n$, 使得

$$v'[\lambda_i I - A \quad B] = 0 \Rightarrow v'A = \lambda_i v', \quad v'B = 0,$$

这意味着

$$v'AB = \lambda_i v'B = 0, \quad v'A^2B = \lambda_i v'AB = 0, \quad \dots, \quad v'A^{n-1}B = 0.$$

所以

$$v'[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = v'Q_c = 0,$$

或 $\text{rank}(Q_c) < n$, 即 Σ 是不可控的。这个矛盾证明式(3.4.21)的确成立。

反方向的证明需要进行状态变换, 以把给定系统变换到某个特殊的形式。例如, 把给定系统变换到第 4 章的定理 4.4.1 中所谓的可控结构分解(CSD)形时, 结果就显而易见了。我们把细节留给感兴趣的读者。 ■

我们注意到, 定理 3.4.3 建立了系统可控性和系统矩阵 A 的特征结构之间的联系。如果 A 的特征值都满足式(3.4.21)的条件, 系统就是可控的。另一方面, 如果 A 有一个或更多的特征值不满足式(3.4.21)的条件, 系统就是不可控的。因此, 我们称 A 中满足式(3.4.21)的特征值为可控模态, 否则就是不可控模态。在许多控制系统设计方法中, 并不一定需要给定系统是可控的。如果系统所有的不可控模态是稳定的, 也可以很好地控制它。可以通过合适的状态反馈控制使它稳定, 这样的系统就称为可镇定的。为了在后面参考方便, 我们正式定义可镇定的概念。

定义 3.4.2 如果所有不可控模态是渐近稳定的, 式(3.4.1)描述的系统 Σ 就是可镇定的, 否则称 Σ 是不可镇定的。

我们有以下的定理。

定理 3.4.4 对式(3.1.1)给定的系统 Σ , 下面两点是等价的:

1. 矩阵对 (A, B) 是可镇定的;
2. 存在一个 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 所形成的状态反馈律

$$u = Fx \quad (3.4.23)$$

可使闭环系统渐近稳定, 即 $A + BF$ 的所有特征值都在 \mathbb{C}^- 中。

证明 只要能够建立第4章的定理4.4.1, 就可以使结果很明显了, 所以在此忽略证明细节。 ■

类似地, 对于下面的无驱动系统 Σ , 我们引入可观性和可检测性的概念,

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx, \quad (3.4.24)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, A$ 和 C 是具有适当维数的定常矩阵。原则上, 如果只利用测量输出 y 就可以重构(或观测)状态变量 x , 就称式(3.4.24)描述的系统是可观的。我们有以下更确切的定义。

定义 3.4.3 如果存在一个时间 $t_1 > 0$, 使得任何初始状态 $x(0) = x_0$ 都可以从测量输出 $y(t), t \in [0, t_1]$ 中惟一确定, 就称式(3.4.24)描述的系统 Σ 是可观的; 否则, 称 Σ 是不可观的。

我们有下面的结果。

定理 3.4.5 由式(3.4.24)给定的系统 Σ 是可观的, 当且仅当矩阵

$$W_o(t) := \int_0^t e^{A\tau} C' C e^{A\tau} d\tau \quad (3.4.25)$$

对所有 $t > 0$ 是非奇异的。 $W_o(t)$ 被称为 Σ 的可观测 Grammian 矩阵。

证明 如果对于某 $t_1 > 0, W_o(t_1)$ 是非奇异的, 则通过以下的方式把初始状态 x_0 从测量输出 $y(t)$ 中计算出来:

$$W_o^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} e^{A\tau} C' y(\tau) d\tau = W_o^{-1}(t_1) \left(\int_0^{t_1} e^{A\tau} C' C e^{A\tau} d\tau \right) x_0 = x_0.$$

因此, Σ 是可观的。

相反地, 如果 Σ 是可观的, 我们需要证明 $W_o(t)$ 对所有 $t > 0$ 是非奇异的。我们将采用反证法来证明。假设 Σ 是可观的, 但是 $W_o(t)$ 对某 $t > 0$ 是奇异的, 这实际上意味着 $W_o(t_1)$ 对所有 $t_1 > 0$ 都是奇异的, 则存在一个非零初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$0 = x_0' W_o(t_1) x_0 = \int_0^{t_1} x_0' e^{A\tau} C' C e^{A\tau} x_0 d\tau = \int_0^{t_1} y'(\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} |y(\tau)|^2 d\tau,$$

这等价于 $y(t) \equiv 0, t \in [0, t_1]$ 。这就不可能确定非零的初始状态, 根据定义可得, Σ 是不可观的。这个矛盾证明 $W_o(t)$ 对所有 $t > 0$ 是非奇异的。 ■

注 3.4.1 在检验可观性时, 我们已经假设 $u \equiv 0$ 和考虑式(3.4.24)描述的非驱动系统。这并没有损失一般性。在 $u \neq 0$ 的情况下, 只要把 $y(t)$ 替换成

$$\bar{y}(t) := y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau - D u(t) = C e^{At} x(0),$$

证明过程还是正确的。

下面检验式(3.4.2)中的 $W_c(t)$ 和式(3.4.25)中的 $W_o(t)$, 以及定理 3.4.1 和定理 3.4.5 之间的对偶性。很显然, 式(3.4.24)描述的系统 Σ 是可观的, 当且仅当辅助(对偶)系统

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} \tilde{u} := -A' \tilde{x} + C' \tilde{u} \quad (3.4.26)$$

是可控的。利用定理 3.4.2 和定理 3.4.3 可有下面的结果。

定理 3.4.6 式(3.4.24)描述的系统 Σ 是可控的, 当且仅当下面两点之一成立:

1. Σ 的可观矩阵

$$Q_o := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4.27)$$

是满秩的, 即 $\text{rank}(Q_o) = n$ 。

2. 对于 A 的每个特征值 $\lambda_i, i=1, 2, 3, \dots, n$,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n. \quad (3.4.28)$$

类似地, A 的满足式(3.4.28)和那些不满足式(3.4.28)的特征值分别叫做 Σ 的可观模态和不可观模态。下面是系统可检测的定义。

定义 3.4.4 如果所有的不可观模态是稳定的, 则称式(3.4.24)所描述的系统 Σ 是可检测的, 否则就是不可检测的。

可镇定和可检测的概念是很重要的, 因为这是用测量反馈控制律来稳定给定系统的必要和充分条件。我们有下面的结果。

定理 3.4.7 对于式(3.1.1)描述的系统 Σ , 下面的叙述是等价的:

1. 矩阵对 (A, C) 是可检测的;
2. 存在一个 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 使得 $A + KC$ 的所有特征值都在 \mathbb{C}^- 中。

除此以外, 动态系统方程

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + Bu - K(y - C \hat{x} - Du), \quad \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.4.29)$$

在不知道初始条件 x_0 的情况下, 只需要利用系统输出和控制输入就可以渐近估计系统的状态轨迹 $x(t)$, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $e(t) := x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ 。动态方程(3.4.29)通常被称为 Σ 的状态观测器或估计器。

证明 我们还是要省略两点之间等价性的证明细节。利用第 4 章的定理 4.3.1 所给出的关于矩阵对 (A, C) 的观测器结构分解可以很容易地证明。余下部分的证明就很直截了当了。

从式(3.1.1)和式(3.4.29)可得

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A + KC)e. \quad (3.4.30)$$

显然,只要 $A + KC$ 是渐近稳定的,当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $e(t) \rightarrow 0$. ■

用式(3.4.29)中的 \hat{x} 代替状态反馈律(3.4.23)中的 x ,我们就得到所谓的基于全阶观测器的输出反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BF + KC + KDF)\hat{x} - Ky, \\ u = F\hat{x}, \end{cases} \quad (3.4.31)$$

它的动态阶等于 Σ 的阶次 n . 把式(3.1.1)描述的系统 Σ 和控制律(3.4.31)组合在一起的闭环系统可写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ -KC & A + BF + KC \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}. \quad (3.4.32)$$

注意到

$$\begin{bmatrix} A & BF \\ -KC & A + BF + KC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A + KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}^{-1},$$

显然,只要 $A + BF$ 和 $A + KC$ 的所有特征值都在 C^- 中,式(3.4.32)所示的闭环系统就是渐近稳定的.我们注意到,观测器或状态估计器的结构是非惟一的.下面是 Luenberger^[94] 提出的更一般的状态观测器:

$$\dot{v} = Pv + My + Nu, \quad v \in \mathbb{R}^r, \quad (3.4.33)$$

这是对 $Tx(t)$ 的一个估计, $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 是一个常数矩阵,只要 P 是一个稳定的矩阵,以及

$$TA - PT = MC, \quad N + MD = TB, \quad (3.4.34)$$

令 $e := v - Tx$,我们有

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{v} - T\dot{x} = (MC - TA)x + Pv + (N + MD - TB)u \\ &= Pe + (MC + PT - TA)x + (N + MD - TB)u = Pe. \end{aligned}$$

这样,当 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $e(t) \rightarrow 0$.

最后,我们以对离散时间系统(3.1.3)的可控性(可镇定性)和可观性(可检测性)概念的一些说明来结束这一节,这些都是和连续时间系统相对应的.特别是定理 3.4.2、定理 3.4.3 和定理 3.4.6 的结果,都可以直接应用到离散时间系统中.

3.5 系统可逆性

系统可逆性的问题在许多常见的线性系统理论教科书中并没有涉及,尽管它对几乎每个控制问题都是至关重要的.事实上,对线性时不变系统可以很自然地引出系统可逆

性的概念。回顾式(3.1.1)所描述的通常的非严格正则连续时间系统 Σ , 它有式(3.1.2)所给出的传递函数

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.5.1)$$

不失一般性, 我们假设 $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 都是满秩的。定义 Σ 的可逆性如下。

定义 3.5.1 考虑式(3.1.1)所描述的连续时间系统 Σ , 则

1. 如果存在一个 s 的有理矩阵函数, 比如说是 $L(s)$, 使得

$$L(s)H(s) = I_m, \quad (3.5.2)$$

则称 Σ 是左可逆的。

2. 如果存在一个 s 的有理矩阵函数, 比如说是 $R(s)$, 使得

$$H(s)R(s) = I_p, \quad (3.5.3)$$

则称 Σ 是右可逆的。

3. 如果它既是左可逆又是右可逆的, 则称 Σ 是可逆的。

4. 如果它既不是左可逆又不是右可逆的, 则称 Σ 是退化(degenerate)的。

根据定义可得: 一个可逆系统必须是一个方的系统, 即系统输入数 m 和系统输出数 p 是相等的。然而, 一个方的系统并不一定是可逆的。遗憾的是, 文献中通常混淆了可逆性和方的系统, 许多人认为方的系统就是可逆的。我们通过下面的例子来说明事实不是这样的。

例 3.5.1 考虑式(3.1.1)描述的系统 Σ , 它的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5.4)$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5.5)$$

注意, 矩阵 B 和 C 都是满秩的。它是可控和可观的, 传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{s^3 - 3s^2 + s} \begin{bmatrix} (s-1)^2 & s-1 \\ s-1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5.6)$$

很显然, 尽管它是方的, 但是 $H(s)$ 的行列式恒为零, 所以是退化的。

在时间域中, 对左可逆和右可逆的解释如下(见参考文献[102]和[122])。对于左可逆系统 Σ , 在初始条件 x_0 下, 根据 Σ 所产生的输出 y 可以解出惟一的可产生给定输出 y 的控制信号 u 。对于右可逆系统 Σ , 给定任何信号 $y_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^p$, 都可以对 Σ 确定一个控制输入 u 和一个初始条件 x_0 , 使得输出 $y = y_{\text{ref}}$ 。

进一步可注意到, 存在一些和线性系统左和右可逆相关联的结构, 也就是一些整数指

数。然而,不利用系统的特殊结构形就没有办法引入这些概念。我们将在下一节介绍 Σ 的系统矩阵的 Kronecker 规范形时来讨论这个问题。

最后,离散时间系统可逆性的概念和连续时间系统是完全相同的。

3.6 常态秩、有限零点和无限零点

线性系统的有限零点(也称为不变零点或传输零点)和无限零点(也称为相对阶)结构在现代控制理论中发挥了重要的作用。众所周知,闭环系统的极点位置决定了控制系统的主要性能,如瞬态响应和调整时间。所幸的是,只要开环系统是可控和可观的,闭环系统极点在复平面上的位置就可以随意地配置。另一方面,我们现在也已经清楚地知道有限零点的位置对闭环系统的整体性能有重要的影响。例如,一个非最小相位零点(或不稳定的不变零点)对许多控制系统的性能带来约束。不幸的是,有限零点或不变零点在任何状态反馈下都是不变的,所以不好的零点在闭环系统中仍然保留着。我们认为,正确地理解零点结构对设计控制系统是非常关键的。

不变零点和无限零点(相对阶)的概念对单输入和单输出(SISO)系统来说比较简单。例如,对于具有下面传递函数的 SISO 系统

$$H(s) = \frac{s(s+1)}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}, \quad (3.6.1)$$

很容易发现,系统在 $s=0$ 和 $s=-1$ 分别有两个有限零点,相对阶为 1。对于一般的多输入和多输出(MIMO)系统,有限和无限零点的概念可以非常复杂。文献中对这些零点的定义存在错误。我们在正式地定义 MIMO 系统不变零点之前,需要引入系统常态秩(normal rank)的概念。

定义 3.6.1 考虑式(3.1.1)描述的系统 Σ ,定义它的传递函数 $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ 的常态秩为,或简记为 $\text{normrank}\{H(s)\}$,

$$\text{normrank}\{H(s)\} = \max\{\text{rank}[H(\lambda)] \mid \lambda \in \mathbb{C}\}. \quad (3.6.2)$$

例如,例 3.5.1 中的系统有一个 2×2 的传递矩阵,但是它的常态秩只是 1。很快就會看到,只要我们掌握了后面章节中的结构分解技术,系统常态秩的计算就很直接了。

下面我们可以引入由式(3.1.1)所给定的一般系统,即由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所组成的系统的不变零点的概念。可通过所谓的(Rosenbrock)系统矩阵^[112],即

$$P_{\Sigma}(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (3.6.3)$$

的 Kronecker 规范形来引入不变零点的概念。

在不考虑零点的结构重数(见[96])的情况下,我们有下面关于不变零点及阻塞零点

(见[156])的定义,其中,阻塞零点在多变量线性系统的强镇定方面有很重要的作用。

定义 3.6.2 考虑式(3.1.1)描述的系统 Σ , 如果

$$\text{rank}\{P_{\Sigma}(\beta)\} < n + \text{normrank}\{H(s)\}, \quad (3.6.4)$$

则标量 $\beta \in \mathbb{C}$ 是 Σ 的不变零点。如果 $H(\beta) \equiv 0$, 则 $\beta \in \mathbb{C}$ 是 Σ 的阻塞零点。

当给定的系统是非退化时(译者注:原文误为可控和可观),我们注意到,不变零点就等价于文献中定义的所谓传输零点(如[44,45])。

显然,一个阻塞零点就是不变零点,但是对 MIMO 系统来说,一个不变零点不一定是阻塞零点。然而对 SISO 系统都是相同的。有趣的是,文献中还有其他类型的零点定义,如输入解耦零点,即矩阵对 (A, B) 的不可控模态;输出解耦零点,即矩阵对 (A, C) 的不可观模态;输入—输出解耦零点,即 A 的不可控和不可观特征值。这些零点的集合,包括不变零点和阻塞零点,通称为 Σ 的系统零点。

由定义可见,如果 β 是 Σ 的不变零点,则存在一个非零矢量 $x_R \in \mathbb{C}^n$ 和一个矢量 $w_R \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$P_{\Sigma}(\beta) \begin{pmatrix} x_R \\ w_R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \beta I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ w_R \end{pmatrix} = 0. \quad (3.6.5)$$

这里把 x_R 和 w_R 分别称为 Σ 的和不变零点 β 相关联的右状态零点方向和右输入零点方向。下面的性质给出了不变零点和零点方向的物理意义。

性质 3.6.1 令 β 是 Σ 的不变零点,有相应的右状态零点方向 x_R 和右输入零点方向 w_R 。令 Σ 的初始状态为 $x_0 = x_R$, 系统的输入为

$$u(t) = w_R e^{\beta t}, \quad t \geq 0, \quad (3.6.6)$$

则 Σ 的输出始终为零,即 $y(t) = 0, t \geq 0$, 以及

$$x(t) = x_R e^{\beta t}, \quad t \geq 0. \quad (3.6.7)$$

这意味着,在适当的初始条件下,在某适当方向和频率下的系统输入信号将完全不能在系统输出中出现。

证明 首先,式(3.6.5)很显然地等价于

$$Ax_R + Bw_R = \beta x_R, \quad Cx_R + Dw_R = 0. \quad (3.6.8)$$

我们下面直接验证式(3.6.7)是式(3.1.1)描述的系统 Σ 在初始条件 $x_0 = x_R$ 和式(3.6.6)所示的输入信号 $u(t)$ 下的解。根据式(3.6.6)中的 $u(t)$ 和式(3.6.7)中的 $x(t)$, 我们的确可以得到

$$Ax + Bu = Ax_R e^{\beta t} + Bw_R e^{\beta t} = (Ax_R + Bw_R)e^{\beta t} = \beta x_R e^{\beta t} = \dot{x}. \quad (3.6.9)$$

因此, $x(t)$ 就是 Σ 的满足初始条件 $x(0) = x_R$ 的状态方程的解。不仅如此,式(3.6.7)中的 $x(t)$ 还是惟一的解(见 3.2 节)。接下来有

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = (Cx_R + Dw_R)e^{\beta t} \equiv 0, \quad t \geq 0. \quad (3.6.10)$$

至此,已完成了性质 3.6.1 的证明。 ■

Σ 的无限零点结构既可以用相关的根轨迹理论来定义(参见[105]),又可以用传递函

数在无穷远处的 Smith-McMillan 零点来定义(参见[41]、[110]、[112]和[146])。为定义 $H(s)$ 在无穷远处的零点结构,利用传递函数矩阵 $H(s)$ 在有限频率处零点结构的 Smith-McMillan 描述,即如果传递函数 $H(s)$ 有一个 k 阶无限零点的话,则 $H(1/z)$ 在 $z=0$ 有同样阶次的有限零点。在无穷远处,零点的个数和阶次共同定义了无限零点的结构。

然而,我们在下面要对系统矩阵 $P_\Sigma(s)$ 引入著名的 Kronecker 规范形,它可以同时显示 Σ 的不变零点结构、可逆结构和无限零点结构。尽管这并不是一件简单的事情(对高阶动态系统是非常困难的),可以证明(见 Gantmacher^[56]),存在非奇异的变换 U 和 V ,使得 $P_\Sigma(s)$ 可以被分解为

$$UP_\Sigma(s)V = \begin{bmatrix} \text{blkdiag}\{sI - J, L_{l_1}, \dots, L_{l_{p_b}}, R_{r_1}, \dots, R_{r_{m_c}}, I - sH, I_{m_0}\} & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6.11)$$

如果系统存在冗余的输入和输出,0 就是对应的零元素矩阵, $sI - J$ 有以下 $\sum_{i=1}^{\delta} \tau_i$ 个矩阵束(pencil) 作为对角块,

$$sI_{n_{\beta_i,j}} - J_{n_{\beta_i,j}}(\beta_i) := \begin{bmatrix} s - \beta_i & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & s - \beta_i & -1 \\ & & & & & & s - \beta_i \end{bmatrix}, \quad (3.6.12)$$

$j=1, 2, \dots, \tau_i, i=1, 2, \dots, \delta; L_{l_i}, i=1, 2, \dots, p_b$ 是一个 $(l_i+1) \times l_i$ 的双对角矩阵束,

$$L_{l_i} := \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & s & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & & s \end{bmatrix}, \quad (3.6.13)$$

$R_{r_i}, i=1, 2, \dots, m_c$ 是一个 $r_i \times (r_i+1)$ 的双对角矩阵束,

$$R_{r_i} := \begin{bmatrix} s & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & s & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.6.14)$$

H 是幂零和 Jordan 形的, $I - sH$ 有以下 m_d 的矩阵束作为对角块

$$I_{q_i+1} - sJ_{q_i+1}(0) := \begin{bmatrix} 1 & -s & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & -s \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad q_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_d, \quad (3.6.15)$$

最后, I_{m_0} 中的 m_0 是 D 的秩,即 $m_0 = \text{rank}(D)$ 。

我们有以下的定义。

定义 3.6.3 考虑由式(3.1.1)给出的系统 Σ , 它的系统矩阵 $P_\Sigma(s)$ 具有式(3.6.11)~式(3.6.15)定义的 Kronecker 形, 则有

1. β_i 是 Σ 的几何重数为 τ_i , 代数重数为 $\sum_{j=1}^{\tau_i} n_{\beta_i, j}$ 的不变零点, 它的零点结构是

$$S_{\beta_i}^*(\Sigma) := \{n_{\beta_i, 1}, n_{\beta_i, 2}, \dots, n_{\beta_i, \tau_i}\}. \quad (3.6.16)$$

如果 $n_{\beta_i, 1} = \dots = n_{\beta_i, \tau_i} = 1$, 则称 β_i 是一个简单不变零点。

2. 定义 Σ 的左可逆结构为

$$S_L^*(\Sigma) := \{l_1, l_2, \dots, l_{p_b}\}. \quad (3.6.17)$$

3. 定义 Σ 的右可逆结构为

$$S_R^*(\Sigma) := \{r_1, r_2, \dots, r_{m_c}\}. \quad (3.6.18)$$

4. 最后, m_0 是 Σ 的零阶无限零点的个数。定义 Σ 的阶次高于零阶的无限零点结构为

$$S_\infty^*(\Sigma) := \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}. \quad (3.6.19)$$

我们说, Σ 有 m_d 个阶次分别为 q_1, q_2, \dots, q_{m_d} 的无限零点。如果 $q_1 = \dots = q_{m_d}$ 和 $m_0 = 0$, 则称 Σ 有一致(uniform)的秩 q_1 。另一方面, 如果 $m_0 > 0$ 和 $S_\infty^*(\Sigma) = \emptyset$, 则称 Σ 具有一致的秩 0。

我们注意到, 所有的不变零点 $\beta_i, i = 1, 2, \dots, \delta$ 和相应的零点结构构成了 Morse I_1 列^[100]。此外, S_R^*, S_L^* 和 S_∞^* 分别对应了 Morse I_2, I_3 和 I_4 列。同时也注意到, 如果 $S_R^* = \emptyset$, 则 Σ 是左可逆的; 如果 $S_L^* = \emptyset$, 则是右可逆的。如果 S_R^* 和 S_L^* 都是空的, 则系统是可逆的, 用后面章节的技术来计算这些指数是非常简单的。我们用下面的例子来说明这些结构。

例 3.6.1 考虑式(3.1.1)描述的系统 Σ , 系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6.20)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6.21)$$

可以证明(采用第 5 章 5.6 节的技术), 采用下面的变换

这样就可以得到 $S_1^*(\Sigma) = \{2\}$, $S_L^*(\Sigma) = \{2\}$, $S_R^*(\Sigma) = \{1\}$, $S_\infty^*(\Sigma) = \{1, 2\}$, 即 Σ 在 $s=1$ 有一个非简单的不变零点, 阶次分别为 1 和 2 的两个无限零点。因为 $S_L^*(\Sigma)$ 和 $S_R^*(\Sigma)$ 非空, 所以 Σ 是退化的。

同样地, 我们注意到, 刚才的连续时间系统结构特性, 如有限零点和无限零点结构, 以及可逆结构, 都可以很容易地推广到离散时间系统。

3.7 几何子空间

线性系统和控制理论的几何方法在过去的几十年中得到了很多的关注。它始于 20 世纪 70 年代, 并在 80 年代很快发展成熟, 当时人们试图解决干扰解耦问题和几乎干扰解耦问题, 即需要设计适当的控制律, 以使外部的干扰对被控输出的影响等于零或接近于零 (见 Basile 和 Marro^[9], Schumacher^[126], Willems^[151, 152], Wonham^[154], Wonham 和 Morse^[155])。实际上, 线性系统理论中的大部分概念都可以很完美地在几何框架下给出 (可以参考 Wonham 的经典著作^[154] 和最近的 Trentelman 等的著作^[141])。用几何方法可以很简洁地表示线性系统中的抽象概念, 但是理论体系中的各种子空间却很难显式地计算出来。

在这一节里, 我们着重介绍文献中常见的一些几何子空间的基本概念, 如弱不可观子空间和强可控子空间。这些几何子空间在求解许多控制问题时都起着重要作用, 如干扰解耦、 H_2 和 H_∞ 控制。我们将在后面证明, 利用第 5 章的结构分解技术可以很容易地得到这些子空间。

考虑由式 (3.1.1) 给出的连续时间系统 Σ , 并首先关注弱不可观子空间。根据性质 3.6.1, 存在一个 Σ 的初始状态, 即右状态零点方向, 和相应的控制信号, 使系统输出始终为零。 Σ 的不变零点的右状态零点方向集合没有覆盖所有这样的初始状态, 而 Σ 的弱不可观子空间却满足这一点。

下面是来自 Trentelman 等^[141] 的弱不可观子空间的定义和性质。

定义 3.7.1 考虑式 (3.1.1) 描述的连续时间系统 Σ 。对 Σ 的一个初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 如果存在一个输入信号 $u(t)$, 使得相应的系统输出对所有 $t \geq 0$ 有 $y(t) = 0$, 则称该初始状态是弱不可观的。 Σ 的所有弱不可观测点的集合所形成的子空间, 就称为 Σ 的弱不可观子空间, 用 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 来表示。

下面的引理会证明, 从位于 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 内的初始条件出发, 在使得输出 $y(t) = 0, t \geq 0$ 的控制输入作用下, Σ 的状态轨迹将始终处在弱不可观子空间 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 内。

引理 3.7.1 令 x_0 是 Σ 的初始状态, 并且 $x_0 \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$, u 是使得对所有 $t \geq 0$, 有系统输出 $y(t) = 0$ 所对应的输入, 则对所有 $t \geq 0$, 状态轨迹 $x(t) \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 。

证明 对任意的 $t_1 \geq 0$, 我们令 $\bar{x}_0 = x(t_1)$ 是 Σ 的一个新初始条件, 定义一个新的控制输入为 $\bar{u}(t) = u(t+t_1), t \geq 0$ 。根据式 (3.2.1) 可得

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= e^{At} \bar{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau \\
&= e^{At} \left(e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \right) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau + t_1) d\tau \\
&= e^{A(t+t_1)} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t+t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t+t_1} e^{A(t+t_1-\bar{\tau})} B u(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \\
&= e^{A(t+t_1)} x_0 + \int_0^{t+t_1} e^{A(t+t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \\
&= x(t+t_1), \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.7.1}$$

相应的系统输出

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) = Cx(t+t_1) + Du(t+t_1) = y(t+t_1) = 0 \tag{3.7.2}$$

对所有 $t \geq 0$ 成立。根据定义 3.7.1, $\bar{x}_0 = x(t_1) \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 。由于 t_1 是任意的, 所以对所有的 $t \geq 0$, 有 $x(t) \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 。 ■

以下来自参考文献[141]的定理表明, 弱不可观子空间可以用另一种方式来定义。

定理 3.7.1 Σ 的弱不可观子空间 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 等价于满足下面条件的最大子空间 \mathcal{V} :

1. $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \mathcal{V} \subset (\mathcal{V} \times 0) + \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \right\}$ 。

2. 存在一个 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 使得 $(A+BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ 和 $(C+DF)\mathcal{V} = 0$ 。

证明 我们首先证明: 如果 $x_0 \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$, 则 x_0 在满足条件 1 的最大子空间 \mathcal{V} 内。根据引理 3.7.1, 对于给定初始条件 x_0 的系统 Σ , 存在一个 u , 使得所产生的状态 $x(t) \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$, 并且对所有 $t \geq 0$, 有 $y(t) = 0$ 。注意到

$$\dot{x}(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [x(t) - x_0] \in \mathcal{V}^*(\Sigma), \tag{3.7.3}$$

我们有 $\dot{x}(0^+) = Ax_0 + Bu_0 \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 和 $Cx_0 + Du_0 = 0$, 其中 $u_0 = u(0)$, 或等价地

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} u_0 \in (\mathcal{V}^*(\Sigma) \times 0). \tag{3.7.4}$$

所以 x_0 在满足条件 1 的子空间 \mathcal{V} 内。

下面证明: 条件 1 成立隐含着条件 2 成立。令 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ 为任何满足条件 1 的子空间, 选择 $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_n$ 为 \mathbb{R}^n 的一组基, 使得 x_1, x_2, \dots, x_r 是 \mathcal{V} 的一组基。条件 1 意味着存在 $u_i \in \mathbb{R}^m, i=1, 2, \dots, r$, 使得

$$Ax_i + Bu_i \in \mathcal{V}, \quad Cx_i + Du_i = 0. \tag{3.7.5}$$

令 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 $Fx_i = u_i, i=1, 2, \dots, r$, 我们有

$$(A+BF)x_i \in \mathcal{V}, \quad (C+DF)x_i = 0. \tag{3.7.6}$$

因为 x_1, x_2, \dots, x_r 是 \mathcal{V} 的基, 我们有

$$(A+BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}, \quad (C+DF)\mathcal{V} = 0, \tag{3.7.7}$$

或等价地, 条件 1 隐含着条件 2。

最后,我们证明任何满足条件 2 的子空间 \mathcal{V} 是 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 的子空间。令 $x_0 \in \mathcal{V}$ 并选择 $u(t) = Fx(t)$, 则条件 2 表明状态轨迹 $x(t) \in \mathcal{V}$, 并且对所有 $t \geq 0$, 有 $y(t) = Cx(t) + Du(t) = (C + DF)x(t) = 0$ 。因此, 根据定义, $x_0 \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$, 所以 $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 。定理 3.7.1 得证。■

利用定理 3.7.1 的结果, 我们可以进一步定义 Σ 的稳定和不稳定弱不可观子空间。

定义 3.7.2 考虑由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的系统 Σ , 定义 $\mathcal{V}^x(\Sigma)$ 为最大的子空间 \mathcal{V} , 使得

$$(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}, \quad (C + DF)\mathcal{V} = 0, \quad (3.7.8)$$

并且对于 $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $(A + BF)|_{\mathcal{V}}$ 的特征值在 $\mathbb{C}^x \subset \mathbb{C}$ 中。显然, 如果 $\mathbb{C}^x = \mathbb{C}$, 则 $\mathcal{V}^x = \mathcal{V}^*$ 。我们进一步定义, 如果 $\mathbb{C}^x = \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^0$, 则 $\mathcal{V}^- := \mathcal{V}^x$; 如果 $\mathbb{C}^x = \mathbb{C}^+$, 则 $\mathcal{V}^+ := \mathcal{V}^x$ 。

下面的定义描述了一个子空间, 任何从这个子空间内开始的状态轨迹在有限时间内发展到零, 相应的系统输出可以始终为零。这样的子空间叫做 Σ 的可控的弱不可观子空间, 用 $\mathcal{R}^*(\Sigma)$ 表示。

定义 3.7.3 考虑式 (3.1.1) 描述的连续时间系统 Σ 。 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是 Σ 的一个初始状态, 如果存在一个输入信号 $u(t)$ 和 $t_1 > 0$, 使得对所有 $t \in [0, t_1]$, 有系统输出 $y(t) = 0$ 和状态轨迹在 $t = t_1$ 衰减到 $x(t_1) = 0$, 则称该初始状态为可控弱不可观的。 Σ 的所有可控弱不可观的点集合所形成的子空间, 被称为 Σ 的可控弱不可观子空间, 用 $\mathcal{R}^*(\Sigma)$ 表示。

显然, 根据定义 3.7.1 和定义 3.7.3 可得 $\mathcal{R}^*(\Sigma) \subset \mathcal{V}^*(\Sigma)$ 。下面我们引入 Σ 的强可控子空间 $\mathcal{S}(\Sigma)$ 。 \mathcal{S} 和 \mathcal{V} 在 $\mathcal{V}^x(\Sigma^*) = \mathcal{S}^x(\Sigma)^\perp$ 的意义上是对偶的, 其中 Σ^* 由矩阵四元组 (A', B', C', D') 来表征。 \mathcal{S} 的物理解释非常抽象, 可以参考 Trentelman 等的书^[141]。

定义 3.7.4 考虑由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的系统 Σ , 我们定义 Σ 的强可控子空间 $\mathcal{S}^x(\Sigma)$ 为满足

$$(A + KC)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}, \quad \text{im}(B + KD) \subset \mathcal{S} \quad (3.7.9)$$

的最小子空间 \mathcal{S} 。对于某 $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 由映射 $A + KC$ 在商空间 $\mathbb{R}^n / \mathcal{S}$ 所诱导的特征值包含在 $\mathbb{C}^x \subset \mathbb{C}$ 中。如果 $\mathbb{C}^x = \mathbb{C}$, 则令 $\mathcal{S}^* := \mathcal{S}^x$; 如果 $\mathbb{C}^x = \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^0$, 则令 $\mathcal{S}^- := \mathcal{S}^x$; 如果 $\mathbb{C}^x = \mathbb{C}^+$, 则令 $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S}^x$ 。

从定义可以非常直观地看出, 可控弱不可观子空间是弱不可观子空间在强可控子空间中的一部分, 即

$$\mathcal{R}^*(\Sigma) = \mathcal{V}^*(\Sigma) \cap \mathcal{S}^*(\Sigma). \quad (3.7.10)$$

这的确是正确的 (详细证明可参见 Trentelman 等^[141])。另一个常用的子空间 (和 \mathcal{R}^* 配对) 是分布弱不可观子空间 (用 \mathcal{N}^* 表示), 等价于弱不可观子空间和强可控子空间之和, 即

$$\mathcal{N}^*(\Sigma) = \mathcal{V}^*(\Sigma) + \mathcal{S}^*(\Sigma). \quad (3.7.11)$$

最后, 我们再定义两个 Σ 的子空间, 这是 Scherer^[124, 125] 在处理 H_∞ 几乎干扰解耦问题时最先引入的。

定义 3.7.5 对于式(3.1.1)给定的系统 Σ 和任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们定义

$$\mathcal{V}_\lambda(\Sigma) := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid \exists \omega \in \mathbb{C}^m : 0 = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.7.12)$$

$$\mathcal{S}_\lambda(\Sigma) := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid \exists \omega \in \mathbb{C}^{n+m} : \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} \omega \right\}. \quad (3.7.13)$$

如果 λ 是 Σ 的一个不变零点, 则 $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ 就是 Σ 相应的状态零点方向。显然, $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma) = \mathcal{V}_\lambda(\Sigma^*)^\perp$ 。

我们再次强调, 前面所有的几何子空间都可以用第5章的结构分解技术显式地计算出来。事实上, 例3.6.1的系统已经具有所需的形式了, 它的几何子空间可以很容易地得到。我们在下面的例子中给出它的所有子空间。

例 3.7.1 重新考虑例3.6.1的系统 Σ 和 (A, B, C, D) 。可以验证, Σ 的各种几何子空间为

$$\mathcal{V}^*(\Sigma) = \mathcal{V}^+(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V}^-(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{S}^*(\Sigma) = \mathcal{S}^+(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{S}^-(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{R}^*(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{N}^*(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

对于 Σ 的不变零点, $\lambda=1$,

$$\mathcal{V}_\lambda(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{S}_\lambda(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

注意, 在计算 \mathcal{V} 和 \mathcal{S} 时, 我们选择的 F 和 K 为

$$F = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \star & \star & \star \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \star & \star & \star \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \star & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \star \\ 1 & 1 & \star \\ \star & \star & 1 \\ \star & \star & 0 \\ \star & \star & 1 \end{bmatrix},$$

其中“ \star ”是合适的标量, 满足定义 3.7.2 和定义 3.7.4 关于特征值的约束。

在结束这一节的时候我们强调, 对连续时间系统定义的所有几何子空间都可以用于离散时间系统。但是 \mathcal{V}^- 、 \mathcal{S}^- 、 \mathcal{V}^+ 和 \mathcal{S}^+ 除外, 对于这些, 我们要把相关联的 \mathbb{C}^x 改换 $\mathbb{C}^\circ \cup \mathbb{C}^\circ$ (对前两个子空间) 和 \mathbb{C}° (对后两个子空间)。

3.8 状态反馈和输出反馈的特性

可以直接地证明, 在非奇异状态, 输入和输出变换下, 线性时不变系统的稳定性、可控性、可观性、可逆性, 以及有限和无限零点结构都是不变的。实际上, 这个性质使我们在后

面的章节中可以研究出结构分解技术,这就是对给定的系统构造出非奇异的状态、输入和输出变换,使得所有的结构特性都可以明晰地显现出来。尤其是系统的传递函数在任何非奇异的状态变换下保持不变,这导致了系统从频域(传递函数)到时域(状态空间表示)的实现不是惟一的。

在这一节里,我们将研究在前面所提到的系统结构特性在两种操作下的表现,状态反馈和输出馈入,这在系统和控制理论中是经常用到的。给定式(3.1.1)所表示的连续时间系统 Σ ,实施状态反馈就是引入控制律

$$u = Fx + v, \quad (3.8.1)$$

并施加到 Σ 上。所产生的闭环系统可表示为

$$\Sigma_F : \begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + Bv, \\ y = (C + DF)x + Dv, \end{cases} \quad (3.8.2)$$

即它由一个新的矩阵四元组 $(A + BF, B, C + DF, D)$ 来表征。输出馈入和状态反馈的概念是对偶的,但是很难像式(3.8.1)那样显式地表示输出馈入的形式。对于给定的 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$,我们直接把输出馈入的实施当作产生了一个新的系统 Σ_K ,用矩阵四元组 $(A + KC, B + KD, C, D)$ 来表征。

下面的两个定理表明了 Σ 的结构特性在状态反馈和输出馈入下保持不变,包括几何子空间。

定理 3.8.1 考虑由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的系统 Σ ,同时考虑一个状态反馈增益矩阵 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$,则由矩阵四元组 $(A + BF, B, C + DF, D)$ 所表征的系统 Σ_F 具有以下特性:

1. Σ_F 是可控(可镇定)的系统,当且仅当 Σ 是可控(可镇定)的系统;
2. Σ_F 的常态秩和 Σ 的相同;
3. Σ_F 的不变零点结构和 Σ 的相同;
4. Σ_F 的无限零点结构和 Σ 的相同;
5. Σ_F 是(左或右)可逆或退化的,当且仅当 Σ 是(左或右)可逆或退化的;
6. $\mathcal{V}^X(\Sigma_F) = \mathcal{V}^X(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}^X(\Sigma_F) = \mathcal{S}^X(\Sigma)$;
7. $\mathcal{R}^*(\Sigma_F) = \mathcal{R}^*(\Sigma)$ 和 $\mathcal{N}^*(\Sigma_F) = \mathcal{N}^*(\Sigma)$;
8. $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_F) = \mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma_F) = \mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ 。

证明 第1项很明显。第3项和第4项可以从下面的事实中推出:

$$\begin{bmatrix} A + BF - sI & B \\ C + DF & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix}. \quad (3.8.3)$$

第2项和第5项可从下面的简单推演中得出:

$$H_F(s) := (C + DF)(sI - A - BF)^{-1}B + D$$

$$\begin{aligned}
&= (C + DF)(sI - A)^{-1}[I - BF(sI - A)^{-1}]^{-1}B + D \\
&= (C + DF)(sI - A)^{-1}B[I - F(sI - A)^{-1}B]^{-1} + D \\
&= [C(sI - A)^{-1}B + D][I - F(sI - A)^{-1}B]^{-1} \\
&= H(s)[I - F(sI - A)^{-1}B]^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.8.4}$$

因为 $[I - F(sI - A)^{-1}B]^{-1}$ 在复平面上几乎处处是有定义的,所以有第2项和第5项。

对于第6项,从定义就可以知道, \mathcal{V}^x 在状态反馈下是不变的。下面,对任何满足式(3.7.9)的子空间 \mathcal{S} ,我们有

$$(A + KC + BF + KDF)\mathcal{S} = (A + KC)\mathcal{S} + (B + KD)F\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}. \tag{3.8.5}$$

所以, \mathcal{S}^x 在任何状态反馈律下是不变的。

接下来,根据式(3.7.10)和式(3.7.11), \mathcal{R}^* 和 \mathcal{N}^* 在任何状态反馈下都是不变的。这就证明了第7项。

现在来证明第8项,根据 \mathcal{V}_λ 的定义,有

$$\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_F) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid \exists \omega \in \mathbb{C}^m : 0 = \begin{bmatrix} A + BF - \lambda I & B \\ C + DF & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix} \right\},$$

则对任何 $\zeta \in \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_F)$,存在一个 $\omega \in \mathbb{C}^m$,使得

$$0 = \begin{bmatrix} A + BF - \lambda I & B \\ C + DF & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix}$$

或

$$0 = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix},$$

其中, $\tilde{\omega} = F\zeta + \omega$ 。这样 $\zeta \in \mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$,因此 $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_F) \subseteq \mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 。同样地,可以证明 $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma) \subseteq \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_F)$,因此 $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma) = \mathcal{V}_\lambda(\Sigma_F)$ 。用同样的方法可以得到 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma_F) = \mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ 。 ■

定理 3.8.2 考虑一个矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表征的给定系统 Σ ,同时考虑一个输出馈入矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$,则 Σ_K 的矩阵四元组 $(A + KC, B + KD, C, D)$ 有以下性质:

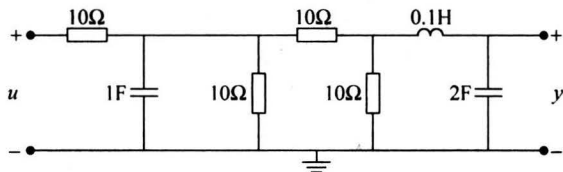
1. Σ_K 是可观(可检测)的系统,当且仅当 Σ 是可观(可检测)的系统;
2. Σ_K 的常态秩和 Σ 的相同;
3. Σ_K 的不变零点结构和 Σ 的相同;
4. Σ_K 的无限零点结构和 Σ 的相同;
5. Σ_K 是(左或右)可逆或退化的,当且仅当 Σ 是(左或右)可逆或退化的;
6. $\mathcal{V}^x(\Sigma_K) = \mathcal{V}^x(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}^x(\Sigma_K) = \mathcal{S}^x(\Sigma)$;
7. $\mathcal{R}^*(\Sigma_K) = \mathcal{R}^*(\Sigma)$ 和 $\mathcal{N}^*(\Sigma_K) = \mathcal{N}^*(\Sigma)$;
8. $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma_K) = \mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 和 $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma_K) = \mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ 。

证明 和定理3.8.1对偶。 ■

注意,定理3.8.1和定理3.8.2对离散时间系统也成立。

3.9 练习

3.1 考虑下面电路中的网络,输入 u 为电压源,输出 y 是 $2F$ 电容两端的电压。假设 $1F$ 和 $2F$ 电容的初始电压分别为 $1V$ 和 $2V$,电感的初始状态是没有充电的。



练习 3.1 的电路图

- 推导网络的状态和输出方程。
- 求网络的单位阶跃响应。
- 求网络的单位脉冲响应。
- 确定网络的稳定性。
- 确定网络的可控性和可观性。
- 确定网络的可逆性。
- 确定网络的有限和无限零点结构。

3.2 给定

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + \alpha e^{-2t} & -e^{-t} + \beta e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix},$$

确定标量 α 和 β 值,以及矩阵 A 和 A^{100} 。

3.3 给定线性系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 和条件 $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, t_1 > 0, t_2 > 0$, 证明

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau = e^{-At_2} x_2 - e^{-At_1} x_1.$$

3.4 给定线性时不变系统 $\dot{x} = Ax + Bu$, 令

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & BB' \\ 0 & -A' \end{bmatrix}.$$

(a) 验证 $e^{\tilde{A}t}$ 的形式为

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} E_1(t) & E_2(t) \\ 0 & E_3(t) \end{bmatrix}.$$

(b) 证明系统的控制 Grammian 矩阵为

$$W_c(t) = \int_0^t e^{-A\tau} B B' e^{-A'\tau} d\tau = E_3'(t) E_2(t).$$

(c) 对 $t=0.1s, 0.5s$ 和 $2s$, 计算练习 3.1 中系统的 $W_c(t)$ 。

3.5 考虑一个不可控的系统 $\dot{x} = Ax + Bu$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, 假设

$$\text{rank}(Q_c) = \text{rank}([B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]) = r < n.$$

令 $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ 是可控性矩阵 Q_c 值域空间的一组基, 令 $\{q_{r+1}, \dots, q_n\}$ 为任何使得

$$T = [q_1 \ q_1 \ \cdots \ q_r \ q_{r+1} \ \cdots \ q_n]$$

是非奇异的矩阵。证明, 状态变换

$$x = T\tilde{x} = T \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_c \in \mathbb{R}^r, \quad \tilde{x}_c \in \mathbb{R}^{n-r}$$

可以把系统变换到

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c \\ \dot{\tilde{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cc} & A_{cc} \\ 0 & A_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

的形式, 其中 (A_{cc}, B_c) 是可控的。证明系统的不可控模态由 $\lambda(A_{cc})$ 给出。

3.6 给定由下面方程描述的不可观系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

求一个状态变换矩阵 T 和新的状态变量 \tilde{x} ,

$$x = T\tilde{x} = T \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_o \end{bmatrix},$$

使得给定系统变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_o \\ \dot{\tilde{x}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{oo} & 0 \\ A_{oo} & A_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_o \end{bmatrix} u, \quad y = [C_o \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_o \end{bmatrix},$$

其中, (A_{oo}, C_o) 是可观的, 而且系统的不可观模态由 $\lambda(A_{oo})$ 给出。

3.7 对下面的系统验证练习 3.5 的结果:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

和

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 & 0 \\ 26 & 36 & -3 & -25 \\ 30 & 39 & -2 & -27 \\ 30 & 43 & -3 & -32 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u.$$

3.8 对下面的系统验证练习 3.6 的结果:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 1 \ 1]x$$

和

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 1 \ 1 \ 1]x.$$

3.9 如果 (A, B) 是不可控的,证明对任何 $\alpha \in \mathbb{R}$, $(A + \alpha I, B)$ 也是不可控的。

3.10 在定理 3.8.1 中已经证明了,定常状态反馈不改变一个线性系统的能控性。通过一个例子证明状态反馈可能会改变系统的可观性。

3.11 定理 3.8.2 同样证明了定常输出馈入不改变一个线性系统的可观性。通过一个例子证明定常输出馈入可能会改变系统的可控性。

3.12 证明系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

是左可逆的。给定一个输出

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \\ e^t - \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

它是由初始条件

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

所产生的。确定产生以上输出 $y(t)$ 的控制输入 $u(t)$, 同时证明这样的控制输入是惟一的。

3.13 证明系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 1 \ 0]x$$

是右可逆的。找出一个初始条件 $x(0)$ 和一个控制输入 $u(t)$, 共同产生一个输出

$$y(t) = a \cos \omega t, \quad t \geq 0.$$

证明这样的解是惟一的。

3.14 利用定理 3.8.1 和定理 3.8.2 的结果,选择适当的状态反馈增益矩阵 F 和适当的输出馈入增益 K ,证明练习 3.12 和练习 3.13 的两个系统有一个 2 阶的无限零点,没有不变零点。

3.15 对于练习 3.12 的系统,证明

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{R}^* = \{0\} \quad \text{和} \quad \mathcal{S}^* = \mathcal{N}^* = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3.16 对于练习 3.13 的系统,证明

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{R}^* = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{和} \quad \mathcal{S}^* = \mathcal{N}^* = \mathbb{R}^3.$$

3.17 考虑一个线性系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x,$$

证明它是可逆、可控和可观的。再证明它有两个 1 阶的无限零点(因而常态秩为 2),在 $s=1$ 有一个几何重数为 2 和代数重数为 2 的不变零点。验证该不变零点也是系统的阻塞零点。

3.18 对于练习 3.17 的系统,确定几何子空间 \mathcal{V}^* 、 \mathcal{R}^* 、 \mathcal{S}^* 和 \mathcal{N}^* 。

3.19 证明几何子空间 \mathcal{S}_λ 在任何定常状态反馈下都是不变的。

3.20 证明几何子空间 \mathcal{V}^* 、 \mathcal{V}_λ 和 \mathcal{S}_λ 在任何定常输出馈入下是不变的。

第 4 章 无驱动和 / 或无检测系统的分解

4.1 导论

在这一章里,我们引入以下 3 种类型的线性时不变系统的结构化分解技术。和一般的多变量系统相比,这些系统要相对简单一些。这一章所采用技术的本身是非常有用的,这些技术可作为随后几章所讨论的更一般系统的结构化分解的前奏。本章将考虑以下几个类型的系统:

1. 由定常矩阵 A 描述的自治系统,即

$$\dot{x} = Ax. \quad (4.1.1)$$

2. 由矩阵对 (C, A) 所描述的无驱动系统,即

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx. \quad (4.1.2)$$

3. 由矩阵对 (A, B) 所描述的无检测系统,即

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (4.1.3)$$

这里提一下,系统(4.1.2)和(4.1.3)是相互对偶的。

具体地说,我们先对自治系统(4.1.1)引入稳定性结构分解(SSD)和实 Jordan 分解(RJD);然后给出无驱动系统(4.1.2)的两种分解,即可观结构分解(OSD)和分块对角可观结构分解(BDOSD)。根据对偶原理,对无检测系统(4.1.3)也有两种分解,即可控结构分解(CSD)和分块对角可控结构分解(BDCSD)。这些分解在后面章节里推导关于更复杂的系统的结果很有用,它们可以说是解决许多系统和控制问题的关键,如传感器和执行器的选择(参见[31,92])以及几乎干扰解耦问题(参见[22,23,86])。

4.2 自治系统

考虑如下线性时不变自治系统 Σ :

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2.1)$$

对这样一个自治系统,我们在这一节里给出两种结构化分解,即稳定性结构分解(SSD)和实 Jordan 分解(RJD)。

定理 4.2.1(SSD) 考虑式(4.2.1)中定常矩阵 A 所表征的自治系统 Σ ,存在一个非

奇异变换 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及非负整数 n_- 、 n_0 和 n_+ , 使得

$$T^{-1}AT = \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_- & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.2)$$

其中 $A_- \in \mathbb{R}^{n_- \times n_-}$, $\lambda(A_-) \subset \mathbb{C}^-$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$, $\lambda(A_0) \subset \mathbb{C}^0$, $A_+ \in \mathbb{R}^{n_+ \times n_+}$, $\lambda(A_+) \subset \mathbb{C}^+$ 。SSD 完全分离了稳定动态、不稳定动态, 以及和虚轴上的特征值相关联的动态。

这个变换 T 的存在性可直接从后面的实 Jordan 规范形分解得到。我们接下来要给出一个构造性的算法来实现上面的 SSD。实际上, 在后面的搜寻 Jordan 和实 Jordan 规范形的过程中, 这里的 SSD 可用于改善数值计算条件。

构造过程的关键是受到以下事实的启发: 对一个有不同特征值的方阵, 存在一个非奇异变换, 即相应的特征矢量矩阵, 可对角化所给定的矩阵。把所有的稳定特征值、所有的不稳定特征值和所有的虚轴上特征值都分别归在各自一类中, 这些特征值显然是不同的, 我们就可以计算出各自相应的特征空间, 形成可以把给定矩阵块对角化为式(4.2.2)的变换。下面的构造性算法来自 Chen^[19]。

SSD 步骤 1

利用数值稳定的实 Schur 分解(参见 Golub 和 Van Loan^[59]), 找到一个正交矩阵 $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得对某些整数 k 有

$$P_1^{-1}AP_1 = M = \begin{bmatrix} M_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & M_2 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k \end{bmatrix}, \quad (4.2.3)$$

其中, \star 符号表示无关紧要的矩阵。对每个 $i=1, 2, \dots, k$, M_i 或者是实的标量, 如 $M_i = \mu_i$, 或者是由一对复特征值组成的一个 2×2 矩阵, 如 $\mu_i \pm j\omega_i$ 。而且 $\mu_i, i=1, 2, \dots, k$ 是按以下次序排列的 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$ 。

SSD 步骤 2

令 n_- 、 n_0 和 n_+ 分别为 A 在 \mathbb{C}^- 、 \mathbb{C}^0 和 \mathbb{C}^+ 上特征值的个数, 同时令

$$T_{-0} = P_1 \begin{bmatrix} I_{n_-+n_0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.4)$$

T_{-0} 的列张成了 A 的特征值中非正特征值所对应的整个特征矢量空间。

SSD 步骤 3

再次利用实 Schur 分解来找到另一个正交矩阵 $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$P_2^{-1}(-A)P_2 = Q = \begin{bmatrix} Q_- & \star & \star \\ 0 & Q_0 & \star \\ 0 & 0 & Q_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.5)$$

其中 $\lambda(Q_-) \subset \mathbb{C}^-$, $\lambda(Q_0) \subset \mathbb{C}^0$ 和 $\lambda(Q_+) \subset \mathbb{C}^+$ 。令

$$T_+ = P_2 \begin{bmatrix} I_{n_+} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.6)$$

T_+ 的列张成了 A 的正特征值所对应的整个特征向量空间。

SSD 步骤 4

令

$$T_1 = [T_- \quad T_+], \quad (4.2.7)$$

则

$$T_1^{-1} A T_1 = \begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.8)$$

其中 $\lambda(A_-) \subset \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^0$, $\lambda(A_+) \subset \mathbb{C}^+$ 。

SSD 步骤 5

对矩阵 A_- 再次利用实 Schur 分解, 找到一个正交矩阵 $N_1 \in \mathbb{R}^{(n_- + n_0) \times (n_- + n_0)}$, 使得

$$N_1^{-1} A_- N_1 = \begin{bmatrix} R_- & \star \\ 0 & R_0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.9)$$

其中 $\lambda(R_-) \subset \mathbb{C}^-$, $\lambda(R_0) \subset \mathbb{C}^0$ 。现在定义

$$Z_- = N_1 \begin{bmatrix} I_{n_-} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.10)$$

SSD 步骤 6

对矩阵 $-A_-$ 再利用一次实 Schur 分解, 找到正交矩阵 $N_2 \in \mathbb{R}^{(n_- + n_0) \times (n_- + n_0)}$, 使得

$$N_2^{-1} (-A_-) N_2 = \begin{bmatrix} S_0 & \star \\ 0 & S_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.11)$$

其中 $\lambda(S_0) \subset \mathbb{C}^0$, $\lambda(S_+) \subset \mathbb{C}^+$ 。定义

$$Z_0 = N_2 \begin{bmatrix} I_{n_0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.12)$$

SSD 步骤 7

最后, 令

$$Z_1 = [Z_- \quad Z_0] \text{ 和 } T = T_1 \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_+} \end{bmatrix}. \quad (4.2.13)$$

可以验证

$$T^{-1} A T = \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_- & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.14)$$

其中 $\lambda(A_-) \subset \mathbb{C}^-$, $\lambda(A_0) \subset \mathbb{C}^0$ 和 $\lambda(A_+) \subset \mathbb{C}^+$ 。这样就完成了稳定性结构分解算法。

上面的算法已经在[87]中由 m 函数 `ssd.m` 实现。在处理离散时间系统时,原则上可以对上面的过程加以修改,即重新安排特征值的排序,以得到所需变换,该变换把给定矩阵 A 的特征值分成 3 个部分,分别在 \mathbb{C}° (在单位圆内的复标量集合)、 \mathbb{C}° (在单位圆上的复标量集合)和 \mathbb{C}° (在单位圆外的复标量集合)。问题是要重新编写实 Schur 分解的程序。根据 Chen^[19]的结果,可以利用上面算法得到一个简单方法来找到变换 T ,从而实现这样的分解。令 α 为复平面上单位圆内的一个标量,但不是 A 的特征值,定义一个新的矩阵

$$\bar{A} = \frac{1}{2} [(A + \alpha I)^{-1}(A - \alpha I) + (A + \alpha^* I)^{-1}(A - \alpha^* I)], \quad (4.2.15)$$

其中, α^* 是 α 的复共轭。很容易证明, \bar{A} 是实矩阵。接下来,对 \bar{A} 采用 SSD 步骤 1~SSD 步骤 7,得到变换 T ,使得

$$T^{-1}\bar{A}T = \begin{bmatrix} \bar{A}_- & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.16)$$

其中 $\lambda(\bar{A}_-) \subset \mathbb{C}^-$, $\lambda(\bar{A}_0) \subset \mathbb{C}^0$ 和 $\lambda(\bar{A}_+) \subset \mathbb{C}^+$ 。我们可以证明(见 Chen^[19]),用同样的 T 可以得到

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_- & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.17)$$

其中 $\lambda(A_-) \subset \mathbb{C}^\circ$, $\lambda(A_0) \subset \mathbb{C}^\circ$ 和 $\lambda(A_+) \subset \mathbb{C}^\circ$ 。离散时间系统的稳定性结构分解也在[87]中由 m 函数实现了,就是 `dssd.m`。

我们用下面的例子对方法进行演示。

例 4.2.1 考虑式(4.2.1)描述的自治系统 Σ ,系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2.18)$$

它的特征值在 $0, -1, 1, -2j$ 和 $2j$ 。采用定理 4.2.1 的 SSD 算法,即[87]中的 m 函数 `ssd.m`,我们有

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.57735 & 0.47385 & 0.66493 & 0 & 0.57735 \\ 0 & -0.81277 & 0.07790 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33892 & -0.74283 & 0 & -0.57735 \\ -0.57735 & 0 & 0 & 0.70711 & 0 \\ 0.57735 & 0 & 0 & -0.70711 & 0.57735 \end{bmatrix},$$

利用它就可以得到以下关于 A 的稳定性结构分解

$$T_1^{-1}AT_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.21932 & 3.44308 & 0 & 0 \\ 0 & -1.17572 & -0.21932 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

利用[87]中的 m 函数 `dssd.m` 可得

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.57735 & 0.57735 & 0.78072 & -0.23906 \\ 0 & 0 & 0 & -0.59739 & -0.55659 \\ 0 & 0 & -0.57735 & -0.18332 & 0.79565 \\ 0.70711 & 0.57735 & 0 & 0 & 0 \\ -0.70711 & -0.57735 & 0.57735 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用它得到以下关于 A 的稳定性结构分解

$$T_2^{-1}AT_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1.15182 & -2.39096 \\ 0 & 0 & 0 & 2.22785 & -1.15182 \end{array} \right]$$

下面介绍自治系统的另一种分解,即实 Jordan 分解(RJD)。文献中对变换到 Jordan 规范形时所存在的数值计算困难已有充分的理解。然而, Jordan 形却是研究线性系统的有效工具。

定理 4.2.2(RJD) 考虑式(4.2.1)中由定常矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 所表征的自治系统 Σ , 存在一个非奇异变换 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和整数 k , 使得

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}, \quad (4.2.19)$$

对每个块 $J_i, i=1, 2, \dots, k$, 如果 $\lambda_i \in \lambda(A)$ 是实的, 则有以下的形式:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad (4.2.20)$$

如果 $\lambda_i = \mu_i + j\omega_i, \bar{\lambda}_i = \mu_i - j\omega_i \in \lambda(A)$ 和 $\omega_i > 0$, 则

$$J_i = \begin{bmatrix} \Lambda_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_i & I_2 \\ & & & \Lambda_i \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} \mu_i & \omega_i \\ -\omega_i & \mu_i \end{bmatrix}. \quad (4.2.21)$$

我们可以在许多教科书中找到上面实 Jordan 规范形的推导(如参见 Wonham^[154])。下面,我们要给出一个构造性算法来得到变换 T 。如在第 2 章所指出的那样,数值计算的困难在文献中已经有清楚的记载,但如果能够达到计算上的精确,它还是非常有用的。实 Jordan 形在本书中主要应用在理论分析。

首先是重复地利用定理 4.2.1 的结果,找到一个非奇异和数值条件好的变换 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_\ell \end{bmatrix}, \quad (4.2.22)$$

其中,子矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $i=1,2,\dots,\ell$,有单的重或复的(如果 $n_i > 1$)实特征值 λ_i ; 也有可能是单的重或复的(如果 $n_i > 2$)复特征值对 λ_i 和 λ_i^* 。如果 $i \neq j$,则 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 。这些都可以用下面的过程来实现。

1. 计算 A 的特征值。令 $\lambda_i = \mu_i + j\omega_i$, $\omega_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\ell$,为 A 的所有具有非负虚部的不同特征值,即 $\lambda_i \neq \lambda_k$, $i \neq k$ 。按照 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_\ell$ 对 λ_i 进行排序,如果有 $\mu_k = \mu_{k+1}$,则按照 $\omega_k < \omega_{k+1}$ 对 λ_k 和 λ_{k+1} 进行排序。

2. 令 k 为满足 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k < \mu_{k+1}$ 的一个整数值。定义一个定常矩阵

$$\bar{A} = A - \frac{\mu_k + \mu_{k+1}}{2}I, \quad (4.2.23)$$

它在 \mathbb{C}^- 中有 k 个不同的特征值,所有特征值的实部等于 $(\mu_k - \mu_{k+1})/2$,在虚轴上没有特征值。利用定理 4.2.1 所给出的稳定性结构分解算法,可以找到一个变换 T_1 ,使得

$$T_1^{-1}\bar{A}T_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_- & 0 \\ 0 & \bar{A}_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.24)$$

其中, $\lambda(\bar{A}_-) \subset \mathbb{C}^-$ 和 $\lambda(\bar{A}_+) \subset \mathbb{C}^+$ 。对于这样的变换 T_1 ,有

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{bmatrix} A_{1..k} & 0 \\ 0 & A_{k+1..\ell} \end{bmatrix}, \quad (4.2.25)$$

其中, $A_{1..k}$ 包含了特征值 λ_i , $i=1,2,\dots,k$; $A_{k+1..\ell}$ 包含了特征值 λ_i , $i=k+1,k+2,\dots,\ell$ 。对 $A_{k+1..\ell}$ 重复上面的过程,就可以块对角化 A ,每个块都包含了相同实部的特征值。

3. 对含有不同特征值 $\lambda_i = \mu_i + j\omega_i$, $i=1,2,\dots,k$ 的 $A_{1..k}$,这些特征值已在第 1 步时以 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ 的次序排列了,定义一个定常矩阵

$$\hat{A} = (A + \beta I)^{-1}(A - \beta I), \quad (4.2.26)$$

其中

$$\beta = \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega_1^2} + \sqrt{\mu_1^2 + \omega_2^2}}{2}. \quad (4.2.27)$$

可以证明, \hat{A} 只有一个单独的特征值在 C^- , 所有其他的特征值都在 C^+ 。利用定理 4.2.1 的 SSD 算法, 可以找到一个变换 T_2 , 使得

$$T_2^{-1} \hat{A} T_2 = \begin{bmatrix} \hat{A}_- & 0 \\ 0 & \hat{A}_+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.28)$$

其中, $\lambda(\hat{A}_-) \subset C^-$ 和 $\lambda(\hat{A}_+) \subset C^+$ 。这样的变换 T_2 还能给出

$$T_2^{-1} A_{1,k} T_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_{1,k}^* \end{bmatrix}, \quad (4.2.29)$$

其中, A_1 只含有一个单独的特征值 λ_1 , $A_{1,k}^*$ 有特征值 $\lambda_i, i=2, 3, \dots, k$ 。对 $A_{1,k}^*$ 重复上面的过程, 可以得到一个非奇异变换 $T_{1,k}$, 使得

$$T_{1,k}^{-1} A_{1,k} T_{1,k} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}. \quad (4.2.30)$$

对在第 2 步中得到的所有具有相同实部特征值的块重复上面的过程, 就可以得到式(4.2.22)那样的分块对角形式。

对 λ_i 为实数的每个 A_i , 我们现在利用式(2.3.39)的结果, 得到一个非奇异的变换 $\tilde{S}_i = S_i \in R^{n_i \times n_i}$, 把 A_i 变成 Jordan 规范形。对具有特征值 $\lambda_i = \mu_i + j\omega_i$ 和 $\lambda_i^* = \mu_i - j\omega_i$ 的每个 A_i , 其中 $\omega_i > 0$, 我们仿照 Fama 和 Matthews^[52] 定义一个新的 $(2n_i) \times (2n_i)$ 矩阵

$$Z_i := \begin{bmatrix} A_i - \mu_i I_{n_i} & \omega_i I_{n_i} \\ -\omega_i I_{n_i} & A_i - \mu_i I_{n_i} \end{bmatrix}. \quad (4.2.31)$$

很容易证明, Z_i 在 0 有 n_i 个实特征值, 在 $\pm j2\omega_i$ 有 n_i 个纯虚特征值。定义一个定常矩阵

$$\tilde{Z}_i = (Z_i + \omega_i I)^{-1} (Z_i - \omega_i I), \quad (4.2.32)$$

它在 -1 有 n_i 个特征值, 另有 n_i 个不稳定特征值, 则根据稳定性结构分解定理 4.2.1, 我们得到一个非奇异变换 $S_i^0 \in R^{(2n_i) \times (2n_i)}$, 使得

$$(S_i^0)^{-1} \tilde{Z}_i S_i^0 = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i0} & 0 \\ 0 & \tilde{Z}_{ix} \end{bmatrix}, \quad (4.2.33)$$

其中, \tilde{Z}_{i0} 的所有特征值在 -1, \tilde{Z}_{ix} 只有不稳定的特征值。很容易验证

$$(S_i^0)^{-1} Z_i S_i^0 = \begin{bmatrix} Z_{i0} & 0 \\ 0 & Z_{ix} \end{bmatrix}, \quad (4.2.34)$$

其中, Z_{i0} 的特征值都在 0, 而 Z_{ix} 在 0 没有特征值。下面我们利用式(2.3.39)的结果来得到非奇异变换 $S_i^1 \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, 使得

$$(S_i^1)^{-1} Z_{i0} S_i^1 = \text{blkdiag}\{J_0^1, J_0^1, J_0^2, J_0^2, \dots, J_0^{\sigma_i}, J_0^{\sigma_i}\}, \quad (4.2.35)$$

其中, J_0^m 的形式为, $m=1, 2, \dots, \sigma_i$,

$$J_0^m = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{im}-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.36)$$

让我们划分

$$S_i := S_i^0 \begin{bmatrix} S_i^1 & 0 \\ 0 & I_{n_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i,1}^{1,1} & \dots & S_{i,1}^{1,n_{i1}} & X_{i,1}^{1,1} & \dots & X_{i,1}^{1,n_{i1}} & \dots \\ S_{i,1}^{2,1} & \dots & S_{i,1}^{2,n_{i1}} & X_{i,1}^{2,1} & \dots & X_{i,1}^{2,n_{i1}} & \dots \\ & & S_{i,\sigma_i}^{1,1} & \dots & S_{i,\sigma_i}^{1,n_{i\sigma_i}} & X_{i,\sigma_i}^{1,1} & \dots & X_{i,\sigma_i}^{1,n_{i\sigma_i}} & \star \\ & & S_{i,\sigma_i}^{2,1} & \dots & S_{i,\sigma_i}^{2,n_{i\sigma_i}} & X_{i,\sigma_i}^{2,1} & \dots & X_{i,\sigma_i}^{2,n_{i\sigma_i}} & \star \end{bmatrix}, \quad (4.2.37)$$

其中, $S_{i,m}^{1,k}$ 、 $S_{i,m}^{2,k}$ 、 $X_{i,m}^{1,k}$ 和 $X_{i,m}^{2,k}$ 是 $n_i \times 1$ 实数矢量, $m=1, 2, \dots, \sigma_i$ 和 $k=1, 2, \dots, n_{im}$ 。下面定义一个 $n_i \times n_i$ 的实数矩阵,

$$\tilde{S}_i = [S_{i,1}^{1,1} \quad S_{i,1}^{2,1} \quad \dots \quad S_{i,1}^{1,n_{i1}} \quad S_{i,1}^{2,n_{i1}} \quad \dots \quad S_{i,\sigma_i}^{1,1} \quad S_{i,\sigma_i}^{2,1} \quad \dots \quad S_{i,\sigma_i}^{1,n_{i\sigma_i}} \quad S_{i,\sigma_i}^{2,n_{i\sigma_i}}].$$

最后令

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & & & & & \\ & \tilde{S}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \tilde{S}_t \end{bmatrix}, \quad (4.2.38)$$

和 $T=PS \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。现在就可以直接证明 $T^{-1}AT$ 具有定理 4.2.2 所描述的 Jordan 规范形。该算法已经在[87]中用一个 rjd.m 的 m 函数来实现了。我们用下面的例子来演示上面的结果。

例 4.2.2 考虑一个如式(4.2.1)所描述的自治系统 Σ , 参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ -20 & -4 & -12 & -9 & -16 & -11 \end{bmatrix}. \quad (4.2.39)$$

利用[87]中的 m 函数 rjd.m , 我们得到 A 的一个实 Jordan 规范分解为

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right], \quad (4.2.40)$$

其相应的状态变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.12251 & 0.04504 & -0.07311 & -0.53231 \\ -0.63824 & -0.50617 & 0.26812 & 0.09233 & 0.24639 & -0.13302 \\ -0.13207 & -1.14440 & 0.22084 & 0.48295 & -0.15290 & 0.18649 \\ -0.13207 & -1.14440 & -0.41740 & -0.02322 & -0.15290 & 0.18649 \\ -0.13207 & -1.14440 & 0.08877 & -0.66145 & -0.15290 & 0.18649 \\ 1.03444 & 3.93938 & 0.00090 & -0.01943 & 0.58813 & 0.33547 \end{bmatrix}.$$

4.3 无驱动系统

考虑以下无驱动系统 Σ ,

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx, \quad (4.3.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $y \in \mathbb{R}^p$ 是输出, A 和 C 是具有相应维数的矩阵。这样的系统有许多规范形, 如可观测规范形和观测器规范形(参见 Chen^[33] 和 Kailath^[70])。这些规范形在研究给定系统的可观性时是非常有用的。但是这些规范形还不能充分表现出系统更加内在的结构特性。这一节对无驱动系统(4.3.1)给出两种规范形, 即观测器结构分解(OSD)和分块对角可观结构分解(BDOSD)。这些规范形需要同时进行状态和输出变换。下面的定理描述了 OSD 的特性。

定理 4.3.1 考虑无驱动系统(4.3.1), 其中 C 是满秩的, 则存在非奇异的状态变换 $T_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和非奇异的输出变换 $T_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 使得变换后的状态和输出满足

$$x = T_s \bar{x}, \quad y = T_o \bar{y}, \quad (4.3.2)$$

其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_{i,1} \\ \bar{x}_{i,2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{i,k_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_p \end{bmatrix}, \quad (4.3.3)$$

我们有

$$\dot{\bar{x}}_0 = A_0 \hat{x}_0 + L_0 \bar{y}, \quad (4.3.4)$$

而对 $i=1, 2, \dots, p$, 有

$$\dot{\tilde{x}}_i = A_i \tilde{x}_i + L_i \tilde{y}, \quad \tilde{y}_i = [1 \ 0] \tilde{x}_i, \quad (4.3.5)$$

其中 $L_i, i=1, 2, \dots, p$, 是一些具有适当维数的定常矩阵, 并且

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{k_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.6)$$

矩阵 A_0 的维数为 $n_0 \times n_0$, 其中 $n_0 := n - \sum_{i=1}^p k_i, \lambda(A_0)$ 包含了矩阵对 (C, A) 的所有不可观模态。集合 $\mathcal{O} := \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ 则是 (C, A) 的可观性指数。

定理 4.3.1 的结果可以用以下更加紧凑的方式来表现:

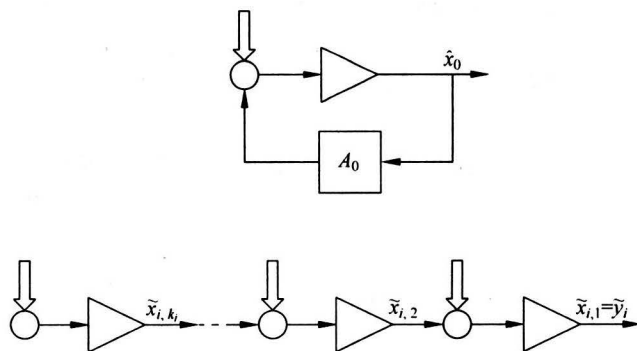
$$T_s^{-1} A T_s = \begin{bmatrix} A_0 & \star & 0 & \cdots & \star & 0 \\ 0 & \star & I_{k_1-1} & \cdots & \star & 0 \\ 0 & \star & 0 & \cdots & \star & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \star & 0 & \cdots & \star & I_{k_p-1} \\ 0 & \star & 0 & \cdots & \star & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

和

$$T_o^{-1} C T_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.8)$$

其中, \star 表示无关紧要的矩阵元素。

OSD 的图形解释示于图 4.3.1 中。



注意: 双边箭头表示的信号是一些 \tilde{y}_i 的线性组合。

图 4.3.1 观测器结构分解的示意图

证明 我们采用给出 OSD 实现的逐步构造算法来证明定理 4.3.1。以下证明的关键是确认内在的积分器链。对于无驱动系统(4.3.1), 我们有

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx, \quad \ddot{y} = CA^2x, \quad \dots, \quad y^{(k)} = CA^kx. \quad (4.3.9)$$

通过对系统输出 y 的重复求导,可以辨识出以积分器链为特征的系统内在结构。

OSD 步骤 1 初始化

由于矩阵 C 是满秩的,我们把它划分为

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix}, \quad (4.3.10)$$

其中, C_i 是相互独立的行矢量, $i=1, 2, \dots, p$ 。对每个 $C_i, i=1, 2, \dots, p$,我们都配对一个变换矩阵 Z_i ,它的初始化为

$$Z_i := C_i. \quad (4.3.11)$$

我们还定义一个标志矢量 f 为

$$f := \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3.12)$$

该矢量将被当成标志用在 OSD 步骤 2 的迭代过程中。注意, f 中的元素将被 0 所替换,最后成为一个零矢量。另一方面, Z_i 的行数将会增加,并形成所需的状态变换矩阵的一部分。在初始化中还设

$$Z := C, \quad (4.3.13)$$

和一个空的矩阵 \tilde{Z} ,它将被用于形成状态变换。这些矩阵都是可变的,即在构造过程中可能增加新的元素。最后令 $w := 0$ 。

OSD 步骤 2 对系统输出重复求导

这一步将不断地重复,直至 f 成为一个零矢量。令

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}. \quad (4.3.14)$$

对每个非零元素 $f_i, i=1, 2, \dots, p$,我们把相应的状态变换矩阵重新写为

$$Z_i = \begin{bmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,2} \\ \vdots \\ C_{i,\alpha_i} \end{bmatrix}, \quad (4.3.15)$$

其中, $\alpha_i = \text{rank}(Z_i)$ 。令 $x_{i,\alpha_i} := C_{i,\alpha_i}x$,则有

$$\dot{x}_{i,a_i} = C_{i,a_i} \dot{x} = C_{i,a_i} A x. \quad (4.3.16)$$

下面的检验是对所有具有非零标志 f_i 的 Z_i 进行的。

情形 1 如果

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Z \\ C_{i,a_i} A \end{bmatrix} > \text{rank}(Z), \quad (4.3.17)$$

这意味着第 i 个输出的积分器链中还有更多的积分器,需要进一步的辨识,所以把 Z 和 Z_i 替换为

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ C_{i,a_i} A \end{bmatrix}, \quad Z_i := \begin{bmatrix} Z_i \\ C_{i,a_i} A \end{bmatrix}, \quad (4.3.18)$$

然后对标志位 $f_i \neq 0$ 的下一个 Z_i 进行检验。

情形 2 如果

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Z \\ C_{i,a_i} A \end{bmatrix} = \text{rank}(Z), \quad (4.3.19)$$

则第 i 个输出的积分链中已经没有更多的积分器了。此时把标志矢量 f 中的标志位 f_i 置换为标量零,表示对该输出变量不再继续求导了,增广 \tilde{Z} 为

$$\tilde{Z} := \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ Z_i \end{bmatrix}, \quad (4.3.20)$$

该矢量将被用于定义新的状态变量。同时令

$$w := w + 1 \text{ 和 } k_w := \alpha_i. \quad (4.3.21)$$

为了后面的参照,我们重新把矩阵写为

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Z}_w \end{bmatrix} \quad (4.3.22)$$

对 $j=1,2,\dots,w$,我们有

$$\tilde{Z}_j = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{j,1} \\ \tilde{C}_{j,2} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{j,k_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{j,1} \\ \tilde{C}_{j,1} A \\ \vdots \\ \tilde{C}_{j,1} A^{k_j-1} \end{bmatrix}. \quad (4.3.23)$$

上面的检验必须对所有标志位 $f_i \neq 0$ 的 Z_i 进行。注意在情形 2 中,标志矢量 f 中有一个元素变成了标量零,因此 f 最终将变成零矢量。

如果 $f=0$,我们开始 OSD 步骤 3,否则回到 OSD 步骤 2。

OSD 步骤 3 初步变换

在 OSD 步骤 2 中, 我们显然已经得到了一组整数值 k_1, k_2, \dots, k_p , 满足 $k_1 \leq$

$k_2 \leq \dots \leq k_p$. 令 $n_0 = n - \sum_{i=1}^p k_i$, S_0 为一个 $n_0 \times n$ 的定常矩阵, 使得

$$S := \begin{bmatrix} S_0 \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \quad (4.3.24)$$

是非奇异的。一般可以选 \tilde{Z} 零空间的基作为 S_0 的行。下面定义一个新的状态变量

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = Sx, \quad (4.3.25)$$

其中

$$\bar{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ \vdots \\ x_{i,k_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (4.3.26)$$

注意, 对 $i=1, 2, \dots, p$,

$$x_{i,1} = \tilde{C}_{i,1}x = \hat{y}_i, \quad (4.3.27)$$

$$x_{i,2} = \tilde{C}_{i,1}Ax, \quad (4.3.28)$$

\vdots

$$x_{i,k_i} = \tilde{C}_{i,1}A^{k_i-1}x, \quad (4.3.29)$$

对一些适当的常数 $\alpha_{i,s,j}$, 我们有

$$\dot{x}_{i,1} = \tilde{C}_{i,1}\dot{x} = \tilde{C}_{i,1}Ax = x_{i,2}, \quad (4.3.30)$$

$$\dot{x}_{i,2} = \tilde{C}_{i,1}A\dot{x} = \tilde{C}_{i,1}A^2x = x_{i,3}, \quad (4.3.31)$$

\vdots

$$\dot{x}_{i,k_i} = \tilde{C}_{i,1}A^{k_i-1}\dot{x} = \tilde{C}_{i,1}A^{k_i}x = \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j}x_{s,j}. \quad (4.3.32)$$

最后一个方程源于前一步中 \tilde{Z} 的构造。同时, 对某些适当的定常矢量 $A_{0,s,j}$, 我们有

$$\dot{\bar{x}}_0 = A_0\bar{x}_0 + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{k_s} A_{0,s,j}x_{s,j}. \quad (4.3.33)$$

OSD 步骤 4 进一步简化式 (4.3.32)

定义一个新的状态变量

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_p \end{pmatrix} = W \bar{x}, \quad (4.3.34)$$

其中 $\tilde{x}_0 = \bar{x}_0$, 对于 $i=1, 2, \dots, p$,

$$\tilde{x}_i := \begin{pmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \tilde{x}_{i,2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{i,k_i} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{i,1} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=k_i+1}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-k_i} \\ x_{i,2} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=k_i}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-k_i+1} \\ \vdots \\ x_{i,k_i} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=2}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-1} \end{pmatrix}, \quad (4.3.35)$$

和一个新的输出变量

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &:= \tilde{x}_{i,1} = x_{i,1} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=k_i+1}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-k_i} \\ &= x_{i,1} - \sum_{s=1}^p \alpha_{i,s,k_i+1} x_{s,1} = \hat{y}_i - \sum_{s=1}^p \alpha_{i,s,k_i+1} \hat{y}_s, \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

这表明 $\tilde{y}_i = \tilde{x}_{i,1}$ 是 \hat{y}_i 的一个线性组合, $i=1, 2, \dots, p$ 。注意在式(4.3.35)和式(4.3.36)的定义中, 当 $k > k_s$ 时, $\alpha_{i,s,k}$ 设为零。这样就有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{i,k_i} &= \dot{x}_{i,k_i} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=2}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} \dot{x}_{s,j-1} \\ &= \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=2}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j} \\ &= \sum_{s=1}^p \alpha_{i,s,1} x_{s,1} = \sum_{s=1}^p \tilde{\alpha}_{i,s,1} \tilde{x}_{s,1}, \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{i,k_i-1} &= \dot{x}_{i,k_i-1} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=3}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} \dot{x}_{s,j-2} \\ &= x_{i,k_i} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=3}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-1} \\ &= \tilde{x}_{i,k_i} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=2}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-1} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=3}^{\min(k_i+1, k_s)} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-1} \end{aligned}$$

$$= \tilde{x}_{i,k_i} + \sum_{s=1}^p \alpha_{i,s,2} x_{s,1} = \tilde{x}_{i,k_i} + \sum_{s=1}^p \tilde{\alpha}_{i,s,2} \tilde{x}_{s,1}, \quad (4.3.38)$$

⋮

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{i,1} &= \dot{x}_{i,1} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=k_i+1}^{\min\{k_i+1, k_s\}} \alpha_{i,s,j} \dot{x}_{s,j-k_i} \\ &= x_{i,2} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=k_i+1}^{\min\{k_i+1, k_s\}} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-k_i+1} \\ &= \tilde{x}_{i,2} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=k_i}^{\min\{k_i+1, k_s\}} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-k_i+1} - \sum_{s=1}^p \sum_{j=k_i+1}^{\min\{k_i+1, k_s\}} \alpha_{i,s,j} x_{s,j-k_i+1} \\ &= \tilde{x}_{i,2} + \sum_{s=1}^p \alpha_{i,s,k_i} x_{s,1} = \tilde{x}_{i,2} + \sum_{s=1}^p \tilde{\alpha}_{i,s,k_i} \tilde{x}_{s,1}. \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

同时,对某些定常矢量 $\tilde{A}_{0,s,j}$,我们有

$$\dot{\tilde{x}}_0 = A_0 \tilde{x}_0 + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{k_s} \tilde{A}_{0,s,j} \tilde{x}_{s,j}. \quad (4.3.40)$$

OSD 步骤 5 进一步简化式(4.3.40)

现在我们来找一个变换,使得 \tilde{x}_0 的动态方程只由 $\tilde{x}_{s,1}$ 来表示, $s=1,2,\dots,p$ 。

如果 $\max\{k_1, k_2, \dots, k_p\}=1$,可以略去下面的子步骤,而直接转向 OSD 步骤 6; 否则,令

$i := 0, \tilde{x}_{0,0} := \tilde{x}_0, \tilde{A}_{0,s,j,0} := \tilde{A}_{0,s,j}$, 执行以下的子步骤。

子步骤 5.1 首先注意到

$$\dot{\tilde{x}}_{0,i} = A_0 \tilde{x}_{0,i} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{k_s-i} \tilde{A}_{0,s,j,i} \tilde{x}_{s,j}. \quad (4.3.41)$$

我们将在上面的表达式中消去 $\tilde{x}_{s,k_s-i}, s=1,2,\dots,p$ 。定义

$$\tilde{x}_{0,i+1} := \tilde{x}_{0,i} - \sum_{s=1}^p \tilde{A}_{\dots k_s-i,i} \tilde{x}_{s,k_s-i-1}, \quad (4.3.42)$$

如果 $k_s-i-1 \leq 0$,则取 $\tilde{A}_{0,s,k_s-i,i} = 0$ 。我们有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{0,i+1} &= \dot{\tilde{x}}_{0,i} - \sum_{s=1}^p \tilde{A}_{0,s,k_s-i,i} \dot{\tilde{x}}_{s,k_s-i-1} \\ &= A_0 \tilde{x}_{0,i} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{k_s-i} \tilde{A}_{0,s,j,i} \tilde{x}_{s,j} - \sum_{s=1}^p \tilde{A}_{0,s,k_s-i,i} \left(\tilde{x}_{s,k_s-i} + \sum_{k=1}^p \alpha_{s,k,i+2} \tilde{x}_{k,1} \right) \\ &= A_0 \tilde{x}_{0,i+1} + \sum_{s=1}^p A_0 \tilde{A}_{0,s,k_s-i,i} \tilde{x}_{s,k_s-i-1} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{k_s-i-1} \tilde{A}_{0,s,j,i} \tilde{x}_{s,j} \\ &\quad - \sum_{s=1}^p \sum_{k=1}^p \tilde{A}_{0,s,k_s-i,i} \alpha_{s,k,i+2} \tilde{x}_{k,1}. \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

显然,在式(4.3.43)中消去了 $\tilde{x}_{s,k-i}, s=1,2,\dots,p$ 。所以,对一些适当的定常矢量 $\tilde{A}_{0,s,j,i+1}$,式(4.3.43)可以重新写为

$$\dot{\tilde{x}}_{0,i+1} = A_0 \tilde{x}_{0,i+1} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^{k_s-i-1} \tilde{A}_{0,s,j,i+1} \tilde{x}_{s,j}. \quad (4.3.44)$$

子步骤 5.2 如果 $i = \max\{k_1, k_2, \dots, k_p\} - 2$,我们就转向 OSD 步骤 6; 否则,令 $i := i+1$,然后重复子步骤 5.1。

OSD 步骤 6 结束

令 $\hat{x}_0 := \tilde{x}_{0,i+1}$ 和 $\hat{A}_{0,s} := \hat{A}_{0,i+1,s,1}$,我们有

$$\dot{\hat{x}}_0 = A_0 \hat{x}_0 + \sum_{s=1}^p \hat{A}_{0,s} \tilde{x}_{s,1}. \quad (4.3.45)$$

根据式(4.3.45)和式(4.3.37)~式(4.3.39),变换后的系统已经是 OSD 形式。至此,完成了定理 4.3.1 的证明。以上算法的软件已经在[87]中用 MATLAB 函数 `osd.m` 实现了。 ■

我们用下面的例子来演示 OSD。

例 4.3.1 考虑式(4.3.1)描述的非驱动系统,系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.3.46)$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.47)$$

我们根据 OSD 算法的步骤来构造所需的状态和输出变换。

OSD 步骤 1 初始化

首先进行分块

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

设

$$\begin{aligned} Z_1 &:= C_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0], \\ Z_2 &:= C_2 = [-1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0], \end{aligned}$$

$w := 0$, 标志矢量

$$f := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Z := C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

和一个空的矩阵 $\tilde{Z} := []$ 。

OSD 步骤 2 对系统输出连续求导

注意到

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $f_1 = 1 \neq 0$, 我们分离

$$Z_1 = [C_{1,1}] = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0],$$

计算

$$C_{1,1}A = [1 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1 \ 0].$$

很容易验证

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} Z \\ C_{1,1}A \end{bmatrix}\right) = 3 > \text{rank}(Z) = 2,$$

它满足情形 1 的条件, 即式(4.3.17)。所以我们设

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ C_{1,1}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

和

$$Z_1 := \begin{bmatrix} Z_1 \\ C_{1,1}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

同样, 因为 $f_2 = 1 \neq 0$, 我们分离

$$Z_2 = [C_{2,1}] = [-1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0]$$

计算

$$C_{2,1}A = [-2 \ -1 \ 3 \ -2 \ 3 \ 0].$$

很容易验证

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} Z \\ C_{2,1}A \end{bmatrix}\right) = 4 > \text{rank}(Z) = 3,$$

再次满足情形 1 的条件式(4.3.17), 所以我们设

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ C_{2,1}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

和

$$Z_2 := \begin{bmatrix} Z_2 \\ C_{2,1}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

接下来, 因为

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

没有变化和 $f_1=1$, 我们分离

$$Z_1 = \begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

计算

$$C_{1,2}A = [-5 \quad -3 \quad 8 \quad -4 \quad 8 \quad 0],$$

验证

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} Z \\ C_{1,2}A \end{bmatrix} \right) = 5 > \text{rank}(Z) = 4,$$

满足情形 1 的情况, 所以我们设

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ C_{1,2}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ \hline -5 & -3 & 8 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 := \begin{bmatrix} Z_1 \\ C_{1,2}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -5 & -3 & 8 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

同样, 因为 $f_2=1$, 我们分离

$$Z_2 = \begin{bmatrix} C_{2,1} \\ C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

计算

$$C_{2,2}A = [-2 \quad -1 \quad 3 \quad -1 \quad 3 \quad 0],$$

检验

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} Z \\ C_{2,2}A \end{bmatrix} \right) = 5 = \text{rank}(Z),$$

它满足情形 2 的条件, 即式(4.3.19)。因此, 我们设

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Z} := \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} =: [\tilde{Z}_1] = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1,1} \\ \tilde{C}_{1,2} \end{bmatrix},$$

和

$$w := w + 1 = 1, \quad k_1 := \text{rank}(\tilde{Z}_1) = 2.$$

现在有

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

和 $f_1=1$, 我们继续分离

$$Z_1 = \begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \\ C_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 8 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

计算

$$C_{1,3}A = [-3 \quad -1 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 0],$$

检验到

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} Z \\ C_{1,3}A \end{bmatrix} \right) = 5 = \text{rank}(Z),$$

满足情形 2 的条件。所以我们设

$$f := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Z} := \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 8 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1,1} \\ \tilde{C}_{1,2} \\ \tilde{C}_{2,1} \\ \tilde{C}_{2,2} \\ \tilde{C}_{2,3} \end{bmatrix},$$

$$w := w + 1 = 2, \quad k_2 = \text{rank}(\tilde{Z}_2) = 3.$$

因为标志矢量 f 已经全部为零了, 所以转到 OSD 步骤 3。

OSD 步骤 3 初步变换

显然, $n_0 = 6 - 5 = 1$ 。选择 $S_0 := [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ 来形成初步变换

$$S := \begin{bmatrix} S_0 \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 8 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

变换后的系统为

$$Sx = \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\bar{x}} = SAS^{-1} \bar{x} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0.3333 & -2 & 1 & -0.3333 & 0.6667 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -14 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \bar{x}$$

和

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = CS^{-1} \bar{x} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \bar{x}.$$

OSD 步骤 4

根据 OSD 步骤 4 的证明, 我们得到另一个状态变换矩阵 W ,

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

在这个状态变换下,

$$W\bar{x} = \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,1} \\ \tilde{x}_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{2,1} \\ \tilde{x}_{2,2} \\ \tilde{x}_{2,3} \end{bmatrix},$$

我们有

$$\dot{\tilde{x}} = WSAS^{-1}W^{-1} \tilde{x} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -2 & 1 & 1 & 0.6667 \\ \hline 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \tilde{x}$$

和

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = W_0AS^{-1}W^{-1} \tilde{x} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \tilde{x},$$

其中

$$W_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

OSD 步骤 5

需要采用两个子步骤来去除 \tilde{x}_0 中不需要的项。根据证明中的迭代步骤,首先得到变换

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -0.6667 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

在该变换下

$$M_1 W S A S^{-1} W^{-1} M_1^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -1 & 2.3333 & 0 & 6.3333 & 0.3333 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

以及第二个变换矩阵

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

OSD 步骤 6 结束

最后的状态和输出变换矩阵分别为

$$T_s = (M_2 M_1 W S)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 & -0.6667 & -0.5556 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0.3333 & 0.4444 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & 0.3333 \\ 0 & -7 & -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0.3333 & 0.1111 \\ 1 & -2 & 0 & 0.3333 & 0.6667 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$T_o = W_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

变换后的系统表示为

$$T_s^{-1}AT_s = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2.3333 & 0 & 4.3333 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

和

$$T_o^{-1}CT_s = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

显然,变换后的系统呈现式(4.3.7)和式(4.3.8)所描述的观测器结构分解形式。

我们现在给出无驱动系统或矩阵对 (C, A) 的另一种分解,即所谓的块对角可观结构分解(BDOSD)。

定理 4.3.2(BDOSD) 考虑无驱动系统(4.3.1),其中 (C, A) 是可观的,则存在一个整数 $k \leq p$,有 k 个整数集合 $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_k$ 和非奇异的变换 T_s 及 T_o ,使得

$$T_s^{-1}AT_s = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} \quad (4.3.48)$$

和

$$T_o^{-1}CT_s = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & C_k \\ \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}, \quad (4.3.49)$$

其中的 \star 符号表示无关紧要的矩阵, A_i 和 C_i 为OSD形式, $i=1, 2, \dots, k$,

$$A_i = \begin{bmatrix} \star & I_{\kappa_i-1} \\ \star & 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]. \quad (4.3.50)$$

显然, $\sum_{i=1}^k \kappa_i = n$ 。

证明 这个定理是下一节中定理 4.4.2 的对偶形式。BDOSD 的详细证明和定理 4.4.2 中的一样。可以在[87]中得到该规范形的 MATLAB 软件实现 bdosd.m. ■

例 4.3.2 考虑无驱动系统(4.3.1),其相应的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.51)$$

利用[87]的 bdosd.m, 我们得到

$$T_s = \begin{bmatrix} 9.202258 & 9.202258 & 9.202258 & 11.985440 & 20.334987 \\ -18.404516 & 0 & 0 & -15.621333 & -44.080817 \\ -27.606773 & -9.202258 & 0 & 0 & -6.419075 \\ -27.606773 & -18.404516 & -9.202258 & 0 & 9.202258 \\ 0 & 0 & 0 & 2.783182 & 8.349547 \end{bmatrix},$$

$$T_o = \begin{bmatrix} -2.783182 & -0.302446 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_s^{-1}AT_s = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$T_o^{-1}CT_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9.202258 & 0 & 0 & -9.202258 & -27.606773 \end{bmatrix},$$

这些就是定理 4.3.2 中的 BDOSD 形式。很显然, $k=1$ 和 $\kappa_1=5$ 。

4.4 无检测系统

我们现在引出以下无检测系统 Σ 的控制器结构分解(CSD)和分块对角可控结构分解(BDCSD),

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.4.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是输入。前面已经提及, CSD 和 BDCSD 实际上是 OSD 和 BDOSD 的对偶。我们注意到, CSD 也就是通常的 Brunovsky 规范形(见 Brunovsky^[15])。

但是同样的结果早在 1967 年就由 Luenberger^[95] 得出。CSD 是解决传感器/执行器配置问题的关键工具(参见[31,92]),而 BDCSD 在解 H_∞ 几乎干扰解耦问题(参见[22,23,86]),以及在第 6 章的奇异系统结构分解的推导中都有重要作用。

定理 4.4.1(CSD) 考虑无检测系统(4.4.1),其中 B 是满秩的,则存在非奇异的状态和输入变换 $T_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $T_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$,使得变换后的输入和状态满足

$$x = T_s \tilde{x}, \quad u = T_i \tilde{u}, \quad (4.4.2)$$

其中

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i,1} \\ \tilde{x}_{i,2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{i,k_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_m \end{bmatrix}, \quad (4.4.3)$$

我们有

$$\dot{\tilde{x}}_0 = A_0 \tilde{x}_0, \quad (4.4.4)$$

并且对 $i=1, 2, \dots, m$,

$$\dot{\tilde{x}}_i = A_i \tilde{x}_i + B_i(\tilde{u}_i + E_i \tilde{x}), \quad (4.4.5)$$

其中 $E_i, i=1, 2, \dots, m$, 是一些具有适当维数的行向量,且

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{k_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4.6)$$

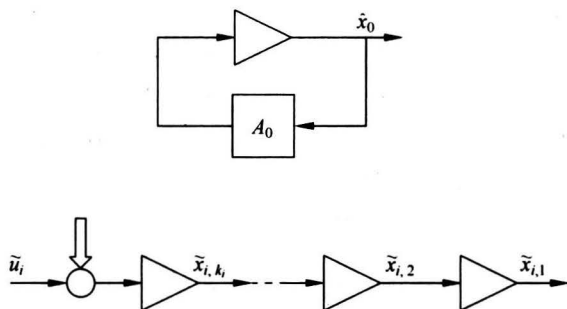
矩阵 A_0 的维数是 $n_0 \times n_0$, 其中 $n_0 = n - \sum_{i=1}^m k_i$, $\lambda(A_0)$ 包含了矩阵对 (A, B) 的所有不可控模态。而整数集合 $C := \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ 被称为 (A, B) 的可控性指数。

定理 4.4.1 和定理 4.3.1 的结果对偶。可控性结构分解 CSD 可表示为矩阵形式,即

$(\tilde{A}, \tilde{B}) := (T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i)$, 其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{k_m-1} \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4.7)$$

其中, \star 表示无关紧要的矩阵,也可用图 4.4.1 所示的图形来表示。在[87]中可以得到 MATLAB 软件实现的一个 m 函数 `csd.m`。读者可以参考第 12 章中关于这个 m 函数的使用说明。



注意：双箭头表示的信号是状态的线性组合。

图 4.4.1 控制器结构分解的示意

例 4.4.1 考虑无检测系统(4.4.1),其矩阵对 (A, B) 为

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & -2 & 0 \\ 11 & 7 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用[87]中的 m 函数 `csd.m` 可得

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

和

$$T_s^{-1}AT_s = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_s^{-1}BT_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

相应的 (A, B) 可控性指数为 $C = \{1, 2\}$ 。这个矩阵对在 -2 和 1 处分别有两个不可控模态。

下一定理是关于分块对角可控结构分解(BDCSD)的。

定理 4.4.2 (BDCSD) 考虑无检测系统(4.4.1),其中 (A, B) 是可控的,则存在一个整数 $k \leq m$ 和 k 个整数集合 $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_k$,以及非奇异的变换 T_s 和 T_i ,使得变换后的系统矩阵 $(\tilde{A}, \tilde{B}) := (T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i)$ 具有下面的形式:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & B_2 & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k & \star \end{bmatrix}, \quad (4.4.9)$$

其中, A_i 和 $B_i, i=1, 2, \dots, k$, 为 CSD 形式

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4.10)$$

其中, \star 表示无关紧要的矩阵。显然, $\sum_{i=1}^k \kappa_i = n$ 。

证明 这个规范形的存在性在 Wonham^[154] 中已有证明。我们在这里给出由 Chen^[22] 导出的变换矩阵 T_s 和 T_i 的构造性算法。

首先根据定理 4.2.2 的结果, 找到一个非奇异的变换 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得矩阵 A 被变换到实 Jordan 规范形, 即

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_\ell \end{bmatrix}, \quad (4.4.11)$$

其中

$$X_i = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i}^1 & & & \\ & J_{\lambda_i}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_i}^{\sigma_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell, \quad (4.4.12)$$

这里 $\lambda_i = \mu_i + j\omega_i \in \lambda(A)$, $\omega_i \geq 0$, 如果 $i_1 \neq i_2$, 则 $\lambda_{i_1} \neq \lambda_{i_2}$ 。而且, 对每个 $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ 和 $s = 1, 2, \dots, \sigma_i$, 如果 $\omega_i = 0$, 则 $J_{\lambda_i}^s \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ 有实的 Jordan 形

$$J_{\lambda_i}^s = \begin{bmatrix} \mu_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_i & 1 \\ & & & \mu_i \end{bmatrix}, \quad (4.4.13)$$

如果 $\omega_i > 0$, 则

$$J_{\lambda_i}^s = \begin{bmatrix} \Lambda_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_i & I_2 \\ & & & \Lambda_i \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} \mu_i & \omega_i \\ -\omega_i & \mu_i \end{bmatrix}, \quad (4.4.14)$$

为在后面陈述方便,我们以 $n_{i1} \geq n_{i2} \geq \dots \geq n_{i\sigma_i}$ 的方式来安排 Jordan 块。接下来计算

$$\tilde{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} B_{11}^1 & B_{11}^2 & \cdots & B_{11}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1\sigma_1}^1 & B_{1\sigma_1}^2 & \cdots & B_{1\sigma_1}^m \\ B_{21}^1 & B_{21}^2 & \cdots & B_{21}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{2\sigma_2}^1 & B_{2\sigma_2}^2 & \cdots & B_{2\sigma_2}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell 1}^1 & B_{\ell 1}^2 & \cdots & B_{\ell 1}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell\sigma_\ell}^1 & B_{\ell\sigma_\ell}^2 & \cdots & B_{\ell\sigma_\ell}^m \end{bmatrix}. \quad (4.4.15)$$

很容易验证, (A, B) 的可控性意味着对每个 $i=1, 2, \dots, \ell$, 存在一个 $B_{i\nu}^s, \nu \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $(J_{\lambda_i}^s, B_{i\nu}^s)$ 是可控的, 这等价于如果 λ_i 是实数, $B_{i\nu}^s$ 的最后一行非零; 如果 λ_i 不是实数, 则 $B_{i\nu}^s$ 的最后两行至少有一行非零。因此, 很容易找到一个矢量

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{m1} \end{bmatrix}, \quad t_{11} \neq 0, \quad (4.4.16)$$

和分块

$$\tilde{B}_1 = \tilde{B}T_1 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{1\sigma_1}^1 \\ \tilde{B}_{21}^1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{2\sigma_2}^1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{\ell 1}^1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{\ell\sigma_\ell}^1 \end{bmatrix}, \quad (4.4.17)$$

使得 $(J_{\lambda_i}^s, \tilde{B}_{i1}^s)$ 是可控的。由于实 Jordan 规范形的特殊结构和 $n_{i1} \geq n_{i2} \geq \dots \geq n_{i\sigma_i}$, 和 $J_{\lambda_i}^s, s > 1$ 相关联的特征结构在 \tilde{B}_1 下是不可控的。因此很容易证明, 存在非奇异的变换 T_{s1} ,

$i=1, 2, \dots, \ell$, 使得

$$(T_{s1}^i)^{-1} \begin{bmatrix} J_{\lambda_i}^1 & & & \\ & J_{\lambda_i}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_i}^{\sigma_i} \end{bmatrix} T_{s1}^i = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i}^1 & & & \\ & J_{\lambda_i}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_i}^{\sigma_i} \end{bmatrix} \quad (4.4.18)$$

和

$$(T_{s1}^i)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{i1}^1 \\ \tilde{B}_{i2}^1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{i\sigma_i}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4.19)$$

其中, $(J_{\lambda_i}^1, \tilde{B}_{i1}^1)$ 是可控的。这些可以用 CSD 形式的特殊结构(见定理 4.4.1)来实现。下面进行排列置换,

$$(P_{s1})^{-1} \begin{bmatrix} T_{s1}^1 & & & \\ & T_{s1}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{s1}^{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{A} & & & \\ & T_{s1}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{s1}^{\ell} \end{bmatrix} P_{s1} \\ = \text{blkdiag} \{ J_{\lambda_1}^1, \dots, J_{\lambda_r}^1, J_{\lambda_1}^2, \dots, J_{\lambda_1}^{\sigma_1}, \dots, J_{\lambda_r}^2, \dots, J_{\lambda_r}^{\sigma_r} \}$$

和

$$(P_{s1})^{-1} \begin{bmatrix} T_{s1}^1 & & & \\ & T_{s1}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{s1}^{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B} & & & \\ t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ t_{m1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^1 & \tilde{B}_{11}^2 & \cdots & \tilde{B}_{11}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{B}_{r1}^1 & \tilde{B}_{r1}^2 & \cdots & \tilde{B}_{r1}^m \\ 0 & \tilde{B}_{12}^2 & \cdots & \tilde{B}_{12}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{B}_{1\sigma_1}^2 & \cdots & \tilde{B}_{1\sigma_1}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{B}_{r2}^2 & \cdots & \tilde{B}_{r2}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{B}_{r\sigma_r}^2 & \cdots & \tilde{B}_{r\sigma_r}^m \end{bmatrix}$$

因为 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, \ell$, 各不相同, $(J_{\lambda_i}^1, \check{B}_{i1}^1)$ 的可控性意味着

$$(\check{A}_1, \check{B}_1) := \left(\begin{bmatrix} J_{\lambda_1}^1 & & & & \\ & J_{\lambda_2}^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{\lambda_\ell}^1 & \\ & & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \check{B}_{11}^1 \\ \check{B}_{21}^1 \\ \vdots \\ \check{B}_{\ell 1}^1 \end{bmatrix} \right) \quad (4.4.20)$$

是可控的。因此存在一个非奇异的变换 $X_1 \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_1}$, 其中 $k_1 = \sum_{i=1}^{\ell} n_{i1}$, 使得

$$X_1^{-1} \check{A}_1 X_1 = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \star & \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix} \quad (4.4.21)$$

和

$$X_1^{-1} \check{B}_1 = B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4.22)$$

下面对矩阵对

$$\left(\text{blkdiag} \{ J_{\lambda_1}^2, \dots, J_{\lambda_1}^{\sigma_1}, \dots, J_{\lambda_\ell}^2, \dots, J_{\lambda_\ell}^{\sigma_\ell} \}, \begin{bmatrix} \check{B}_{12}^2 & \cdots & \check{B}_{12}^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{B}_{1\sigma_1}^2 & \cdots & \check{B}_{1\sigma_1}^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{B}_{\ell 2}^2 & \cdots & \check{B}_{\ell 2}^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{B}_{\ell \sigma_\ell}^2 & \cdots & \check{B}_{\ell \sigma_\ell}^m \end{bmatrix} \right),$$

重复上面的过程, 就可以分离 (A_2, B_2) 。重复该过程超过 $k-2$ 次, 其中 $k = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell\}$, 可以得到定理 4.4.2 所要求的规范形。定理由此得证。结果在 [87] 中用 m 函数 `bcdsd.m` 实现。 ■

我们用下面的例子来结束这一章。

例 4.4.2 考虑无检测系统(4.4.1),其系数矩阵 A 和 B 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

利用[87]的 MATLAB 函数 `bcdsd.m`,我们得到下面所需的变换和变换后的系统:

$$T_s = \begin{bmatrix} -2.10371 & 0 & -4.20741 & 0 & -2.10371 & 0.78520 \\ -2.31866 & 0 & -4.63731 & 0 & -2.31866 & -0.71249 \\ -0.21495 & 9.10545 & -3.17845 & -3.17845 & -2.53360 & 0 \\ -5.71205 & 2.53360 & 3.82330 & 2.10371 & -2.74855 & 0 \\ 3.17845 & -0.21495 & 0.21495 & -0.21495 & -2.96350 & 0 \\ -2.96350 & 6.14195 & -6.14195 & 6.14195 & -3.17845 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_i = \begin{bmatrix} -0.48477 & 0 \\ -0.26982 & 0.97828 \end{bmatrix}$$

和

$$T_s^{-1}AT_s = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad T_s^{-1}BT_i = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -0.56147 \\ 0 & -0.29865 \\ 0 & -0.32323 \\ 0 & -0.76184 \\ 1 & -1.20895 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right].$$

这就验证了定理 4.4.2 的结果。

注意,这一章的结果是对连续时间系统陈述的,它们对离散时间系统也是正确的。

4.5 练习

4.1 证明:如果 λ 和 v 分别是矩阵 A 的特征值和特征矢量,则 $-\lambda$ 和 v 是 $-A$ 的特征值和特征矢量。证明结论在 v 是广义特征矢量下也是正确的。

4.2 考虑一个上分块对角定常矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_* \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

其中, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ 和 $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ 没有共同的特征值。令矩阵 $T_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ 的列张成 A 中

$\lambda(A_2)$ 的特征空间,即 A 中 $\lambda(A_2)$ 的特征矢量和广义特征矢量(如果存在的话)所张成的矢量空间,令

$$T = [T_1 \quad T_2], \quad T_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

证明 T 是非奇异的,并且

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix},$$

其中, $\lambda(\tilde{A}_2) = \lambda(A_2)$ 。

4.3 对一个实数值的定常矩阵 A 和一个复数 $\alpha \notin \lambda(A)$, $|\alpha| = 1$, 证明

$$\bar{A} = \frac{1}{2}[(A + \alpha I)^{-1}(A - \alpha I) + (A + \alpha^* I)^{-1}(A - \alpha^* I)]$$

是一个实的矩阵。 α^* 是 α 的复共轭。证明: 如果一个非奇异变换 T 使得

$$T^{-1}\bar{A}T = \begin{bmatrix} \bar{A}_- & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_+ \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda(\bar{A}_-) \subset \mathbb{C}^-$, $\lambda(\bar{A}_0) \subset \mathbb{C}^0$ 和 $\lambda(\bar{A}_+) \subset \mathbb{C}^+$, 则

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_- & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_+ \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda(A_-) \subset \mathbb{C}^0$, $\lambda(A_0) \subset \mathbb{C}^0$ 和 $\lambda(A_+) \subset \mathbb{C}^0$ 。

4.4 用下面的矩阵来验证练习 4.1~练习 4.3 的结果,

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

4.5 给定一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 它的特征值为 $\lambda = \mu + j\omega$, 复共轭为 $\lambda^* = \mu - j\omega$, 其中 $\omega \neq 0$ 。定义一个新的 $(2n) \times (2n)$ 矩阵,

$$Z = \begin{bmatrix} A - \mu I & \omega I \\ -\omega I & A - \mu I \end{bmatrix}.$$

证明矩阵 Z 有 n 个特征值在 0, 有 $n/2$ 个特征值在 $j2\omega$, 有 $n/2$ 个特征值在 $-j2\omega$ 。用例 4.2.2 的矩阵 A 来验证上面的结果。

4.6 对于无驱动系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x,$$

计算控制器结构分解(OSD)。

4.7 构造一个无驱动系统 (A, C) ,它具有以下特性: (i) (A, C) 是可观的; (ii) (A, C) 的可观性指数为 $\mathcal{O}=\{2, 2\}$; (iii) A 的特征值在 $0, 1, 2$ 和 3 。

4.8 构造一个无检测系统 (A, B) ,它具有以下特性: (i) (A, B) 是可控的; (ii)具有可控性指数 $\mathcal{C}=\{1, 1, 2\}$; (iii) A 的特征值在 $1, 2, 3$ 和 4 。

4.9 对于练习 4.8 所得到的无检测系统,计算块对角可控结构分解(BDCSD)。

4.10 给定一个无检测系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} x, \quad y = [\alpha \quad \star \quad \cdots \quad \star] x,$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ 。证明: 当且仅当 $\alpha \neq 0$ 时,系统是可观的。

4.11 给定一个无检测系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \Lambda & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda & I \\ & & & \Lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ \beta \end{bmatrix} u,$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \omega \neq 0, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

证明: 当且仅当 $\beta \neq 0$ 时,系统是可控的。

4.12 给定一个可控对 (A, B) ,其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。证明: 如果 A 有一个几何重数为 τ 的特征值,即这个特征值总共有 τ 块 Jordan 块,则 $m \geq \tau$ 。

第 5 章 正则系统的分解

5.1 导论

在这一章里,我们对由矩阵三元组或矩阵四元组表示的线性时不变系统进行结构分解。为了使推导易于掌握,我们将从单输入和单输出(SISO)系统开始,然后是对一般的严格正则多输入和多输出(MIMO)系统结构分解的详细推导。接下来,就是对非严格正则 MIMO 系统的分解,以及在分解之下被揭示的系统特性的详细推导。最后,以一般的离散时间系统的结构分解来结束本章。

在 5.3 节的严格正则系统的结构分解中,即特殊坐标基(SCB),沿用了 Sannuti 和 Saberi^[122]的技术路线,但是证明过程和构造算法很不相同,增加了许多新的结果,特别是用一些单步变换来代替[122]中比较多的迭代步骤。算法的流程易于掌握,也易于采用像 MATLAB 这样的软件环境来实现。把变换过的子系统分解成适当的结构,我们将完全解决[122]中遗留的一些问题。本章利用 Chen^[21]中的结果对一般系统的所有结构特性予以严格地证明,同时给出了 Chen 等^[24]关于一般多变量系统特殊坐标基(SCB)下的 Kronecker 规范形和 Smith 形的内在联系。

5.2 SISO 系统

考虑下面形式的 SISO 系统,

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (5.2.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别为状态、输入和输出。假设 Σ 的传递函数不是恒为零,有以下关于 Σ 的特殊坐标基(SCB)分解。

定理 5.2.1 考虑式(5.2.1)所描述的 SISO 系统。存在非奇异的状态、输入和输出变换矩阵 $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\Gamma_i \in \mathbb{R}$ 和 $\Gamma_o \in \mathbb{R}$, 把 Σ 的状态空间分解成两个子空间 x_a 和 x_d 。这两个子空间分别对应了 Σ 的有限和无限零点结构。分解后,系统的新的状态、输入和输出空间由以下一组方程描述:

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u}, \quad (5.2.2)$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_d \end{pmatrix}, x_a \in \mathbb{R}^n, x_d \in \mathbb{R}^{n_d}, x_d = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_d} \end{pmatrix}, \quad (5.2.3)$$

和

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + L_{ad}\tilde{y}, \quad (5.2.4)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \tilde{y} = x_1, \quad (5.2.5)$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (5.2.6)$$

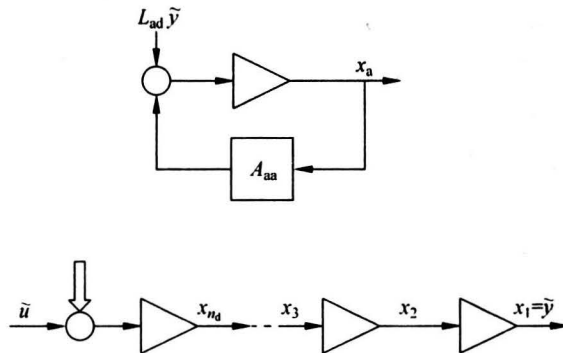
$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n_d-1} = x_{n_d}, \quad (5.2.7)$$

$$\dot{x}_{n_d} = E_{da}x_a + E_1x_1 + E_2x_2 + \cdots + E_{n_d}x_{n_d} + \tilde{u}. \quad (5.2.8)$$

而且, $\lambda(A_{aa})$ 包含了系统的所有不变零点, n_d 是 Σ 的相对阶。

证明 定理 5.2.1 的示意如图 5.2.1 所示。下面逐步给出构造所需的 Γ_s 、 Γ_i 和 Γ_c 的算法, 来实现 Σ 的结构分解(即特殊坐标基或 SCB)。该定理的证明要比定理 5.3.1 的一般系统的证明简单得多, 但是基本思想是类似的。



注: 用双边箭头表示的信号是状态的线性组合。

图 5.2.1 SISO 系统结构分解的示意

SISO-SCB 步骤 1 确定相对阶数

Σ 的相对阶可以通过对输出 y 求导得到。令 n_d 满足

$$CB = CAB = \cdots = CA^{n_d-2}B = 0 \quad (5.2.9)$$

和

$$\beta := CA^{n_d-1}B \neq 0. \quad (5.2.10)$$

注意, 式(5.2.9)和式(5.2.10)表明在 Σ 的输入和输出之间有 n_d 个内在的积分器。这在后面的式(5.2.13)和式(5.2.16)中可以清楚地看出。下面令 $n_a := n - n_d$ 。

SISO-SCB 步骤 2 构造初步的状态变换

令 Z_0 为一个 $n_a \times n$ 的定常矩阵, 使得

$$Z := \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Z_0 \\ C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_d-1} \end{bmatrix}, \quad (5.2.11)$$

是非奇异的。注意, 我们可以把 Z_d 零空间的基作为 Z_0 的行。接下来, 令

$$\bar{x} := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_d} \end{bmatrix} := Zx = \begin{bmatrix} Z_0 \\ C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_d-1} \end{bmatrix} x. \quad (5.2.12)$$

对某适当的 E_{d_n} 和 $\gamma_i, i=1, 2, \dots, n_d$, 我们有

$$\dot{x}_1 = C\dot{x} = CAx + CBu = CAx = x_2, \quad y = x_1, \quad (5.2.13)$$

$$\dot{x}_2 = CA\dot{x} = CA^2x + CABu = CA^2x = x_3, \quad (5.2.14)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n_d-1} = x_{n_d}, \quad (5.2.15)$$

$$\dot{x}_{n_d} = E_{d_n}x_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \gamma_i x_i + \beta u, \quad (5.2.16)$$

和对适当的矢量 $A_{00}, \alpha_{0,i}, i=1, 2, \dots, n_d$ 和 β_0 , 有

$$\dot{x}_0 = A_{00}x_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \alpha_{0,i}x_i + \beta_0 u. \quad (5.2.17)$$

SISO-SCB 步骤 3 从 x_0 的状态方程中消去 u

从式(5.2.16)可得

$$u = \frac{1}{\beta} \left[\dot{x}_{n_d} - E_{d_n}x_0 - \sum_{i=1}^{n_d} \gamma_i x_i \right], \quad (5.2.18)$$

结合式(5.2.17)有

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_{00}x_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \alpha_{0,i}x_i + \frac{\beta_0}{\beta} \left[\dot{x}_{n_d} - E_{d_n}x_0 - \sum_{i=1}^{n_d} \gamma_i x_i \right] \\ &= A_{nn}x_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \bar{\alpha}_{0,i}x_i + \bar{\beta} \dot{x}_{n_d}, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

对合适的 $A_{nn}, \bar{\alpha}_{0,i}, i=1, 2, \dots, n_d$ 和 $\bar{\beta}$ 成立。

SISO-SCB 步骤 4 在 x_0 的状态方程中消去 \dot{x}_{n_d}

定义一个新的状态变量

$$\tilde{x}_0 := x_0 - \bar{\beta}x_{n_d}, \quad (5.2.20)$$

然后在合适的常数矢量 $\tilde{\alpha}_{0,i}, i=1, 2, \dots, n_d$ 下可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_0 &= \dot{x}_0 - \bar{\beta} \dot{x}_{n_d} = A_{aa}x_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\alpha}_{0,i}x_i + \bar{\beta} \dot{x}_{n_d} - \bar{\beta} \dot{x}_{n_d} \\ &= A_{aa}(\tilde{x}_0 + \bar{\beta}x_{n_d}) + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\alpha}_{0,i}x_i \\ &= A_{aa} \tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\alpha}_{0,i}x_i. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

同时,对合适的参数 $\tilde{\gamma}_i, i=1, 2, \dots, n_d$, 式(5.2.16)也可以重新写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n_d} &= E_{da}x_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \gamma_i x_i + \beta u \\ &= E_{da} \tilde{x}_0 + E_{da} \bar{\beta}x_{n_d} + \sum_{i=1}^{n_d} \gamma_i x_i + \beta u \\ &= E_{da} \tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\gamma}_i x_i + \beta u. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

SISO-SCB 步骤 5 从 \tilde{x}_0 的状态方程消去 x_2, \dots, x_{n_d}

如果 $n_d=1$, 则没有继续变换的必要, 转向 SISO-SCB 步骤 6. 否则, 令 $s:=0, \tilde{x}_{0,0} := \tilde{x}_0, \tilde{\alpha}_{0,0,i} := \tilde{\alpha}_{0,i}$ 和 $\tilde{\gamma}_{0,i} := \tilde{\gamma}_i, i=1, 2, \dots, n_d$, 然后进入下面的迭代子步骤.

子步骤 5.1 首先, 我们已经有

$$\dot{\tilde{x}}_{0,s} = A_{aa} \tilde{x}_{0,s} + \sum_{i=1}^{n_d-s} \tilde{\alpha}_{s,0,i}x_i \quad (5.2.23)$$

和

$$\dot{x}_{n_d} = E_{da} \tilde{x}_{0,s} + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\gamma}_{s,i}x_i + \beta u. \quad (5.2.24)$$

我们将从上面的表达式中消除 x_{n_d-s} . 定义

$$\tilde{x}_{0,s+1} := \tilde{x}_{0,s} - (\tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s})x_{n_d-s-1}, \quad (5.2.25)$$

考虑到 $\dot{x}_{n_d-s-1} = x_{n_d-s}$, 所以有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{0,s+1} &= \dot{\tilde{x}}_{0,s} - \tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s} \dot{x}_{n_d-s-1} \\ &= A_{aa}(\tilde{x}_{0,s+1} + \tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s}x_{n_d-s-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_d-s-1} \tilde{\alpha}_{s,0,i}x_i + \tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s}x_{n_d-s} - \tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s}x_{n_d-s} \\ &= A_{aa} \tilde{x}_{0,s+1} + (A_{aa} \tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s})x_{n_d-s-1} + \sum_{i=1}^{n_d-s-1} \tilde{\alpha}_{s,0,i}x_i. \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

显然,我们已经在上面的表达式中消除了 x_{n_d-s} , 同时有

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n_d} &= E_{da} \tilde{x}_{0,s} + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\gamma}_{s,i} x_i + \beta u \\ &= E_{da} (\tilde{x}_{0,s+1} + \tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s} x_{n_d-s-1}) + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\gamma}_{s,i} x_i + \beta u \\ &= E_{da} \tilde{x}_{0,s+1} + E_{da} \tilde{\alpha}_{s,0,n_d-s} x_{n_d-s-1} + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\gamma}_{s,i} x_i + \beta u.\end{aligned}\quad (5.2.27)$$

在下一次的迭代中,对合适的常数矢量 $\tilde{\alpha}_{s+1,0,i}, i=1,2,\dots,n_d-s-1$,把式(5.2.26)重新写为

$$\dot{\tilde{x}}_{0,s+1} = A_{aa} \tilde{x}_{0,s+1} + \sum_{i=1}^{n_d-s-1} \tilde{\alpha}_{s+1,0,i} x_i, \quad (5.2.28)$$

对合适的常数矢量 $\tilde{\gamma}_{s+1,i}, i=1,2,\dots,n_d-s-1$,把式(5.2.27)重新写为

$$\dot{x}_{n_d} = E_{dn} \tilde{x}_{0,s+1} + \sum_{i=1}^{n_d} \tilde{\gamma}_{s+1,i} x_i + \beta u. \quad (5.2.29)$$

子步骤 5.2 如果 $s=n_d-2$,我们已经得到了所需的结果,转向 SISO-SCB 步骤 6; 否则,令 $s:=s+1$,再回到子步骤 5.1。

SISO-SCB 步骤 6 结束

最后,令

$$x_a := \tilde{x}_{0,s+1}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y} = \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u} = \frac{1}{\beta} \tilde{u} \quad (5.2.30)$$

和

$$L_{ad} := \tilde{\alpha}_{s+1,0,1}, \quad E_i := \tilde{\gamma}_{s+1,i}, \quad i=1,2,\dots,n_d, \quad (5.2.31)$$

则根据式(5.2.13)~式(5.2.15)和式(5.2.28)~式(5.2.31)可得

$$\dot{x}_a = A_{aa} x_a + L_{ad} \tilde{y}, \quad (5.2.32)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \tilde{y} = x_1, \quad (5.2.33)$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (5.2.34)$$

\vdots

$$\dot{x}_{n_d} = E_{da} x_a + E_1 x_1 + \dots + E_{n_d} x_{n_d} + \tilde{u}. \quad (5.2.35)$$

可以直接看出, n_d 是 Σ 的相对阶数。在 5.4 节中,我们将证明 $\lambda(A_{aa})$ 是一般系统 Σ 的不变零点。 ■

注意到定理 5.2.1 中的输出变换可选为 1,即 $\Gamma_o=1$ 。我们用下面的例子来演示上面的过程。该例子来自 Chen^[22]。

例 5.2.1 考虑由式(5.2.1)给出的 SISO 系统 Σ ,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (5.2.36)$$

和

$$C = [0 \quad 3 \quad -2 \quad 0]. \quad (5.2.37)$$

结构分解 Σ 的过程如下。

1. 对系统输出求导

它包括下面的子步骤。

(a) 首先有

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu = [-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1]x + 0 \cdot u.$$

(b) 因为 $CB=0$, 我们计算

$$\ddot{y} = CA^2x + CABu = [1 \quad -1 \quad -3 \quad 1]x + 0 \cdot u.$$

(c) 因为 $CAB=0$, 我们继续计算

$$y^{(3)} = CA^3x + CA^2Bu = -[8 \quad 10 \quad 12 \quad 17]x - 6 \cdot u.$$

因为 $CA^2B \neq 0$, 所以转向下一步。

2. 构造初步的状态变换

令 Z_0 为

$$Z = \begin{bmatrix} Z_0 \\ C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}, \quad (5.2.38)$$

是非奇异的矢量。然后定义一组新的状态变量 \bar{x} ,

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := Zx = \begin{bmatrix} Z_0 \\ C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} Z_0x \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}. \quad (5.2.39)$$

很容易验证, $Z_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ 可使 Z 是非奇异矩阵, 而且有

$$\dot{x}_0 = 8x_0 + x_1 + \frac{8}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 + u, \quad (5.2.40)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (5.2.41)$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (5.2.42)$$

$$\dot{x}_3 = -72x_0 - 9x_1 - 27x_2 + 10x_3 - 6u. \quad (5.2.43)$$

3. 消除式(5.2.40)中的 u

从方程(5.2.43)可得

$$u = -12x_0 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{6}\dot{x}_3. \quad (5.2.44)$$

把它代入式(5.2.40)得

$$\dot{x}_0 = -4x_0 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{6}x_2 - \frac{1}{6}\dot{x}_3. \quad (5.2.45)$$

我们已经把 \dot{x}_0 中的 u 给消除了,但是却把 \dot{x}_3 引入了式(5.2.45)中。

4. 消除式(5.2.45)中的 \dot{x}_3

定义新的状态变量 \tilde{x}_0 为

$$\tilde{x}_0 := x_0 + \frac{1}{6}x_3. \quad (5.2.46)$$

我们有

$$\dot{\tilde{x}}_0 = -4\tilde{x}_0 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \quad (5.2.47)$$

和

$$\dot{x}_3 = -72\tilde{x}_0 - 9x_1 - 27x_2 + 22x_3 - 6u. \quad (5.2.48)$$

5. 消除式(5.2.47)中的 x_2 和 x_3

这一步包括两个子步骤。

(a) 令

$$\tilde{x}_{0,1} := \tilde{x}_0 - \frac{2}{3}x_2, \quad (5.2.49)$$

我们有

$$\dot{\tilde{x}}_{0,1} = -4\tilde{x}_{0,1} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_2 \quad (5.2.50)$$

和

$$\dot{x}_3 = -72\tilde{x}_{0,1} - 9x_1 - 75x_2 + 22x_3 - 6u. \quad (5.2.51)$$

(b) 令

$$\tilde{x}_{0,2} := \tilde{x}_{0,1} + \frac{9}{2}x_1, \quad (5.2.52)$$

我们有

$$\dot{\tilde{x}}_{0,2} = -4\tilde{x}_{0,2} + \frac{35}{2}x_1 \quad (5.2.53)$$

和

$$\dot{x}_3 = -72\tilde{x}_{0,2} + 315x_1 - 75x_2 + 22x_3 - 6u. \quad (5.2.54)$$

6. 构造非奇异的状态、输出和输入变换

令

$$x_a := \tilde{x}_{0,2} \quad (5.2.55)$$

或等价地令

$$x = \Gamma_s \tilde{x} = \Gamma_s \begin{pmatrix} x_a \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (5.2.56)$$

其中

$$\Gamma_s = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 9/2 & -2/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1}. \quad (5.2.57)$$

同时令

$$u = \Gamma_i \tilde{u} = -\frac{1}{6} \tilde{u}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y} = 1 \cdot \tilde{y}. \quad (5.2.58)$$

最后得到变换后的系统动态方程为

$$\dot{x}_a = -4x_a + \frac{35}{2}x_1, \quad (5.2.59)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \tilde{y} = x_1, \quad (5.2.60)$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (5.2.61)$$

$$\dot{x}_3 = -72x_a + 315x_1 - 75x_2 + 22x_3 + \tilde{u}, \quad (5.2.62)$$

这就是定理 5.2.1 的形式了。以上分解的图形解释示于图 5.2.2 中。给定系统在 -4 有一个不变零点, 相对阶为 3(或者说, 有一个 3 阶的无限零点)。

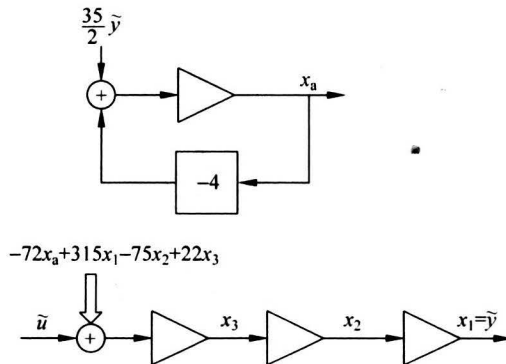


图 5.2.2 例 5.2.1 结构分解的示意图

5.3 严格正则系统

下面考虑一般的严格正则线性系统 Σ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (5.3.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 为状态、输入和输出。不失一般性,假设 B 和 C 都是满秩的,我们有下面的关于 Σ 的结构(即特殊坐标基或 SCB)分解。

定理 5.3.1 考虑由式(5.3.1)所表示的严格正则系统。存在一个非奇异的状态变换 $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、一个非奇异的输出变换 $\Gamma_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和一个非奇异的输入变换 $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 可以揭示 Σ 的所有结构特性。具体地说,就是有

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u} \quad (5.3.2)$$

和新的状态变量

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{pmatrix}, \quad x_a \in \mathbb{R}^{n_a}, \quad x_b \in \mathbb{R}^{n_b}, \quad x_c \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad x_d \in \mathbb{R}^{n_d}, \quad (5.3.3)$$

新的输出变量

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_d \\ y_b \end{pmatrix}, \quad y_d \in \mathbb{R}^{m_d}, \quad y_b \in \mathbb{R}^{m_b}, \quad (5.3.4)$$

以及新的输入变量

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_d \\ u_c \end{pmatrix}, \quad u_d \in \mathbb{R}^{m_d}, \quad u_c \in \mathbb{R}^{m_c}. \quad (5.3.5)$$

状态变量 x_d 可以被进一步分解为

$$x_d = \begin{pmatrix} x_{d,1} \\ x_{d,2} \\ \vdots \\ x_{d,m_d} \end{pmatrix}, \quad y_d = \begin{pmatrix} y_{d,1} \\ y_{d,2} \\ \vdots \\ y_{d,m_d} \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} u_{d,1} \\ u_{d,2} \\ \vdots \\ u_{d,m_d} \end{pmatrix}, \quad (5.3.6)$$

$$x_{d,i} \in \mathbb{R}^{q_i}, \quad x_{d,i} = \begin{pmatrix} x_{d,i,1} \\ x_{d,i,2} \\ \vdots \\ x_{d,i,q_i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m_d, \quad (5.3.7)$$

其中 $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{m_d}$ 。状态变量 x_b 被分解为

$$x_b = \begin{pmatrix} x_{b,1} \\ x_{b,2} \\ \vdots \\ x_{b,p_b} \end{pmatrix}, \quad y_b = \begin{pmatrix} y_{b,1} \\ y_{b,2} \\ \vdots \\ y_{b,p_b} \end{pmatrix}, \quad (5.3.8)$$

$$x_{b,i} \in \mathbb{R}^{l_i}, \quad x_{b,i} = \begin{pmatrix} x_{b,i,1} \\ x_{b,i,2} \\ \vdots \\ x_{b,i,l_i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p_b, \quad (5.3.9)$$

其中 $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{p_b}$ 。最后, 状态变量 x_c 被分解为

$$x_c = \begin{pmatrix} x_{c,1} \\ x_{c,2} \\ \vdots \\ x_{c,m_c} \end{pmatrix}, \quad u_c = \begin{pmatrix} u_{c,1} \\ u_{c,2} \\ \vdots \\ u_{c,m_c} \end{pmatrix}, \quad (5.3.10)$$

$$x_{c,i} \in \mathbb{R}^{r_i}, \quad x_{c,i} = \begin{pmatrix} x_{c,i,1} \\ x_{c,i,2} \\ \vdots \\ x_{c,i,r_i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m_c, \quad (5.3.11)$$

其中 $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{m_c}$ 。分解后的系统有下面的动态方程:

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + L_{ab}y_b + L_{ad}y_d, \quad (5.3.12)$$

对每个子系统 $x_{b,i}, i=1, 2, \dots, p_b$,

$$\dot{x}_{b,i,1} = x_{b,i,2} + L_{bd,i,1}y_b + L_{b,i,1}y_d, \quad y_{b,i} = x_{b,i,1}, \quad (5.3.13)$$

$$\dot{x}_{b,i,2} = x_{b,i,3} + L_{bd,i,2}y_b + L_{b,i,2}y_d, \quad (5.3.14)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{b,i,l_i} = L_{bd,i,l_i}y_b + L_{b,i,l_i}y_d, \quad (5.3.15)$$

对每个子系统 $x_{c,i}, i=1, 2, \dots, m_c$,

$$\dot{x}_{c,i,1} = x_{c,i,2} + L_{cb,i,1}y_b + L_{cd,i,1}y_d, \quad (5.3.16)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{c,i,r_i-1} = x_{c,i,r_i} + L_{cb,i,r_i-1}y_b + L_{cd,i,r_i-1}y_d, \quad (5.3.17)$$

$$\dot{x}_{c,i,r_i} = A_{c,i,r_i}x_{c,i,r_i} + L_{cb,i,r_i}y_b + L_{cd,i,r_i}y_d + u_{c,i}, \quad (5.3.18)$$

最后, 对每个子系统 $x_{d,i}, i=1, 2, \dots, m_d$,

$$\dot{x}_{d,i,1} = x_{d,i,2} + L_{d,i,1}y_d, \quad y_{d,i} = x_{d,i,1}, \quad (5.3.19)$$

$$\dot{x}_{d,i,2} = x_{d,i,3} + L_{d,i,2}y_d, \quad (5.3.20)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{d,i,q} = A_{d,i,a}x_a + A_{d,i,c}x_c + A_{d,i,b}x_b + A_{d,i,d}x_d + u_{d,i}, \quad (5.3.21)$$

其中, $A_{aa}, L_{ab}, \dots, A_{d,i,d}$ 是具有适当维数的定常矩阵。

证明 对于一般的严格正则多变量系统分解, 构造特殊坐标基(SCB)的基本思想和定理 5.2.1 的证明完全相同。尽管 MIMO 系统的分解过程要更复杂一些, 但本质还是要辨识系统输入和输出之间的积分器链, 仍然是对系统输出变量重复地求导。然而对一般的 MIMO 系统, 可能存在 3 种类型的积分器链:

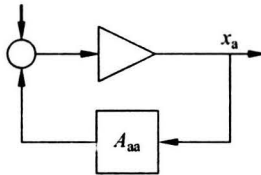
1. 从某个输入通道开始, 到某个输出结束的链。这种类型的链揭示了给定系统的无限零点结构, 覆盖了相应于 x_d 的子空间。

2. 从某个输入通道开始, 但是不在某个输出结束的链。这种类型的链覆盖了相应于 x_c 的子空间。

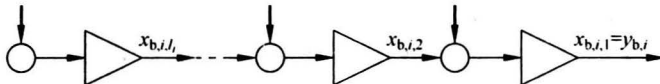
3. 不是从某个输入开始, 但是在某个输出结束的链。这种类型的链覆盖了相应于 x_b 的子空间。

这些子空间通常并不能包含给定系统的全部状态空间。剩余部分的子空间相应于 x_a , 这和系统的不变零点相关联。 x_a, x_b, x_c 和 x_d 的子系统显示在图 5.3.1 中。

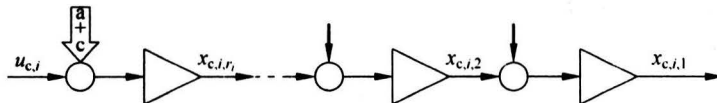
x_a ——没有直接输入和输出的子系统:



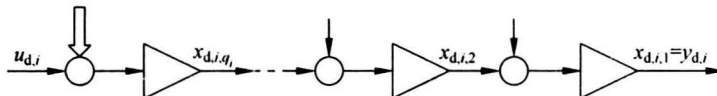
x_b ——没有直接输入的积分器链:



x_c ——没有直接输出的积分器链:



x_d ——有直接输入和输出的积分器链:



注意: 在 $x_{d,i}$ 中用双边箭头表示的信号是所有状态变量的一个线性组合; 在 $x_{c,i}$ 中用双边箭头表示和注有 $a+c$ 的信号是状态变量 x_a 和 x_c 的一个线性组合; 用粗垂直箭头表示的信号是输出变量 y_d 和 y_b 的一些线性组合; 用细垂直箭头表示的信号是输出变量 y_d 的一些线性组合。

图 5.3.1 MIMO 系统结构分解的图示

下面的逐步算法把给定系统分解成各种子系统。

SCB 步骤 1 初始化

由于矩阵 C 是满秩的,我们把它划分为

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix}, \quad (5.3.22)$$

其中 $C_i, i=1, 2, \dots, p$, 是相互独立的行矢量。对于每个 $C_i, i=1, 2, \dots, p$, 我们都分配一个相应的变换矩阵 Z_i , 初始化为

$$Z_i := C_i. \quad (5.3.23)$$

我们也同时定义一个标志矢量 f 为

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3.24)$$

它将作为标志,用在 SCB 步骤 2 的迭代过程中。注意,在算法的进行过程中, f 的元素将被零替代,最终成为零矢量。另一方面, Z_i 将被增加新的行,形成所需状态变换的一部分。初始化的还有

$$Z := C, \quad (5.3.25)$$

以及 3 个空的矩阵 Z_d, W_d 和 Z_b 。注意, Z_d, W_d 和 Z_b 将分别用来形成与 x_d, u_d 和 x_b 相关联的变换。这些矩阵同样是可变的,即在过程进行中会有新的元素加入。这种形式的算法特别易于用软件来实现,如 MATLAB。最后,我们令 $v := 0$ 和 $w := 0$ 。

SCB 步骤 2 对系统输出的连续求导

这一步一直要进行到 f 成为一个零矢量。令

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}. \quad (5.3.26)$$

对每个非零元素 $f_i, i=1, 2, \dots, p$, 把相应的变换矩阵重写为

$$Z_i = \begin{pmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,2} \\ \vdots \\ C_{i,\alpha_i} \end{pmatrix}, \quad (5.3.27)$$

其中, $\alpha_i = \text{rank}(Z_i)$ 。令 $x_{i,\alpha_i} := C_{i,\alpha_i} x$, 则可得

$$\dot{x}_{i,\alpha_i} = C_{i,\alpha_i} \dot{x} = C_{i,\alpha_i} A x + C_{i,\alpha_i} B u. \quad (5.3.28)$$

以下的检验将对所有标志位 f_i 非零的 Z_i 进行。

情形 1 如果

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} W_d \\ C_{i,\alpha_i} B \end{bmatrix} \right) > \text{rank}(W_d), \quad (5.3.29)$$

则和第 i 个输出相关联的积分器链延伸到了一个系统输入。这是积分器链的结束,并且属于和 x_d 相关联的子空间。这就意味着,给定系统具有 α_i 阶的无限零点。在这种情形下,我们把标志矢量 f 中的标志位 f_i 置为标量 0,即停止对这个输出变量进一步的求导。除此以外,对矩阵 Z_d 和 W_d 进行如下的增广:

$$Z_d := \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_i \end{bmatrix}, \quad W_d := \begin{bmatrix} W_d \\ C_{i,\alpha_i} B \end{bmatrix}. \quad (5.3.30)$$

这些矩阵被分别用来定义新的与 x_d 以及 u_d 相关联的状态和输入变量。我们也令

$$v := v + 1 \text{ 和 } q_v := \alpha_i, \quad (5.3.31)$$

再对下一个标志位 $f_i \neq 0$ 的 Z_i 进行检验。

情形 2 如果

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} W_d \\ C_{i,\alpha_i} B \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(W_d), \quad (5.3.32)$$

这表明 $C_{i,\alpha_i} B$ 或者是零矢量,或者是 W_d 的行的线性组合。注意,到现在为止,我们已经总共辨识出了 v 个无限零点,所以 Z_d 可以表示为

$$Z_d = \begin{bmatrix} Z_{d,1} \\ Z_{d,2} \\ \vdots \\ Z_{d,v} \end{bmatrix}, \quad (5.3.33)$$

在 $j=1,2,\dots,v$ 的情况下,

$$Z_{d,j} = \begin{bmatrix} C_{d,j,1} \\ C_{d,j,2} \\ \vdots \\ C_{d,j,q_j} \end{bmatrix}. \quad (5.3.34)$$

同样有

$$W_d = \begin{bmatrix} C_{d,1,q_1} B \\ C_{d,2,q_2} B \\ \vdots \\ C_{d,v,q_v} B \end{bmatrix}. \quad (5.3.35)$$

性质(5.3.32)表明存在一组标量,比如说是 $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,v}$,使得

$$C_{i,\alpha_i} B = \sum_{j=1}^v \beta_{i,j} C_{d,j,q_j} B. \quad (5.3.36)$$

现在可定义

$$\left. \begin{aligned} \check{C}_{i,1} &= C_{i,1} - \sum_{j=1}^v \beta_{i,j} C_{d,j,q_j - \alpha_i + 1} \\ \check{C}_{i,2} &= C_{i,2} - \sum_{j=1}^v \beta_{i,j} C_{d,j,q_j - \alpha_i + 2} \\ &\vdots \\ \check{C}_{i,\alpha_i} &= C_{i,\alpha_i} - \sum_{j=1}^v \beta_{i,j} C_{d,j,q_j} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.37)$$

这里设 $C_{d,j,s}$ 在 $s \leq 0$ 时为零。很容易验证

$$q_j - \alpha_i + 1 \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, v, \quad (5.3.38)$$

这等同于 $\check{C}_{i,1}$ 是原输出矩阵 C 的行的线性组合。现在根据式(5.3.36)和式(5.3.37),很容易验证,对于 $s = 1, 2, \dots, \alpha_i$,

$$\check{C}_{i,s} B = 0, \quad (5.3.39)$$

而对 $s = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1$, 对某些标量 $\gamma_{i,s,j}$, 有

$$\check{C}_{i,s+1} = \check{C}_{i,s} A - \sum_{j=1}^v \gamma_{i,s,j} C_{d,j,1}. \quad (5.3.40)$$

令

$$\check{C}_{i,\alpha_i+1} = \check{C}_{i,\alpha_i} A, \quad (5.3.41)$$

然后对下面的子情形进行检验。

子情形 2.1 如果

$$\text{rank} \left[\begin{array}{c} Z \\ \check{C}_{i,\alpha_i+1} \end{array} \right] > \text{rank}(Z), \quad (5.3.42)$$

则和第 i 个输出相关联的链中还有更多的积分器,需要进一步地辨识。下面对 Z 和 Z_i 更新:

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ \check{C}_{i,\alpha_i+1} \end{bmatrix}, \quad Z_i := \begin{bmatrix} \check{C}_{i,1} \\ \check{C}_{i,2} \\ \vdots \\ \check{C}_{i,\alpha_i} \\ \check{C}_{i,\alpha_i+1} \end{bmatrix}, \quad (5.3.43)$$

然后对下一个标志位 $f_i \neq 0$ 的 Z_i 进行检验。

子情形 2.2 如果

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Z \\ \check{C}_{i,\sigma_i+1} \end{bmatrix} = \text{rank}(Z), \quad (5.3.44)$$

则和第 i 个输出相关的链已经不再有积分器了。该积分器链在没有碰到一个输入时就已经结束了,属于和 x_b 相关联的子空间。在这种情形下,我们把标志矢量 f 中的相应的标志位 f_i 置为 0,表明对这个输出变量不再求导,并分别对 Z_i 和 Z_b 进行如下的增广:

$$Z_i := \begin{bmatrix} \check{C}_{i,1} \\ \check{C}_{i,2} \\ \vdots \\ \check{C}_{i,\sigma_i} \end{bmatrix}, \quad Z_b := \begin{bmatrix} Z_b \\ Z_i \end{bmatrix}, \quad (5.3.45)$$

它将用于定义新的状态变量 x_b ,同时令

$$w := w + 1 \quad \text{和} \quad l_w := \alpha_i. \quad (5.3.46)$$

为了后面的使用,我们把 Z_b 写为

$$Z_b = \begin{bmatrix} Z_{b,1} \\ Z_{b,2} \\ \vdots \\ Z_{b,w} \end{bmatrix}, \quad (5.3.47)$$

其中

$$Z_{b,j} = \begin{bmatrix} C_{b,j,1} \\ C_{b,j,2} \\ \vdots \\ C_{b,j,l_j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, w. \quad (5.3.48)$$

以上检验必须对所有标志位 $f_i \neq 0$ 的 Z_i 进行。注意,不论是在情形 1 还是在子情形 2.2 中,标志矢量 f 中都有一个元素被置成标量零。所以, f 最终将成为零矢量。接下来,如果 $f=0$,则转到 SCB 步骤 3,否则返回到 SCB 步骤 2。

SCB 步骤 3 中间变换

令 $m_d = v$,把 Z_d 重写为

$$Z_d = \begin{bmatrix} Z_{d,1} \\ Z_{d,2} \\ \vdots \\ Z_{d,m_d} \end{bmatrix}, \quad (5.3.49)$$

其中 $\text{rank}(Z_{d,i}) = q_i, i = 1, 2, \dots, m_d$, 显然有 $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{m_d}$ 。把 W_d 也重写为

$$W_d = \begin{bmatrix} W_{d,1} \\ W_{d,2} \\ \vdots \\ W_{d,m_d} \end{bmatrix}. \quad (5.3.50)$$

下面令 $p_b = w$, 把 Z_b 重写为

$$Z_b = \begin{bmatrix} Z_{b,1} \\ Z_{b,2} \\ \vdots \\ Z_{b,p_b} \end{bmatrix}, \quad (5.3.51)$$

其中 $\text{rank}(Z_{b,i}) = l_i, i = 1, 2, \dots, p_b$, 显然有 $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{p_b}$ 。同时令

$$n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i, \quad n_b = \sum_{i=1}^{p_b} l_i, \quad n_0 = n - n_d - n_b, \quad (5.3.52)$$

令 Z_0 为一个 $n_0 \times n$ 的定常矩阵, 使得

$$S := \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_b \\ Z_d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_{bd} \end{bmatrix} \quad (5.3.53)$$

是非奇异的。和前面的分解一样, 我们通常选择 Z_{bd} 零空间的基作为 Z_0 的行。现在定义新的状态变量

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{x}_b \\ x_d \end{bmatrix} = Sx = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_b \\ Z_d \end{bmatrix} x, \quad (5.3.54)$$

其中

$$\bar{x}_b = \begin{bmatrix} \bar{x}_{b,1} \\ \bar{x}_{b,2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{b,p_b} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{b,i} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{b,i,1} \\ \bar{x}_{b,i,2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{b,i,l_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p_b, \quad (5.3.55)$$

和

$$x_d = \begin{bmatrix} x_{d,1} \\ x_{d,2} \\ \vdots \\ x_{d,m_d} \end{bmatrix}, \quad x_{d,i} = \begin{bmatrix} x_{d,i,1} \\ x_{d,i,2} \\ \vdots \\ x_{d,i,q_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m_d. \quad (5.3.56)$$

令 $m_c = m - m_d$ 和一个 $m_c \times m$ 定常矩阵 W_c , 使得

$$W = \begin{bmatrix} W_d \\ W_c \end{bmatrix} \quad (5.3.57)$$

是非奇异的。同样地,可选 W_d 零空间的基作为 W_c 的行,然后定义新的输入变量

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_d \\ \bar{u}_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} W_d \\ W_c \end{bmatrix} u, \quad (5.3.58)$$

其中

$$u_d = \begin{pmatrix} u_{d,1} \\ u_{d,2} \\ \vdots \\ u_{d,m_d} \end{pmatrix}, \quad (5.3.59)$$

定义新的输出变量

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_d \\ \bar{y}_b \end{pmatrix} = My, \quad (5.3.60)$$

其中

$$y_d = \begin{pmatrix} y_{d,1} \\ y_{d,2} \\ \vdots \\ y_{d,m_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{d,1,1} \\ x_{d,2,1} \\ \vdots \\ x_{d,m_d,1} \end{pmatrix} \quad (5.3.61)$$

和

$$\bar{y}_b = \begin{pmatrix} \bar{y}_{b,1} \\ \bar{y}_{b,2} \\ \vdots \\ \bar{y}_{b,\rho_b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{b,1,1} \\ \bar{x}_{b,2,1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{b,\rho_b,1} \end{pmatrix}. \quad (5.3.62)$$

SCB 步骤 4 确定 x_d

根据式(5.3.54)和式(5.3.58)分别定义的状态和输入变换,我们有

$$\dot{x}_0 = A_{00}x_0 + \check{A}_{0b}\bar{x}_b + \check{A}_{0d}x_d + B_{0d}u_d + B_{0c}\bar{u}_c, \quad (5.3.63)$$

其中 A_{00} 、 \check{A}_{0b} 、 \check{A}_{0d} 、 B_{0c} 和 B_{0d} 是一些定常矩阵。对每个子系统 $x_{d,i}$, $i=1,2,\dots,m_d$, 根据式(5.3.30)、式(5.3.33)~式(5.3.35)和式(5.3.40),对于某些适当的定常矩阵 $A_{d,i,0}$ 、 $\bar{A}_{d,i,b}$ 、 $A_{d,i,d}$ 和 $L_{d,i,j}$, $j=1,2,\dots,q_i-1$, 我们有

$$\dot{x}_{d,i,1} = x_{d,i,2} + L_{d,i,1}y_d, \quad y_{d,i} = x_{d,i,1}, \quad (5.3.64)$$

$$\dot{x}_{d,i,2} = x_{d,i,3} + L_{d,i,2}y_d, \quad (5.3.65)$$

⋮

$$\dot{x}_{d,i,q_i} = A_{d,i,0}x_0 + \bar{A}_{d,i,b}\bar{x}_b + A_{d,i,d}x_d + u_{d,i}. \quad (5.3.66)$$

根据 SCB 步骤 2 的过程,我们很容易验证 $L_{d,i,j}$ 具有形式

$$L_{d,i,j} = [\ell_{d,i,j,1} \quad \cdots \quad \ell_{d,i,j,i-1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]. \quad (5.3.67)$$

对子系统 $\bar{x}_{b,i}, i=1,2,\dots,p_b$, 根据式(5.3.39)、式(5.3.40)和式(5.3.44), 对于某些定常行矢量 $\alpha_{bb,i,s,j}$ 、 $\alpha_{bd,i,s,j}$ 和 $\bar{L}_{b,i,j}$, 我们有

$$\dot{\bar{x}}_{b,i,1} = \bar{x}_{b,i,2} + \bar{L}_{b,i,1}y_d, \quad \bar{y}_{b,i} = \bar{x}_{b,i,1}, \quad (5.3.68)$$

$$\dot{\bar{x}}_{b,i,2} = \bar{x}_{b,i,3} + \bar{L}_{b,i,2}y_d, \quad (5.3.69)$$

⋮

$$\dot{\bar{x}}_{b,i,l_i} = \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=1}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j} + \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j}. \quad (5.3.70)$$

但是,动态方程(5.3.70)并不是定理 5.3.1 中所期望的形式。我们需要引入进一步的变换,以使得这部分的动态只依赖输出变量 y_b 和 y_d 。

SCB 步骤 5 确定 x_b

定义

$$x_b := \begin{bmatrix} x_{b,1} \\ x_{b,2} \\ \vdots \\ x_{b,p_b} \end{bmatrix}, \quad x_{b,i} := \begin{bmatrix} x_{b,i,1} \\ x_{b,i,2} \\ \vdots \\ x_{b,i,l_i} \end{bmatrix}, \quad y_b := \begin{bmatrix} y_{b,1} \\ y_{b,2} \\ \vdots \\ y_{b,p_b} \end{bmatrix}, \quad (5.3.71)$$

其中

$$\begin{aligned} x_{b,i,1} &:= \bar{x}_{b,i,1} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=l_i+1}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j-l_i} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=l_i+1}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j-l_i}, \end{aligned} \quad (5.3.72)$$

$$\begin{aligned} x_{b,i,2} &:= \bar{x}_{b,i,2} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=l_i}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j-l_i+1} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=l_i}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j-l_i+1}, \end{aligned} \quad (5.3.73)$$

⋮

$$\begin{aligned} x_{b,i,l_i-1} &:= \bar{x}_{b,i,l_i-1} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j-2} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j-2}, \end{aligned} \quad (5.3.74)$$

$$\begin{aligned} x_{b,i,l_i} &:= \bar{x}_{b,i,l_i} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j-1} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j-1}, \end{aligned} \quad (5.3.75)$$

$$\begin{aligned} y_{b,i} &:= x_{b,i,1} \\ &= \bar{x}_{b,i,1} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=l_i+1}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j-l_i} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=l_i+1}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j-l_i} \\ &= \bar{x}_{b,i,1} - \sum_{s=1}^{p_b} \alpha_{bb,i,s,l_i+1} \bar{x}_{b,s,1} - \sum_{s=1}^{m_d} \alpha_{bd,i,s,l_i+1} x_{d,s,1} \\ &= \bar{x}_{b,i,1} - \sum_{s=1}^{p_b} \alpha_{bb,i,s,l_i+1} \bar{y}_{b,s} - \sum_{s=1}^{m_d} \alpha_{bd,i,s,l_i+1} y_{d,s}. \end{aligned} \quad (5.3.76)$$

可见, $y_{b,i}$ 是 y_d 和 \bar{y}_b 的一个线性组合。注意, 在式(5.3.72)~式(5.3.76)的定义中, 当 $\ell > l_s$ 时, 设 $\alpha_{bb,i,s,\ell} = 0$; 当 $\ell > q_s$ 时, 设 $\alpha_{bd,i,s,\ell} = 0$ 。现在可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_{b,i,l_i} &= \dot{\bar{x}}_{b,i,l_i} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \dot{\bar{x}}_{b,s,j-1} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} \dot{x}_{d,s,j-1} \\ &= \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=1}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j} + \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} (\bar{x}_{b,s,j} + \bar{L}_{b,s,j-1} y_d) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} (x_{d,s,j} + L_{d,s,j-1} y_d) \\ &= \sum_{s=1}^{p_b} \alpha_{bb,i,s,1} \bar{x}_{b,s,1} + \sum_{s=1}^{m_d} \alpha_{bd,i,s,1} x_{d,s,1} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{L}_{b,s,j-1} y_d \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} L_{d,s,j-1} y_d \\ &= L_{bb,i,l_i} y_b + L_{bd,i,l_i} y_d, \end{aligned} \quad (5.3.77)$$

其中, L_{bb,i,l_i} 和 L_{bd,i,l_i} 的定义由式中可见。对于某些定常行矢量 L_{bb,i,l_i-1} 和 L_{bd,i,l_i-1} , 我们也有

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{x}}_{b,i,l_i-1} &= \dot{\bar{x}}_{b,i,l_i-1} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \dot{\bar{x}}_{b,s,j-2} \\
 &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} \dot{x}_{d,s,j-2} \\
 &= \bar{x}_{b,i,l_i} + \bar{L}_{b,i,l_i-1} y_d \\
 &\quad - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} (\bar{x}_{b,s,j-1} + \bar{L}_{b,s,j-2} y_d) \\
 &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} (x_{d,s,j-1} + L_{d,s,j-2} y_d) \\
 &= \bar{x}_{b,i,l_i} - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{x}_{b,s,j-1} - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=2}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} x_{d,s,j-1} \\
 &\quad + \sum_{s=1}^{p_b} \alpha_{bb,i,s,2} \bar{x}_{b,s,1} + \sum_{s=1}^{m_d} \alpha_{bd,i,s,2} x_{d,s,1} + \bar{L}_{b,i,l_i-1} y_d \\
 &\quad - \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,l_s)} \alpha_{bb,i,s,j} \bar{L}_{b,s,j-2} y_d - \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=3}^{\min(l_i+1,q_s)} \alpha_{bd,i,s,j} L_{d,s,j-2} y_d \\
 &= \bar{x}_{b,i,l_i} + L_{bb,i,l_i-1} y_b + L_{bd,i,l_i-1} y_d. \tag{5.3.78}
 \end{aligned}$$

同样, 对某些选择合适的 $L_{bb,i,k}$ 和 $L_{bd,i,k}$, $k=l_i-2, l_i-3, \dots, 1$, 我们有

$$\dot{\bar{x}}_{b,i,k} = \bar{x}_{b,i,k+1} + L_{bb,i,k} y_b + L_{bd,i,k} y_d, \tag{5.3.79}$$

现在已经把子系统 x_b 辨识出来了, 并且是所期望的形式。

接下来, 式(5.3.63)很显然可以改写为

$$\dot{x}_0 = A_{00} x_0 + A_{0b} x_b + A_{0d} x_d + B_{0d} u_d + B_{0c} \bar{u}_c, \tag{5.3.80}$$

对某些适当定义的定常矩阵 $A_{d,i,0}$ 、 $A_{d,i,b}$ 和 $A_{d,i,d}$, 式(5.3.64)~式(5.3.66)可改写为

$$\dot{x}_{d,i,1} = x_{d,i,2} + L_{d,i,1} y_d, \quad y_{d,i} = x_{d,i,1} \tag{5.3.81}$$

$$\dot{x}_{d,i,2} = x_{d,i,3} + L_{d,i,2} y_d, \tag{5.3.82}$$

⋮

$$\dot{x}_{d,i,q_i} = A_{d,i,0} x_0 + A_{d,i,b} x_b + A_{d,i,d} x_d + u_{d,i}. \tag{5.3.83}$$

我们还需要对式(5.3.80)进一步地处理, 以便把 x_0 分解成子空间 x_a 和 x_c , 而且使这部分的动态只依赖于输出 y_d 、 y_b 和控制 \bar{u}_c 。

SCB 步骤 6 从式(5.3.80)中消去 u_d

由式(5.3.83)可得

$$u_d = \begin{bmatrix} \dot{x}_{d,1,q_1} \\ \dot{x}_{d,2,q_2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{d,m_d,q_{m_d}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{d,1,0} \\ A_{d,2,0} \\ \vdots \\ A_{d,m_d,0} \end{bmatrix} x_0 - \begin{bmatrix} A_{d,1,b} \\ A_{d,2,b} \\ \vdots \\ A_{d,m_d,b} \end{bmatrix} x_b - \begin{bmatrix} A_{d,1,d} \\ A_{d,2,d} \\ \vdots \\ A_{d,m_d,d} \end{bmatrix} x_d. \quad (5.3.84)$$

把式(5.3.84)代入式(5.3.80),可得对于某些适当的矩阵 \bar{A}_{00} 、 \bar{A}_{0b} 和 \bar{A}_{0d} , 有

$$\dot{x}_0 = \bar{A}_{00} x_0 + \bar{A}_{0b} x_b + \bar{A}_{0d} x_d + B_{0d} \begin{bmatrix} \dot{x}_{d,1,q_1} \\ \dot{x}_{d,2,q_2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{d,m_d,q_{m_d}} \end{bmatrix} + B_{0c} \bar{u}_c. \quad (5.3.85)$$

SCB 步骤 7 从式(5.3.85)中消去 \dot{x}_{d,i,q_i} , $i=1,2,\dots,m_d$

定义新的状态变量

$$\tilde{x}_0 := x_0 - B_{0d} \begin{bmatrix} x_{d,1,q_1} \\ x_{d,2,q_2} \\ \vdots \\ x_{d,m_d,q_{m_d}} \end{bmatrix}, \quad (5.3.86)$$

然后可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \bar{A}_{00} x_0 + \bar{A}_{0b} x_b + \bar{A}_{0d} x_d + B_{0c} \bar{u}_c \\ &= \bar{A}_{00} \begin{bmatrix} x_0 - B_{0d} \begin{bmatrix} x_{d,1,q_1} \\ x_{d,2,q_2} \\ \vdots \\ x_{d,m_d,q_{m_d}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_{0d} x_d + \bar{A}_{00} B_{0d} \begin{bmatrix} x_{d,1,q_1} \\ x_{d,2,q_2} \\ \vdots \\ x_{d,m_d,q_{m_d}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \bar{A}_{0b} x_b + B_{0c} \bar{u}_c \\ &= \bar{A}_{00} \tilde{x}_0 + \bar{A}_{0b} x_b + \tilde{A}_{0d} x_d + B_{0c} \bar{u}_c, \end{aligned} \quad (5.3.87)$$

其中, \tilde{A}_{0d} 的定义由式中可见。同样,式(5.3.70)和式(5.3.83)中的 x_0 要用 \tilde{x}_0 来代替,它的系数以及式(5.3.70)和式(5.3.83)中 x_d 的系数可以明显的方式重新定义。然而,这些系数和进一步的分解并不相关。为了在下一步中的应用,对于某些定常矢量 $A_{0b,i,j}$ 和 $A_{0d,i,j}$,把式(5.3.87)改写为

$$\dot{\tilde{x}}_0 = \bar{A}_{00} \tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^{p_b} \sum_{j=1}^{l_j} A_{0b,i,j} x_{b,i,j} + \sum_{i=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{q_j} A_{0d,i,j} x_{d,i,j} + B_{0c} \bar{u}_c. \quad (5.3.88)$$

SCB 步骤 8 从式(5.3.88)中消去 $x_{b,i,j}, j=2,3,\dots,l_i, i=1,2,\dots,p_b$ 和 $x_{d,i,j}, j=2,3,\dots,q_i, i=1,2,\dots,m_d$ 。

现在要找的变换是要把和 \tilde{x}_0 相关联的动态只用 $y_{d,s}, s=1,2,\dots,m_d$ 和 $y_{b,s}, s=1,2,\dots,p_b$ 来表示。

如果 $\max\{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}, l_1, l_2, \dots, l_{p_b}\} = 1$, 省略下面的子步骤而直接到 SCB 步骤 9, 否则, 初始化 $i := 0$, 设 $\tilde{x}_{0,0} := \tilde{x}_0$; $A_{0b,s,j,0} := A_{0b,s,j}, s=1,2,\dots,p_b, j=1,2,\dots,l_s$; $A_{0d,s,j,0} := A_{0d,s,j}, s=1,2,\dots,m_d, j=1,2,\dots,q_s$, 执行下面的子步骤。

子步骤 8.1 首先, 注意到

$$\dot{\tilde{x}}_{0,i} = \bar{A}_{00} \tilde{x}_{0,i} + \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=1}^{l_s-i} A_{0b,s,j,i} x_{b,s,j} + \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{q_s-i} A_{0d,s,j,i} x_{d,s,j} + B_{0c} \bar{u}_c.$$

我们要在上面的表达式中消去 $x_{d,s,q_s-i}, s=1,2,\dots,m_d$ 和 $x_{b,s,l_s-i}, s=1,2,\dots,p_b$ 。

定义

$$\tilde{x}_{0,i+1} := \tilde{x}_{0,i} - \sum_{s=1}^{p_b} A_{0b,s,l_s-i,i} x_{b,s,l_s-i-1} - \sum_{s=1}^{m_d} A_{0d,s,q_s-i,i} x_{d,s,q_s-i-1},$$

如果 $l_s-i-1 \leq 0$, 设 $A_{0b,s,l_s-i,i} = 0$; 如果 $q_s-i-1 \leq 0$, 设 $A_{0d,s,q_s-i,i} = 0$ 。根据式(5.3.68)~式(5.3.83), 有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{0,i+1} &= \dot{\tilde{x}}_{0,i} - \sum_{s=1}^{p_b} A_{0b,s,l_s-i,i} \dot{x}_{b,s,l_s-i-1} - \sum_{s=1}^{m_d} A_{0d,s,q_s-i,i} \dot{x}_{d,s,q_s-i-1} \\ &= \bar{A}_{00} \tilde{x}_{0,i} + \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=1}^{l_s-i} A_{0b,s,j,i} x_{b,s,j} + \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{q_s-i} A_{0d,s,j,i} x_{d,s,j} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{p_b} A_{0b,s,l_s-i,i} (x_{b,s,l_s-i} + L_{b,s,l_s-i-1} y_d) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} A_{0d,s,q_s-i,i} (x_{d,s,q_s-i} + L_{d,s,q_s-i-1} y_d) + B_{0c} \bar{u}_c \\ &= \bar{A}_{00} \tilde{x}_{0,i} + \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=1}^{l_s-i-1} A_{0b,s,j,i} x_{b,s,j} + \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{q_s-i-1} A_{0d,s,j,i} x_{d,s,j} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{p_b} A_{0b,s,l_s-i,i} L_{b,s,l_s-i-1} y_d \\ &\quad - \sum_{s=1}^{m_d} A_{0d,s,q_s-i,i} L_{d,s,q_s-i-1} y_d + B_{0c} \bar{u}_c. \end{aligned} \quad (5.3.89)$$

显然, 我们已经在式(5.3.89)中消去了所有 $x_{d,s,q_s-i}, s=1,2,\dots,m_d$ 和所有 $x_{b,s,l_s-i}, s=1,2,\dots,p_b$ 。这样就可以对某些适当的定常矢量 $A_{0b,s,j,i+1}$ 和 $A_{0d,s,j,i+1}$, 把式(5.3.89)重写为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{0,i+1} &= \bar{A}_{00} \tilde{x}_{0,i+1} + \sum_{s=1}^{p_b} \sum_{j=1}^{l_s-i-1} A_{0b,s,j,i+1} x_{b,s,j} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{m_d} \sum_{j=1}^{q_s-i-1} A_{0d,s,j,i+1} x_{d,s,j} + B_{0c} \bar{u}_c. \end{aligned} \quad (5.3.90)$$

子步骤 8.2 如果 $i = \max\{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}, l_1, l_2, \dots, l_{p_b}\} - 2$, 则转到 SCB 步骤 9; 否则令 $i := i + 1$, 返回到子步骤 8.1, 如此重复, 直到和 $\tilde{x}_{0,i+1}$ 相关的动态中只有 y_d 和 y_b .

SCB 步骤 9 分离 x_a 和 x_c

令 $\hat{x}_0 := \tilde{x}_{0,i+1}$, 则有

$$\dot{\hat{x}}_0 = \bar{A}_{00} \hat{x}_0 + L_{0b} y_b + L_{0d} y_d + B_{0c} \bar{u}_c. \quad (5.3.91)$$

下面我们应用第 4 章定理 4.4.1 的结果, 对 (\bar{A}_{00}, B_{0c}) 进行分解. 根据定理 4.4.1, 存在一个非奇异的 $n_0 \times n_0$ 变换 T_{0s} 和一个非奇异的 $m_c \times m_c$ 变换 T_{0i} , 可以实现下面的分解:

$$\hat{x}_0 = T_{0s} \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_c = T_{0i} u_c, \quad (5.3.92)$$

$$x_c = \begin{bmatrix} x_{c,1} \\ x_{c,2} \\ \vdots \\ x_{c,m_c} \end{bmatrix}, \quad x_{c,i} = \begin{bmatrix} x_{c,i,1} \\ x_{c,i,2} \\ \vdots \\ x_{c,i,r_i} \end{bmatrix}, \quad u_c = \begin{bmatrix} u_{c,1} \\ u_{c,2} \\ \vdots \\ u_{c,m_c} \end{bmatrix}, \quad (5.3.93)$$

其中, $\{r_1, r_2, \dots, r_{m_c}\}$ 是矩阵对 (\bar{A}_{00}, B_{0c}) 的可控性指数. 我们可进一步把 x_a 和 x_c 的动态方程写成如下形式:

$$\dot{x}_a = A_{aa} x_a + L_{ab} y_b + L_{ad} y_d, \quad (5.3.94)$$

对每个 $x_{c,i}, i = 1, 2, \dots, m_c$, 以及一些定常矩阵, 有

$$\dot{x}_{c,i,1} = x_{c,i,2} + L_{cb,i,1} y_b + L_{cd,i,1} y_d, \quad (5.3.95)$$

⋮

$$\dot{x}_{c,i,r_i-1} = x_{c,i,r_i} + L_{cb,i,r_i-1} y_b + L_{cd,i,r_i-1} y_d, \quad (5.3.96)$$

$$\dot{x}_{c,i,r_i} = A_{c,i,a} x_a + A_{c,i,c} x_c + L_{cb,i,r_i} y_b + L_{cd,i,r_i} y_d + u_{c,i}. \quad (5.3.97)$$

显然, 关于 x_d 的动态方程中的 x_0 , 即式(5.3.81)~式(5.3.83), 能以简单的方式被 x_a 和 x_c 代替. 特别是对每个子系统 $x_{d,i}, i = 1, 2, \dots, m_d$, 对于某些适当的定常矢量 $A_{d,i,a}$ 、 $A_{d,i,b}$ 、 $A_{d,i,c}$ 和 $A_{d,i,d}$, 有

$$\dot{x}_{d,i,1} = x_{d,i,2} + L_{d,i,1} y_d, \quad y_{d,i} = x_{d,i,1}, \quad (5.3.98)$$

$$\dot{x}_{d,i,2} = x_{d,i,3} + L_{d,i,2} y_d, \quad (5.3.99)$$

⋮

$$\dot{x}_{d,i,q_i} = A_{d,i,a} x_a + A_{d,i,b} x_b + A_{d,i,c} x_c + A_{d,i,d} x_d + u_{d,i}. \quad (5.3.100)$$

为了整个过程的最后完成,再来看在 SCB 步骤 5 中导出的和 x_b 相关的动态方程,即对每个 $x_{b,i}, i=1,2,\dots,p_b$,有

$$\dot{x}_{b,i,1} = x_{b,i,2} + L_{bb,i,1}y_b + L_{bd,i,1}y_d, \quad y_{b,i} = x_{b,i,1}, \quad (5.3.101)$$

$$\dot{x}_{b,i,2} = x_{b,i,3} + L_{bb,i,2}y_b + L_{bd,i,2}y_d, \quad (5.3.102)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{b,i,l_i} = L_{bb,i,l_i}y_b + L_{bd,i,l_i}y_d. \quad (5.3.103)$$

最后,我们注意到 Morse^[100] 的不变指数列 $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ 和 \mathbf{I}_4 , 或等价地, 给定系统 Σ 的不变零点结构、右可逆结构 S_R^* 、左可逆结构 S_L^* 和无限零点结构 S_∞^* (见定义 3.6.3) 都可以很容易地从上面的结构分解中得到。具体地说,

$$S_R^*(\Sigma) = \mathbf{I}_2 = \{r_1, r_2, \dots, r_{m_c}\}, \quad S_L^*(\Sigma) = \mathbf{I}_3 = \{l_1, l_2, \dots, l_{p_b}\}, \quad (5.3.104)$$

$$S_\infty^*(\Sigma) = \mathbf{I}_4 = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}, \quad (5.3.105)$$

\mathbf{I}_1 和 A_{nn} 的特征结构有关, 即特征值和相应 Jordan 块的大小。这些性质在 5.6 节中会有详细的验证。

至此, 我们已完成了一般严格正则多变量系统结构分解或特殊坐标基(SCB)的算法。 ■

我们用下面的例子来演示该算法。

例 5.3.1 考虑由式(5.3.1)所表示的严格正则系统 Σ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 3 & 2 & -4 & 3 & 2 & -4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -2 & 3 & 0 & -2 & 3 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 7 & -3 & -1 & 4 & -3 & -1 & 4 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们按照定理 5.4.1 中构造性证明的详细步骤来对 Σ 构造结构分解, 即特殊坐标基 (SCB) 分解。

SCB 步骤 1 初始化

首先对 C 进行分块

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

并设

$$Z_1 := C_1, \quad Z_2 := C_2, \quad Z_3 := C_3, \quad Z_4 := C_4,$$

$$f := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z := C.$$

还有 $Z_d := []$, $W_d := []$ 和 $Z_b := []$, 其中 $[]$ 表示空的矩阵。最后设 $v := 0$ 和 $w := 0$ 。

SCB 步骤 2 对系统输出的连续求导

注意到

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $f_1=1$, 我们分离出

$$Z_1 = [C_{1,1}] = [0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 2 \ -1],$$

计算出

$$C_{1,1}B = [0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

由此可得

$$\text{rank} \begin{pmatrix} W_d \\ C_{1,1}B \end{pmatrix} = 0 = \text{rank}(W_d),$$

它满足情形 2 的条件, 即式(5.3.32)。下面令 $\check{C}_{1,1} = C_{1,1}$, 并计算

$$\check{C}_{1,2} = \check{C}_{1,1}A = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ -1 \ 0 \ 2 \ -2 \ 0 \ 2 \ 1 \ -1 \ 0].$$

很容易验证

$$\text{rank} \begin{pmatrix} Z \\ \check{C}_{1,2} \end{pmatrix} = 5 > \text{rank}(Z) = 4,$$

这和子情形 2.1 相符, 即式(5.3.42)。因此, 我们对 Z 和 Z_1 更新如下:

$$Z := \begin{pmatrix} Z \\ \check{C}_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

和

$$Z_1 := \begin{pmatrix} \check{C}_{1,1} \\ \check{C}_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{matrix} \end{array}.$$

同样地, 因为 $f_2=1$, 我们分离出

$$Z_2 = [C_{2,1}] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

计算

$$C_{2,1}B = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

显然有

$$\text{rank} \begin{pmatrix} W_d \\ C_{2,1}B \end{pmatrix} = 1 > \text{rank}(W_d) = 0,$$

它满足情形 1 的条件,即式(5.3.29),表明和第 2 个输出变量相关联的积分器链碰到了一个系统输入。因此,我们设 $f_2 := 0$,以表明不再对这个输出求导,所以有

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

同时设

$$\mathbf{Z}_d := \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_d \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\mathbf{W}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_d \\ \mathbf{C}_{2,1}B \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

和

$$\nu := \nu + 1 = 1, \quad q_1 = \text{rank}(\mathbf{Z}_2) = 1.$$

我们现在处理下一个输出变量。再次因为 $f_3 = 1$,我们分离出

$$\mathbf{Z}_3 = [\mathbf{C}_{3,1}] = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1],$$

计算

$$\mathbf{C}_{3,1}B = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

然后检验

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_d \\ \mathbf{C}_{2,1}B \end{bmatrix} \right) = 1 = \text{rank}(\mathbf{W}_d),$$

这是情形 2,

$$\mathbf{Z}_d = [\mathbf{Z}_{d,1}] = [\mathbf{C}_{d,1,q_1}] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

和

$$\mathbf{W}_d = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

显然有 $\mathbf{C}_{3,1}B = \mathbf{W}_d$,因此计算出

$$\tilde{\mathbf{C}}_{3,1} = \mathbf{C}_{3,1} - \mathbf{C}_{d,1,q_1} = [0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1]$$

和

$$\tilde{\mathbf{C}}_{3,2} = \tilde{\mathbf{C}}_{3,1}A = [1 \ 1 \ 1 \ -4 \ 2 \ 1 \ -3 \ 2 \ 1 \ -3 \ -1 \ 3 \ -1].$$

下面检验

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{3,2} \end{bmatrix} \right) = 6 > \text{rank}(\mathbf{Z}) = 5,$$

它满足子情形 2.1 的条件。我们令

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ \tilde{C}_{3.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

和

$$Z_3 := \begin{bmatrix} \tilde{C}_{3.1} \\ \tilde{C}_{3.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

由于最后一个标志位 $f_4=1$, 我们分离出

$$Z_4 = [C_{4.1}] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0],$$

计算

$$C_{4.1}B = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

显然

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W_d \\ [C_{4.1}B] \end{bmatrix} = 1 = \text{rank}(W_d).$$

它属于情形 2。注意, 现在我们已经得到

$$Z_d = [Z_{d.1}] = [C_{d.1,q_1}] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

和

$$W_d = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

显然, $C_{4.1}B=W_d$ 。我们可计算

$$\tilde{C}_{4.1} = C_{4.1} - C_{d.1,q_1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0]$$

和

$$\tilde{C}_{4.2} = \tilde{C}_{4.1}A = [1 \ 0 \ 0 \ -3 \ 2 \ 0 \ -3 \ 3 \ 0 \ -3 \ -1 \ 2 \ 0].$$

接下来, 检验

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Z \\ \tilde{C}_{4.2} \end{bmatrix} = 7 > \text{rank}(Z) = 6,$$

它属于子情形 2.1。我们把 Z 和 Z_4 替换为

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ \tilde{C}_{4.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$Z_1 := \begin{bmatrix} \check{C}_{4,1} \\ \check{C}_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为标志矢量

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

没有完全等于 0, 还要重复 SCB 步骤 2. 因为 $f_1=1$, 我们分离出

$$Z_1 = \begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

计算

$$C_{1,2}B = [2 \ 2 \ 0 \ 0].$$

观察到

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} W_d \\ C_{1,2}B \end{bmatrix} \right) = 1 = \text{rank}(W_d),$$

这属于情形 2. 至此, 我们已经得到

$$Z_d = [Z_{d,1}] = [C_{d,1,q_1}] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

和

$$W_d = [1 \ 1 \ 0 \ 0].$$

显然有 $C_{1,2}B=2W_d$, 我们可计算出

$$\check{C}_{1,1} = C_{1,1} = [0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 2 \ -1],$$

$$\check{C}_{1,2} = C_{1,2} - 2C_{d,1,q_1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -2 \ 2 \ 0 \ -2 \ 2 \ 1 \ -1 \ 0]$$

和

$$\check{C}_{1,3} = \check{C}_{1,2}A = [2 \ 1 \ 1 \ -3 \ 1 \ 1 \ -3 \ 2 \ 1 \ -3 \ 0 \ 3 \ -1].$$

很容易验证

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} Z \\ \check{C}_{1,3} \end{bmatrix} \right) = 7 = \text{rank}(Z),$$

满足子情形 2. 2. 已经没有更多的积分器在这个输出变量相关联的链中了. 于是设 $f_1 := 0$, 标志矢量成为

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

同时把 Z_1 和 Z_b 替换为

$$Z_1 := \begin{bmatrix} \check{C}_{1,1} \\ \check{C}_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$Z_b := \begin{bmatrix} Z_b \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

令

$$w := w + 1 = 1, \quad l_1 = \text{rank}(Z_1) = 2.$$

注意到 $f_3 = 1$, 我们分离出

$$Z_3 = \begin{bmatrix} C_{3,1} \\ C_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

计算

$$C_{3,2}B = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0], \quad \text{rank} \left(\begin{bmatrix} W_d \\ C_{3,2}B \end{bmatrix} \right) = 1 = \text{rank}(W_d),$$

它满足情形 2 的条件。同样, 为了方便参照, 我们知道

$$Z_d = [Z_{d,1}] = [C_{d,1,q_1}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

和

$$W_d = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

显然 $C_{1,2}B = -W_d$ 。然后计算出

$$\check{C}_{3,1} = C_{3,1} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1],$$

$$\check{C}_{3,2} = C_{3,2} + C_{d,1,q_1} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \quad -3 \quad -1 \quad 3 \quad -1]$$

和

$$\check{C}_{3,3} = \check{C}_{3,2}A = [-2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0].$$

下面验证

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} Z \\ \check{C}_{3,3} \end{bmatrix} \right) = 8 > \text{rank}(Z) = 7,$$

它满足子情形 2.1。所以把 Z 和 Z_3 替换为

$$Z := \begin{bmatrix} Z \\ \check{C}_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$Z_3 = \begin{bmatrix} \check{C}_{3,1} \\ \check{C}_{3,2} \\ \check{C}_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

接下来,注意到 $f_4=1$, 我们有

$$Z_4 = \begin{bmatrix} C_{4,1} \\ C_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_{4,2}B = [-2 \quad -2 \quad 0 \quad 0], \quad \text{rank} \begin{bmatrix} W_d \\ C_{4,2}B \end{bmatrix} = 1 = \text{rank}(W_d),$$

它满足情形 2。我们知道

$$Z_d = [Z_{d,1}] = [C_{d,1,q_1}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

和

$$W_d = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

显然有 $C_{4,2}B = -2W_d$ 。然后计算出

$$\check{C}_{4,1} = C_{4,1} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0],$$

$$\check{C}_{4,2} = C_{4,2} + 2C_{d,1,q_1} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \quad -3 \quad -1 \quad 2 \quad 0]$$

和

$$\check{C}_{4,3} = \check{C}_{4,2}A = [-3 \quad -1 \quad -1 \quad 5 \quad -2 \quad -1 \quad 4 \quad -3 \quad -1 \quad 4 \quad 0 \quad -4 \quad 2],$$

并且验证

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Z \\ \check{C}_{4,3} \end{bmatrix} = 8 = \text{rank}(Z),$$

这相应于子情形 2.2。和这个输出变量相关联的链中已没有更多的积分器,所以设 $f_4 := 0$, 标志矢量成为

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

而且把 Z_4 和 Z_b 替换为

$$Z_4 := \begin{bmatrix} \check{C}_{4,1} \\ \check{C}_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z_b := \begin{bmatrix} Z_b \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{b,1} \\ Z_{b,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

再设

$$w := w + 1 = 2, \quad l_2 := \text{rank}(Z_4) = 2.$$

进一步注意到 $f_3 = 1$, 于是分离出

$$Z_3 = \begin{bmatrix} C_{3.1} \\ C_{3.2} \\ C_{3.3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

计算

$$C_{3.3}B = [1 \ 1 \ 1 \ 0], \quad \text{rank} \left(\begin{bmatrix} W_d \\ C_{3.3}B \end{bmatrix} \right) = 2 > \text{rank}(W_d) = 1,$$

满足情形 1。和这个输出相关联的积分器链碰到了一个系统输入, 所以设 $f_3 = 0$ (这时标志矢量 f 已经完全为 0 了), 替换 Z_d 和 W_d 为

$$Z_d := \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{d.1} \\ Z_{d.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_d := \begin{bmatrix} W_d \\ C_{3.3}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{d.1} \\ W_{d.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

以及 $v := v + 1 = 2, q_2 = \text{rank}(Z_3) = 3$ 。

SCB 步骤 3 中间变换

很容易计算出 $m_d = v = 2, p_b = w = 2, n_d = q_1 + q_2 = 4, n_b = l_1 + l_2 = 4$ 和 $n_0 = 13 - n_d - n_b = 5$ 。于是选择一个 $n_0 \times n$ 的矩阵

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

使得

$$S = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_b \\ Z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

是非奇异的。 W_c 的选择为

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W = \begin{bmatrix} W_d \\ W_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

是非奇异的。而从式(5.3.37)中可以得到和输出变量相关的变换 M , 结果是

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们得到了变换后的系统 $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1) := (SAS^{-1}, SBW^{-1}, MCS^{-1})$, 其中

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -2 & 1 & 0 & -5 & -8 & -8 & -14 & 4 & 1 & 4 & -5 \\ 14 & 9 & 6 & -3 & 0 & 9 & 16 & 10 & 28 & -6 & 2 & -11 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 14 & 11 & 7 & -3 & 0 & 8 & 10 & 4 & 20 & -3 & 5 & -11 & 4 \\ 23 & 16 & 10 & -5 & 0 & 14 & 23 & 12 & 41 & -8 & 5 & -18 & 11 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 2 & 6 & 1 & 8 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

和

$$\tilde{C}_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

SCB 步骤 4 x_d 的确定

实际上,和 x_d 相关的子系统已经在经过 SCB 步骤 3 变换后的系统中被正确地辨识出来了。根据算法中关于变换后的状态、输入和输出变量的定义,把变换后的系统重新写为

$$\dot{x}_0 = A_{00}x_0 + \tilde{A}_{0b}\bar{x}_b + \tilde{A}_{0d}x_d + B_{0d}u_d + B_{0c}\bar{u}_c,$$

其中

$$A_{00} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 14 & 9 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 14 & 11 & 7 & -3 & 0 \\ 23 & 16 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{0d} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{0c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{0b} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -8 & -14 \\ 9 & 16 & 10 & 28 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 10 & 4 & 20 \\ 14 & 23 & 12 & 41 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{0d} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ -6 & 2 & -11 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -11 & 4 \\ -8 & 5 & -18 & 11 \end{bmatrix}$$

和 $\bar{x}_{b,1}$ 相关的动态为

$$\dot{\bar{x}}_{b,1,1} = \bar{x}_{b,1,2} + 2y_{d,1}, \quad \bar{y}_{b,1} = \bar{x}_{b,1,1}, \quad (5.3.106)$$

$$\dot{\bar{x}}_{b,1,2} = \bar{x}_{b,1,1} + \bar{x}_{b,1,2} + 2\bar{x}_{b,2,1} + 2\bar{x}_{b,2,2}, \quad (5.3.107)$$

和 $\bar{x}_{b,2}$ 相关的动态为

$$\dot{\bar{x}}_{b,2,1} = \bar{x}_{b,2,2} - 2y_{d,1}, \quad \bar{y}_{b,2} = \bar{x}_{b,2,1}, \quad (5.3.108)$$

$$\dot{\bar{x}}_{b,2,2} = -x_{d,2,1} - x_{d,2,2} + x_{d,2,3}, \quad (5.3.109)$$

和 $x_{d,1}$ 相关的动态为

$$\dot{x}_{d,1,1} = [4 \ 3 \ 2 \ -1 \ 0]x_0 + [2 \ 6 \ 1 \ 8]\bar{x}_b + [1 \ 1 \ -4 \ 2]x_d + u_{d,1},$$

$y_{d,1} = x_{d,1,1}$ 。最后是和 $x_{d,2}$ 相关的动态

$$\dot{x}_{d,2,1} = x_{d,2,2} - y_{d,1}, \quad y_{d,2} = x_{d,2,1},$$

$$\dot{x}_{d,2,2} = x_{d,2,3},$$

$$\dot{x}_{d,2,3} = [4 \ 3 \ 2 \ -1 \ 0]x_0 + [1 \ 3 \ -1 \ 4]\bar{x}_b + [0 \ 3 \ -1 \ 1]x_d + u_{d,2}.$$

和 x_d 相关的子系统是所期望的形式,然而和 \bar{x}_b 相关的部分却不是, x_0 部分需要被进一步分解。

SCB 步骤 5 确定 x_b

根据式(5.3.72)~式(5.3.76)和式(5.3.106)~式(5.3.109),我们得到对 x_b 和 y_b 所需的变换为

$$x_{b,1,1} = \bar{x}_{b,1,1}, \quad y_{b,1} = x_{b,1,1} = \bar{y}_{b,1}, \quad (5.3.110)$$

$$x_{b,1,2} = \bar{x}_{b,1,2} - \bar{x}_{b,1,1} - 2\bar{x}_{b,2,1}, \quad (5.3.111)$$

$$x_{b,2,1} = \bar{x}_{b,2,1} - x_{d,2,1}, \quad y_{b,2} = x_{b,2,1} = \bar{y}_{b,2} - y_{d,2}, \quad (5.3.112)$$

$$x_{b,2,2} = \bar{x}_{b,2,2} + \bar{x}_{d,2,1} - \bar{x}_{d,2,2}, \quad (5.3.113)$$

这等价于下面的状态和输出变换,

$$S_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$M_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

变换后的系统为 $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2, \tilde{C}_2) := (S_b \tilde{A}_1 S_b^{-1}, S_b \tilde{B}_1, M_b \tilde{C}_1 S_b^{-1})$, 其中

$$\tilde{A}_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} -6 & -3 & -2 & 1 & 0 & -13 & -8 & -24 & -14 & & 4 & -9 & -10 & -5 \\ 14 & 9 & 6 & -3 & 0 & 25 & 16 & 42 & 28 & & -6 & 16 & 17 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 & 5 & 2 & 5 & 5 & & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 14 & 11 & 7 & -3 & 0 & 18 & 10 & 24 & 20 & & -3 & 9 & 9 & 4 \\ 23 & 16 & 10 & -5 & 0 & 37 & 23 & 58 & 41 & & -8 & 22 & 23 & 11 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 8 & 6 & 13 & 8 & & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 4 & 3 & 5 & 4 & & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right],$$

$\tilde{B}_2 = \tilde{B}_1$ 和 $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_1$, 或者是状态空间方程

$$\dot{x}_0 = A_{00}x_0 + A_{0b}x_b + A_{0d}x_d + B_{0d}u_d + B_{0c}\bar{u}_c, \quad (5.3.114)$$

其中 A_{00}, B_{0d}, B_{0c} 和前一步的相同,

$$A_{0b} = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -24 & -14 \\ 25 & 16 & 42 & 28 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \\ 18 & 10 & 24 & 20 \\ 37 & 23 & 58 & 41 \end{bmatrix}, \quad A_{0d} = \begin{bmatrix} 4 & -9 & -10 & -5 \\ -6 & 16 & 17 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 9 & 9 & 4 \\ -8 & 22 & 23 & 11 \end{bmatrix},$$

和 $x_{b,1}$ 相关的动态为

$$\dot{x}_{b,1,1} = x_{b,1,2} + y_{b,1} + 2y_{b,2} + 2y_{d,1} + 2y_{d,2}, \quad y_{b,1} = x_{b,1,1},$$

$$\dot{x}_{b,1,2} = y_{b,1} + 2y_{b,2} + 2y_{d,1} + 2y_{d,2},$$

和 $x_{b,2}$ 相关的动态为

$$\dot{x}_{b,2,1} = x_{b,2,2} - y_{d,1} - y_{d,2}, \quad y_{b,2} = x_{b,2,1},$$

$$\dot{x}_{b,2,2} = -y_{d,1} - y_{d,2},$$

和 $x_{d,1}$ 相关的动态为

$$\dot{x}_{d,1,1} = [4 \ 3 \ 2 \ -1 \ 0]x_0 + [8 \ 6 \ 13 \ 8]x_b + [1 \ 6 \ 4 \ 2]x_d + u_{d,1},$$

$y_{d,1} = x_{d,1,1}$, 和 $x_{d,2}$ 相关的动态为

$$\dot{x}_{d,2,1} = x_{d,2,2} - y_{d,1}, \quad y_{d,2} = x_{d,2,1},$$

$$\dot{x}_{d,2,2} = x_{d,2,3},$$

$\dot{x}_{d,2,3} = [4 \ 3 \ 2 \ -1 \ 0]x_0 + [4 \ 3 \ 5 \ 4]x_b + [0 \ 4 \ 3 \ 1]x_d + u_{d,2}$.
和 x_d 相关的子系统已经是所期望的形式了。

SCB 步骤 6 从式(5.3.114)中消去 u_d

从 x_d 的动态方程中可得

$$u_d = \begin{bmatrix} \dot{x}_{d,1,1} \\ \dot{x}_{d,2,3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_0 - \begin{bmatrix} 8 & 6 & 13 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} x_b - \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} x_d.$$

将其代入式(5.3.114),有

$$\dot{x}_0 = \bar{A}_{00}x_0 + \bar{A}_{0b}x_b + \bar{A}_{0d}x_d + B_{0d} \begin{bmatrix} \dot{x}_{d,1,1} \\ \dot{x}_{d,2,3} \end{bmatrix} + B_{0c} \bar{u}_c, \quad (5.3.115)$$

其中的系数矩阵 \bar{A}_{00} 、 \bar{A}_{0b} 和 \bar{A}_{0d} 可直接计算出来。

SCB 步骤 7 从式(5.3.115)中消去 $\dot{x}_{d,1,1}$ 和 $\dot{x}_{d,2,3}$

定义一个新的状态变量

$$\tilde{x}_0 := x_0 - B_{0d} \begin{pmatrix} x_{d,1,1} \\ x_{d,2,3} \end{pmatrix},$$

由此可得一个新的状态变换

$$S_{01} = \begin{bmatrix} I_5 & T_{01} \\ 0 & I_8 \end{bmatrix}, \quad T_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

我们得到一个新的变换后的系统 $(\tilde{A}_3, \tilde{B}_3, \tilde{C}_3) := (S_{01}\tilde{A}_2S_{01}^{-1}, S_{01}\tilde{B}_2, \tilde{C}_2S_{01}^{-1})$, 其中 $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_1$,

$$\tilde{A}_3 = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & -5 & -19 & -10 & 4 & -5 & -7 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & -1 & 0 & 17 & 10 & 32 & 20 & -5 & 8 & 11 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 & 5 & 2 & 5 & 5 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 10 & 8 & 5 & -2 & 0 & 18 & 10 & 27 & 20 & 0 & 7 & 7 & 6 \\ 11 & 7 & 4 & -2 & 0 & 25 & 14 & 43 & 29 & -6 & 10 & 14 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 8 & 6 & 13 & 8 & 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 4 & 3 & 5 & 4 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right],$$

$$\tilde{B}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

SCB 步骤 8 从和 x_0 相关的动态中消去 $x_{b,1,2}$ 、 $x_{b,2,2}$ 、 $x_{d,2,2}$ 和 $x_{d,2,3}$

首先,看 \tilde{A}_3 中与 $x_{b,1,2}$ 、 $x_{b,2,2}$ 和 $x_{d,2,3}$ 相关的系数,我们得到状态变换

$$S_{02} = \begin{bmatrix} I_5 & T_{02} \\ 0 & I_8 \end{bmatrix}, \quad T_{02} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -10 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ -14 & 0 & -29 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

和变换后的系统 $(\tilde{A}_4, \tilde{B}_4, \tilde{C}_4) := (S_{02} \tilde{A}_3 S_{02}^{-1}, S_{02} \tilde{B}_3, \tilde{C}_3 S_{02}^{-1})$, 其中

$$\tilde{A}_4 = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 11 & 0 & 4 & -5 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -5 & 8 & 9 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 & 12 & 0 & 21 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & -2 & 0 & 28 & 0 & 52 & 0 & 0 & 7 & 17 & 0 \\ 11 & 7 & 4 & -2 & 0 & 14 & 0 & 25 & 0 & -5 & 11 & 16 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 12 & 6 & 23 & 8 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 8 & 3 & 15 & 4 & 1 & 4 & 5 & 1 \end{array} \right],$$

$\tilde{B}_4 = \tilde{B}_3$ 和 $\tilde{C}_4 = \tilde{C}_1$ 。接下来, 观察 \tilde{A}_4 中和 $x_{d,2,2}$ 相关的系数, 得到另一个状态变换

$$S_{03} = \begin{bmatrix} I_5 & T_{03} \\ 0 & I_8 \end{bmatrix}, \quad T_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

和变换后的系统 $(\tilde{A}_5, \tilde{B}_5, \tilde{C}_5) := (S_{03}\tilde{A}_4S_{03}^{-1}, S_{03}\tilde{B}_4, \tilde{C}_4S_{03}^{-1})$, 其中 $\tilde{B}_5 = \tilde{B}_3, \tilde{C}_5 = \tilde{C}_1$,

$$\tilde{A}_5 = \left[\begin{array}{ccccc|ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 11 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 12 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 & 12 & 0 & 21 & 0 & 8 & 20 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & -2 & 0 & 28 & 0 & 52 & 0 & 17 & 45 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 4 & -2 & 0 & 14 & 0 & 25 & 0 & 11 & 31 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 12 & 6 & 23 & 8 & 2 & 16 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 8 & 3 & 15 & 4 & 1 & 14 & 5 & 1 \end{array} \right].$$

SCB 步骤 9 分离 x_a 和 x_c

观察变换后的系统 $(\tilde{A}_5, \tilde{B}_5, \tilde{C}_5)$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_0 &= \bar{A}_{00} \hat{x}_0 + L_{0b} y_b + L_{0d} y_d + B_{0c} \bar{u}_c \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & -2 & 0 \\ 11 & 7 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_0 + \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 1 & 2 \\ 12 & 21 \\ 28 & 52 \\ 14 & 25 \end{bmatrix} y_b + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 12 \\ 8 & 20 \\ 17 & 45 \\ 11 & 31 \end{bmatrix} y_d + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \bar{u}_c. \end{aligned}$$

下面, 我们应用第4章定理4.4.1的结果, 把矩阵对 (\bar{A}_{00}, B_{0c}) 分解成CSD形式。注意, (\bar{A}_{00}, B_{0c}) 就是例4.4.1所给出的矩阵对, 由式(4.4.8)可得子状态和输入的变换为

$$\hat{x}_0 = T_{0s} \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_c = T_{0i} u_c, \quad (5.3.116)$$

其中

$$T_{0s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_{0i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

变换后的子系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \end{bmatrix} + \tilde{L}_{ob} y_b + \tilde{L}_{od} y_d + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_c.$$

(\bar{A}_{00}, B_{0c}) 的可控性指数为 $\{r_1, r_2\} = \{1, 2\}$, 表明有两个子系统和 x_c 相关联。这些子系统的详情在最后一步给出。

SCB 步骤 10 结束

综合所有的结果, 我们得到下面的非奇异输入、输出和状态变换矩阵:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 7 & 0 & 14 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

在特殊坐标基 (SCB) 的结构下, 最终的变换系统 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (\Gamma_s^{-1} A \Gamma_s, \Gamma_s^{-1} B \Gamma_i, \Gamma_o^{-1} C \Gamma_s)$ 是

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc|cccc} -2 & 0 & 6 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 13 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 12 & 6 & 23 & 8 & 1 & 1 & 2 & 2 & 16 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & 3 & 15 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 14 & 5 & 1 \end{array} \right],$$

$$\tilde{B} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\tilde{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

为完整起见,可以把变换后的系统状态、输入和输出变量表示为

$$x = \Gamma_s \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{pmatrix}, \quad x_b = \begin{pmatrix} x_{b,1,1} \\ x_{b,1,2} \\ x_{b,2,1} \\ x_{b,2,2} \end{pmatrix}, \quad x_c = \begin{pmatrix} x_{c,1,1} \\ x_{c,2,1} \\ x_{c,2,2} \end{pmatrix}, \quad x_d = \begin{pmatrix} x_{d,1,1} \\ x_{d,2,1} \\ x_{d,2,2} \\ x_{d,2,3} \end{pmatrix},$$

$$u = \Gamma_i \begin{pmatrix} u_d \\ u_c \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} u_{d,1} \\ u_{d,2} \end{pmatrix}, \quad u_c = \begin{pmatrix} u_{c,1} \\ u_{c,2} \end{pmatrix}$$

和

$$y = \Gamma_o \begin{pmatrix} y_d \\ y_b \end{pmatrix}, \quad y_d = \begin{pmatrix} y_{d,1} \\ y_{d,2} \end{pmatrix}, \quad y_b = \begin{pmatrix} y_{b,1} \\ y_{b,2} \end{pmatrix},$$

和 x_a 相关联的动态方程为

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} y_b + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y_d, \quad (5.3.117)$$

和 x_b 相关的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{b,1,1} &= x_{b,1,2} + [1 \ 2]y_b + [2 \ 2]y_d, & y_{b,1} &= x_{b,1,1}, \\ \dot{x}_{b,1,2} &= [1 \ 2]y_b + [2 \ 2]y_d \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \dot{x}_{b,2,1} &= x_{b,2,2} - [1 \ 1]y_d, & y_{b,2} &= x_{b,2,1}, \\ \dot{x}_{b,2,2} &= -[1 \ 1]y_d, \end{aligned}$$

和 x_c 相关的动态方程为

$$\dot{x}_{c,1,1} = -[1 \ 2]y_b + [1 \ 1]y_d + u_{c,1}$$

和

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c,2,1} &= x_{c,2,2} + [10 \ 16]y_b + [4 \ 8]y_d, \\ \dot{x}_{c,2,2} &= [5 \ -1]x_a + [1 \ 1 \ 2]x_c - [1 \ 3]y_b + [5 \ 13]y_d + u_{c,2}, \end{aligned}$$

和 x_d 相关的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{d,1,1} &= [2 \ -2]x_a + [12 \ 6 \ 23 \ 8]x_b + [1 \ 1 \ 2]x_c \\ &\quad + [2 \ 16 \ 6 \ 2]x_d + u_{d,1}, \\ y_{d,1} &= x_{d,1,1} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \dot{x}_{d,2,1} &= x_{d,2,2} - [1 \ 0]y_d, & y_{d,2} &= x_{d,2,1}, \\ \dot{x}_{d,2,2} &= x_{d,2,3}, \\ \dot{x}_{d,2,3} &= [2 \ -2]x_a + [8 \ 3 \ 15 \ 14]x_b + [1 \ 1 \ 2]x_c \\ &\quad + [1 \ 14 \ 5 \ 1]x_d + u_{d,2}. \end{aligned}$$

从以上的结构分解可以清楚地看出,给定系统的 Morse 不变指数、可逆结构以及无限零点结构为

$$\begin{aligned} S_R^*(\Sigma) &= \mathbf{I}_2 = \{r_1, r_2\} = \{1, 2\}, \\ S_L^*(\Sigma) &= \mathbf{I}_3 = \{l_1, l_2\} = \{2, 2\}, \\ S_\infty^*(\Sigma) &= \mathbf{I}_4 = \{q_1, q_2\} = \{1, 3\}, \end{aligned}$$

I_1 和 A_{nn} 的特征值 $\lambda(A_{nn}) = \{-2, 1\}$ 有关。

5.4 非严格正则系统

在这一节中,我们要给出一般的非严格正则多变量系统的结构分解或特殊坐标基(SCB),也将对所有的这种分解下的结构特性给出严格的证明。具体来说,就是考虑下面的非严格正则系统 Σ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (5.4.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 是 Σ 的状态、输入和输出。不失一般性,假设 $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 都是满秩的。

非严格正则系统的结构分解或特殊坐标基(SCB)和 5.3 节中的严格正则系统的极其相似,但在许多应用中,并不需要把子系统 x_b 和 x_c 分解到积分器链,而需要把和给定系统不变零点动态相关的子系统 x_a 更进一步地分解到稳定、临界稳定(或临界不稳定)和不稳定零点动态所对应的子空间。我们把这些变化综合在下面的定理中。

定理 5.4.1(SCB) 对于由式(5.4.1)给定的系统 Σ ,存在非奇异的状态、输出和输入变换 Γ_s 、 Γ_o 和 Γ_i ,把给定的 Σ 分解到 6 个子空间。这些子空间完全描述了有限和无限零点结构以及系统的可逆结构。

新的状态、输入和输出空间由下面的一组方程描述:

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u}, \quad (5.4.2)$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{pmatrix}, \quad x_a = \begin{pmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \\ x_a^+ \end{pmatrix}, \quad x_d = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m_d} \end{pmatrix}, \quad (5.4.3)$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_d \\ y_b \end{pmatrix}, \quad y_d = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m_d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_c \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m_d} \end{pmatrix} \quad (5.4.4)$$

和

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + B_{0a}^- y_0 + L_{ad}^- y_d + L_{ab}^- y_b, \quad (5.4.5)$$

$$\dot{x}_a^0 = A_{aa}^0 x_a^0 + B_{0a}^0 y_0 + L_{ad}^0 y_d + L_{ab}^0 y_b, \quad (5.4.6)$$

$$\dot{x}_a^+ = A_{aa}^+ x_a^+ + B_{0a}^+ y_0 + L_{ad}^+ y_d + L_{ab}^+ y_b, \quad (5.4.7)$$

$$\dot{x}_b = A_{bb} x_b + B_{0b} y_0 + L_{bd} y_d, \quad y_b = C_b x_b, \quad (5.4.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_{cc}x_c + B_{0c}y_0 + L_{cb}y_b + L_{cd}y_d \\ &\quad + B_c(E_{ca}^-x_a^- + E_{ca}^0x_a^0 + E_{ca}^+x_a^+) + B_c u_c, \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

$$y_0 = C_{0a}^-x_a^- + C_{0a}^0x_a^0 + C_{0a}^+x_a^+ + C_{0b}x_b + C_{0c}x_c + C_{0d}x_d + u_0, \quad (5.4.10)$$

对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= B_{q_i}(u_i + E_{ia}^-x_a^- + E_{ia}^0x_a^0 + E_{ia}^+x_a^+ + E_{ib}x_b + E_{ic}x_c + E_{id}x_d) \\ &\quad + A_{q_i}x_i + L_{i0}y_0 + L_{id}y_d, \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

$$y_i = C_{q_i}x_i, \quad y_d = C_d x_d. \quad (5.4.12)$$

这里, 状态 $x_a^-, x_a^0, x_a^+, x_b, x_c$ 和 x_d 的维数分别是 $n_a^-, n_a^0, n_a^+, n_b, n_c$ 和 $n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i$, 而状态 x_i 的维数对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$ 是 q_i . 控制矢量 u_0, u_d 和 u_c 的维数分别是 m_0, m_d 和 $m_c = m - m_0 - m_d$, 而输出矢量 y_0, y_d 和 y_b 的维数分别是 $p_0 = m_0, p_d = m_d$ 和 $p_b = p - p_0 - p_d$. 矩阵 A_{q_i}, B_{q_i} 和 C_{q_i} 的形式是

$$A_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{q_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{q_i} = [1, 0, \dots, 0]. \quad (5.4.13)$$

假设 $x_i, i=1, 2, \dots, m_d$ 以 $q_i \leq q_{i+1}$ 的方式排列, 则矩阵 L_{id} 的形式是

$$L_{id} = [\ell_{i,1} \quad \ell_{i,2} \quad \dots \quad \ell_{i,i-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad (5.4.14)$$

其中, 最后一行完全为零, 而且有 $\lambda(A_{aa}^-) \subset \mathbb{C}^-, \lambda(A_{aa}^0) \subset \mathbb{C}^0$ 和 $\lambda(A_{aa}^+) \subset \mathbb{C}^+$. 同样, 我们有 (A_{cc}, B_c) 是可控的和 (A_{bb}, C_b) 是可观的。

证明 很容易证明, 存在非奇异的变换 U 和 V , 使得

$$UDV = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.15)$$

其中, m_0 是矩阵 D 的秩. 实际上, 可选 U 为正交矩阵. 不失一般性, 在本节里, 我们假设矩阵 D 具有方程(5.4.15)右边的形式. 式(5.4.1)所描述的系统 Σ 可以重新写为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + [B_0 & B_1] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (5.4.16)$$

其中, 矩阵 B_0, B_1, C_0 和 C_1 具有适当的维数, 所以有

$$\dot{x} = Ax + B_0 u_0 + B_1 u_1 \quad (5.4.17)$$

和

$$y_0 = C_0 x + u_0, \quad y_1 = C_1 x. \quad (5.4.18)$$

由此可得

$$\dot{x} = Ax + B_0(y_0 - C_0 x) + B_1 u_1 = (A - B_0 C_0)x + B_1 u_1 + B_0 y_0. \quad (5.4.19)$$

根据定理 5.3.1 的结果,可以得到非奇异的状态、输入和输出变换 Γ_s 、 $\tilde{\Gamma}_i$ 和 $\tilde{\Gamma}_o$,对严格正则系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x \end{cases} \quad (5.4.20)$$

实现结构分解,其中 $A_1 := A - B_0 C_0$ 。根据第4章定理 4.2.1 的结果,可把 x_s 进一步分解到 x_a^- 、 x_a^0 和 x_a^+ ,由此可得定理 5.4.1 的结果。■

为了后面的应用,我们把 Σ 的结构分解重写成更加简明的形式:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \Gamma_s^{-1} A \Gamma_s = A_s + B_0 C_0 \\ &= \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & 0 & L_{ad}^- C_d \\ 0 & A_{aa}^0 & 0 & L_{ab}^0 C_b & 0 & L_{ad}^0 C_d \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & 0 & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd} C_d \\ B_c E_{ca}^- & B_c E_{ca}^0 & B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d E_{da}^- & B_d E_{da}^0 & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0a}^0 \\ B_{0a}^+ \\ B_{0b} \\ B_{0c} \\ B_{0d} \end{bmatrix} [C_{0a}^- \quad C_{0a}^0 \quad C_{0a}^+ \quad C_{0b} \quad C_{0c} \quad C_{0d}], \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

$$\tilde{B} = \Gamma_s^{-1} B \Gamma_i = [B_0 \quad B_s] = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^0 & 0 & 0 \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.22)$$

$$\tilde{C} = \Gamma_o^{-1} C \Gamma_s = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^0 & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.23)$$

$$\tilde{D} = \Gamma_o^{-1} D \Gamma_i = D_s = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.24)$$

其中

$$A_{dd} = A_{dd}^* + B_d E_{dd} + L_{dd} C_d \quad (5.4.25)$$

对某些具有适当维数的定常矩阵 L_{dd} 和 E_{dd} 成立, 还有

$$A_{dd}^* = \text{blkdiag}\{A_{q_1}, A_{q_2}, \dots, A_{q_{m_d}}\}, \quad (5.4.26)$$

$$B_d = \text{blkdiag}\{B_{q_1}, B_{q_2}, \dots, B_{q_{m_d}}\}, \quad C_d = \text{blkdiag}\{C_{q_1}, C_{q_2}, \dots, C_{q_{m_d}}\}, \quad (5.4.27)$$

其中, $(A_{q_i}, B_{q_i}, C_{q_i})$ 如式(5.4.13)所定义。

我们现在可以给出上面分解的重要性质。为清晰起见, 这些性质的证明都在下一节中给出。

性质 5.4.1 给定系统 Σ 是可观的(可检测), 当且仅当矩阵对 $(A_{\text{obs}}, C_{\text{obs}})$ 是可观(可检测)的, 其中

$$A_{\text{obs}} := \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ B_c E_{ca} & A_{cc} \end{bmatrix}, \quad C_{\text{obs}} := \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0c} \\ E_{da} & E_{dc} \end{bmatrix}, \quad (5.4.28)$$

$$A_{aa} := \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 \\ 0 & A_{aa}^0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ \end{bmatrix}, \quad C_{0a} := [C_{0a}^- \quad C_{0a}^0 \quad C_{0a}^+], \quad (5.4.29)$$

$$E_{da} := [E_{da}^- \quad E_{da}^0 \quad E_{da}^+], \quad E_{ca} := [E_{ca}^- \quad E_{ca}^0 \quad E_{ca}^+]. \quad (5.4.30)$$

同时, 定义

$$A_{\text{con}} := \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab} C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad B_{\text{con}} := \begin{bmatrix} B_{0a} & L_{ad} \\ B_{0b} & L_{bd} \end{bmatrix}, \quad (5.4.31)$$

$$B_{0a} := \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0a}^0 \\ B_{0a}^+ \end{bmatrix}, \quad L_{ab} := \begin{bmatrix} L_{ab}^- \\ L_{ab}^0 \\ L_{ab}^+ \end{bmatrix}, \quad L_{ad} := \begin{bmatrix} L_{ad}^- \\ L_{ad}^0 \\ L_{ad}^+ \end{bmatrix}. \quad (5.4.32)$$

类似地, Σ 是可控(可镇定)的, 当且仅当矩阵对 $(A_{\text{con}}, B_{\text{con}})$ 是可控(可镇定)的。

性质 5.4.2 结构分解也显式地给出了 Σ 的不变零点和常态秩, 具体有以下性质:

1. $H(s)$ 的常态秩等于 $m_0 + m_d$ 。
2. Σ 的不变零点是 A_{aa} 的特征值, 是 A_{aa}^- 、 A_{aa}^0 和 A_{aa}^+ 特征值的集合。

显然, Σ 是最小相位, 当且仅当 $n_a^0 + n_a^+ = 0$; 否则就是非最小相位。

为了显示各种多重和不变零点, 令 X_a 是一个非奇异变换矩阵, 可以把 A_{aa} 变换到式(2.3.39)所示的 Jordan 规范形, 即

$$X_a^{-1} A_{aa} X_a = J = \text{blkdiag}\{J_1, J_2, \dots, J_k\}, \quad (5.4.33)$$

其中 $J_i, i=1, 2, \dots, k$, 是一些 $n_i \times n_i$ 的 Jordan 块,

$$J_i = \text{diag}\{\alpha_i, \alpha_i, \dots, \alpha_i\} + \begin{bmatrix} 0 & I_{n_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.34)$$

对任何给定的 $\alpha \in \lambda(A_{aa})$, 设 A_{aa} 有 τ_α 个和 α 相关联的 Jordan 块。令 $n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_\alpha}$ 是每个 Jordan 块的维数, 则我们说 α 是 Σ 的一个不变零点, 具有多重结构 $S_\alpha^*(\Sigma)$ (参见[115]),

$$S_\alpha^*(\Sigma) = \{n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_\alpha}\}. \quad (5.4.35)$$

α 的几何重数就是 τ_α , α 的代数重数是 $\sum_{i=1}^{\tau_\alpha} n_{\alpha,i}$ 。

下面的特性刻画了 Σ 的阻塞零点(blocking zero)的性质(参见 Chen 等^[28])。

性质 5.4.3 假设由式(5.4.1)给定的系统 Σ 是可控和可观的,则一个标量复数 α 是 Σ 的阻塞零点,即 $H(\alpha)=0$,当且仅当 α 是 Σ 的不变零点,具有几何重数 $\tau_\alpha = m_0 + m_d$,也就是 $H(s)$ 的常态秩。

结构分解也可以揭示第3章所定义的 Σ 的无限零点结构。下面的性质指明了这一点。

性质 5.4.4 Σ 具有 $m_0 = \text{rank}(D)$ 个零阶的无限零点。 Σ 的无限零点结构(阶次大于 0)为

$$S_\infty^*(\Sigma) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}, \quad (5.4.36)$$

即每个 q_i 相应于一个 q_i 阶的无限零点。特别地,对严格正则 SISO 系统 Σ ,我们有 $S_\infty^*(\Sigma) = \{q_1\}$,其中 q_1 是 Σ 的相对阶。如果 $m_0 = 0$ 和 $q_1 = q_2 = \dots = q_{m_d}$,或 $m_0 \neq 0$ 和 $S_\infty^*(\Sigma) = \emptyset$,则给定系统 Σ 具有一致秩(uniform rank)。

特殊坐标基(SCB)以很简单的方式揭示了给定系统 Σ 的可逆结构。

性质 5.4.5 给定系统 Σ 是右可逆的,当且仅当 x_b (因此 y_b)不存在;是左可逆的,当且仅当 x_c (因此 u_c)不存在;是可逆的,当且仅当 x_b 和 x_c 都不存在。而且, Σ 是退化的(degenerate),当且仅当 x_b 和 x_c 都存在。

结构分解把 Σ 的状态空间分解到几个不同的部分。实际上,状态空间可以被分解为

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_b \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d. \quad (5.4.37)$$

这里, \mathcal{X}_a^- 和稳定的不变零点相关联,即 A_{aa}^- 的特征值是 Σ 的稳定的不变零点。类似地, \mathcal{X}_a^0 和 \mathcal{X}_a^+ 分别与 Σ 的位于临界稳定和不稳定区域的不变零点相关联。另一方面, \mathcal{X}_b 和右可逆结构相关,即当且仅当 $\mathcal{X}_b = \{0\}$ 时,系统是右可逆的。而 \mathcal{X}_c 和左可逆相关,即当且仅当 $\mathcal{X}_c = \{0\}$ 时,系统是左可逆的。最后, \mathcal{X}_d 和 Σ 在无穷远处的零点相关。

由结构分解所产生的子系统和各种不变几何子空间之间存在相互的联系。下面的性质证明了这些联系。

性质 5.4.6 定义 3.7.2 和定义 3.7.4 所定义的几何子空间是:

1. $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^-(\Sigma)$
2. $\mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^+(\Sigma)$
3. $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c$ 张成 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$
4. $\mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}(\Sigma)$
5. $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^+(\Sigma)$
6. $\mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{S}^*(\Sigma)$
7. \mathcal{X}_c 张成 $\mathcal{R}^*(\Sigma)$
8. $\mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d$ 张成 $\mathcal{N}^*(\Sigma)$

性质 5.4.7 定义 3.7.5 所定义的几何子空间 $\mathcal{S}_s(\Sigma)$ 和 $\mathcal{V}_s(\Sigma)$ 可以计算为

$$S_\lambda(\Sigma) = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} \lambda I - A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{ba} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} \right\}, \quad (5.4.38)$$

其中

$$\text{im}\{Y_{ba}\} = \ker[C_b(A_{bb} + K_b C_b - \lambda I)^{-1}], \quad (5.4.39)$$

其中, K_b 是任何具有适当维数的矩阵, 满足 λ 不是 $A_{bb} + K_b C_b$ 的特征值。只要 (A_{bb}, C_b) 是可观的, 这样的 K_b 就总是存在。

$$V_\lambda(\Sigma) = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} X_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & X_{ca} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (5.4.40)$$

其中, 矩阵 X_{aa} 的列形成了子空间

$$\left\{ \zeta_a \in \mathbb{C}^{n_a} \mid (\lambda I - A_{aa})\zeta_a = 0 \right\} \quad (5.4.41)$$

的一个基,

$$X_{ca} := (A_{cc} + B_c F_c - \lambda I)^{-1} B_c, \quad (5.4.42)$$

其中, F_c 是任何具有适当维数的矩阵, 满足 λ 不是 $A_{cc} + B_c F_c$ 的特征值。同样, 只要 (A_{cc}, B_c) 是可控的, 就存在这样的 F_c 。显然, 如果 $\lambda \notin \lambda(A_{aa})$, 就有 $V_\lambda(\Sigma) \subseteq V^*(\Sigma)$ 和 $S_\lambda(\Sigma) \supseteq S^*(\Sigma)$ 。

我们用下面的例子来说明以上的结构性质。

例 5.4.1 再次考虑例 5.3.1 的系统 Σ , 即考虑一个矩阵四元组 (A, B, C, D) , 其中的 (A, B, C) 和例 5.3.1 的相同, $D=0$ 。在例 5.3.1 中已经得到了把给定系统变换到特殊坐标基(SCB)的所需变换。为了计算各种几何子空间, 我们需要利用定理 4.2.1 的结果来进一步分解和 x_a 相关的子系统, 即式(5.3.117)。特别地, 有下面对 x_a 的子变换,

$$x_a = \begin{bmatrix} 0.9487 & 0 \\ -0.3162 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^+ \end{bmatrix},$$

将把 x_a 的动态变换到对角形式, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a^- \\ \dot{x}_a^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.3246 & 11.5950 \\ 0 & -1.3333 \end{bmatrix} y_b + \begin{bmatrix} 1.0541 & 1.0541 \\ 1.3333 & 1.3333 \end{bmatrix} y_d.$$

很容易验证出, Σ 既不可控也不可观, 它在 -0.618 和 1.618 两处分别有两个不可控模态, 在 0 处有一个不可观模态。给定系统 Σ 具有常态秩 2, 在 -2 有一个稳定的不变零点, 在 1 有一个不稳定的不变零点。它具有无限零点结构

$$S_\lambda^*(\Sigma) = \{1, 3\}.$$

因为 x_b 和 x_c 都出现在结构分解中, 系统既不是右可逆, 也不是左可逆, 即是一个退化系统。 Σ 的各种几何子空间都通过结构分解直接得到, 它们是

$$\mathcal{V}^-(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{V}^+(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{V}^*(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{S}^-(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{cccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 11 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{S}^+(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{cccccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & -1 & 11 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{S}^*(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{R}^*(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{N}^*(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 11 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{V}_\lambda(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad \lambda = -2,$$

$$S_\lambda(\Sigma) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 15 & 14 & 1 & 1 & 2 & -1 & 11 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 9 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \lambda = 1.$$

我们注意到, $\lambda = -2$ 和 $\lambda = 1$ 分别对应了 Σ 的稳定和不稳定的不变零点。

5.5 结构化分解性质的证明

下面,我们对 5.4 节所给出的一般非严格正则系统特殊坐标基(SCB)的所有性质进行严格的证明。为了简单起见,但不失一般性,后面都假设给定系统 Σ 已经被变换成定理 5.4.1 的形式,或者是式(5.4.21)~式(5.4.24)的紧凑形式,即

$$A = \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b & 0 & L_{ad}C_d \\ 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd}C_d \\ B_c E_{ca} & L_{cb}C_b & A_{cc} & L_{cd}C_d \\ B_d E_{da} & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd}^* + B_d E_{dd} + L_{dd}C_d \end{bmatrix} + B_0 C_0,$$

$$B = [B_0 \quad B_1] = \begin{bmatrix} B_{0a} & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

进一步注意到 A_{dd}^* 、 B_d 和 C_d 的形式为

$$A_{dd}^* = \text{blkdiag}\{A_{q_1}, A_{q_2}, \dots, A_{q_{m_d}}\}$$

和

$$B_d = \text{blkdiag}\{B_{q_1}, B_{q_2}, \dots, B_{q_{m_d}}\}, \quad C_d = \text{blkdiag}\{C_{q_1}, C_{q_2}, \dots, C_{q_{m_d}}\},$$

其中 A_{q_i}, B_{q_i} 和 $C_{q_i}, i=1, 2, \dots, m_d$, 如式(5.4.13)所定义。

性质 5.4.1 的证明 定义一个状态反馈增益矩阵 F 为

$$F = - \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ E_{da} & E_{db} & E_{dc} & E_{dd} \\ E_{ca} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5.1)$$

则有

$$A + BF = \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b & 0 & L_{ad}C_d \\ 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd}C_d \\ 0 & L_{cb}C_b & A_{cc} & L_{cd}C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd}^* + L_{dd}C_d \end{bmatrix}.$$

注意到 (A_{cc}, B_c) 是可控的, 则对任何 $\lambda \in \mathbb{C}$, 都有

$$\begin{aligned} \text{rank}[A + BF - \lambda I \quad B] &= \text{rank} \begin{bmatrix} A_{aa} - \lambda I & L_{ab}C_b & 0 & L_{ad}C_d & B_{0a} & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb} - \lambda I & 0 & L_{bd}C_d & B_{0b} & 0 & 0 \\ 0 & L_{cb}C_b & A_{cc} - \lambda I & L_{cd}C_d & B_{0c} & 0 & B_c \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd}^* + L_{dd}C_d - \lambda I & B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} A_{\text{con}} - \lambda I & 0 & B_{\text{con}1}C_d & B_{\text{con}0} & 0 & 0 \\ 0 & A_{cc} - \lambda I & 0 & 0 & 0 & B_c \\ 0 & 0 & A_{dd}^* + L_{dd}C_d - \lambda I & B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$A_{\text{con}} = \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad B_{\text{con}} = [B_{\text{con}0} \quad B_{\text{con}1}] = \begin{bmatrix} B_{0a} & L_{ad} \\ B_{0b} & L_{bd} \end{bmatrix}.$$

同时注意到 (A_{dd}^*, B_d, C_d) 的特殊结构, 就可以直接得到, 当且仅当 $[A_{\text{con}} - \lambda I \quad B_{\text{con}}]$ 是最大秩时, $[A + BF - \lambda I \quad B]$ 是最大秩。根据定理 3.8.1, 当且仅当 $(A_{\text{con}}, B_{\text{con}})$ 是可控(可镇定)时, (A, B) 是可控(可镇定的)。

类似地, 可以证明, 当且仅当 $(A_{\text{obs}}, C_{\text{obs}})$ 是可观(可检测)时, (A, C) 是可观(可检测)的。 ■

性质 5.4.2 的证明 定义反馈增益矩阵 F 如式(5.5.1)所示, 输出馈入增益矩阵 K 为

$$K = - \begin{bmatrix} B_{0a} & L_{ad} & L_{ab} \\ B_{0b} & L_{bd} & 0 \\ B_{0c} & L_{cd} & L_{cb} \\ B_{0d} & L_{dd} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5.2)$$

可得

$$\check{A} = A + BF + KC + KDF = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd}^* \end{bmatrix},$$

$$\check{B} = B + KD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_c \\ 0 & B_d & 0 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} = C + DF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\check{D} = D = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\check{\Sigma}$ 为矩阵四元组 $(\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D})$ 所表征的系统。很容易验证, $\check{\Sigma}$ 的传递函数为

$$\check{H}(s) = \check{C}(sI - \check{A})^{-1} \check{B} + \check{D} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & C_d(sI - A_{dd}^*)^{-1} B_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.3)$$

更进一步地,可以证明

$$C_d(sI - A_{dd}^*)^{-1} B_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{q_1}} & & & \\ & \frac{1}{s^{q_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s^{q_{m_d}}} \end{bmatrix}. \quad (5.5.4)$$

由定理 3.8.1 和定理 3.8.2 可得

$$\text{normrank}\{H(s)\} = \text{normrank}\{\check{H}(s)\} = m_0 + m_d.$$

接下来,由定理 3.8.1 和定理 3.8.2 可知, Σ 和 $\check{\Sigma}$ 的不变零点是相同的。根据线性系统不变零点的定义,如果

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \check{A} - \alpha I & \check{B} \\ \check{C} & \check{D} \end{bmatrix} < n + \text{normrank}\{\check{H}(s)\} = n + m_0 + m_d,$$

则复标量 α 是 $\check{\Sigma}$ 的一个不变零点。同时,注意到 (A_{dd}^*, B_d, C_d) 的特殊结构和 (A_{bb}, C_b) 是可观的, (A_{cc}, B_c) 是可控的事实,我们有

$$\begin{aligned} \text{rank}\{P_{\check{\Sigma}}(\alpha)\} &= \text{rank} \begin{bmatrix} \check{A} - \alpha I & \check{B} \\ \check{C} & \check{D} \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} A_{aa} - \alpha I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb} - \alpha I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{cc} - \alpha I & 0 & 0 & 0 & B_c \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd}^* - \alpha I & 0 & B_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= n_b + n_c + n_d + m_0 + m_d + \text{rank}\{A_{aa} - \alpha I\}. \end{aligned}$$

显然,当且仅当 $\alpha \in \lambda(A_{aa})$ 时, $P_{\check{\Sigma}}(\alpha)$ 的秩低于 $n + m_0 + m_d$ 。因此, $\check{\Sigma}$ 的不变零点,或等价地, Σ 的不变零点由 A_{aa} 的特征值所决定,就是 $\lambda(A_{aa}^-)$, $\lambda(A_{aa}^0)$ 和 $\lambda(A_{aa}^+)$ 的集合。由此完成了性质 5.4.2 的证明。 ■

性质 5.4.3 的证明 由定义, α 是 Σ 的一个阻塞零点,意味着 $P(\alpha) = C(\alpha I_n - A)^{-1}B + D = 0$ 。我们定义

$$[\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_m] = I_m$$

和

$$z_i = (\alpha I_n - A)^{-1}B\omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

不难发现, (z_i', ω_i') , $i = 1, 2, \dots, m$, 线性独立并满足

$$\begin{bmatrix} \alpha I_n - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = 0.$$

所以, α 是 Σ 的几何重数为 τ_α 的不变零点,并满足条件 $\tau_\alpha \geq m_0 + m_d$ 。但是如果 $\tau_\alpha > m_0 + m_d$, 就很容易证明, Σ 既不可控也不可观,和 Σ 是可控和可观的假设相矛盾。因此, $\tau_\alpha = m_0 + m_d$ 。

为证明充分性,我们考虑下面的情况。如果 $\tau_\alpha = m_0 + m_d$, 则显而易见存在 z_i 和 ω_i , $i = 1, 2, \dots, m - m_0 - m_d + \tau_\alpha = m$, 使得

$$\begin{bmatrix} \alpha I_n - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = 0,$$

其中 z_i , $i = 1, 2, \dots, m$ 是线性独立的。我们在后面也将证明, ω_i , $i = 1, 2, \dots, m$ 是线性独立的。首先,假设 ω_i , $i = 1, 2, \dots, m$, 是线性相关的,则存在常数 c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, 使得

$$z_0 = \sum_{i=1}^m c_i z_i \neq 0 \quad \text{和} \quad \omega_0 = \sum_{i=1}^m c_i \omega_i = 0.$$

这表明

$$(\alpha I_n - A)z_0 = B\omega_0 = 0 \quad \text{和} \quad Cz_0 + D\omega_0 = Cz_0 = 0.$$

因此 α 是 Σ 的输出解耦零点, 与 Σ 是可控可观的假设相矛盾。这就证明了 $\omega_i, i=1, 2, \dots, m$ 是线性独立的。下面考虑

$$P(\alpha)[\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_m] = [C(\alpha I_n - A)^{-1}B + D][\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_m] = 0,$$

这意味着 $P(\alpha) = 0$, 所以 α 是 Σ 的阻塞零点。 ■

性质 5.4.4 的证明 由定理 3.8.1 和定理 3.8.2 可得, Σ 和 $\check{\Sigma}$ 的无限零点是相同的。根据式(5.5.3)和式(5.5.4), 易见 $\check{\Sigma}$ 的, 或者等价于 Σ 的, 阶次高于 0 的不变零点为

$$S_{\infty}^*(\Sigma) = S_{\infty}^*(\check{\Sigma}) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}.$$

而且 $\check{\Sigma}$ 或 Σ 有 m_0 个零阶无限零点。 ■

性质 5.4.5 的证明 同样是根据定理 3.8.1 和定理 3.8.2, 当且仅当 $\check{\Sigma}$ 或 $\check{H}(s)$ 是(左或右, 或都不是)可逆时, Σ 或 $H(s)$ 是(左或右, 或都不是)可逆的。性质 5.4.5 的结果可以从式(5.5.3)中的传递函数中看出。 ■

性质 5.4.6 的证明 我们只对 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 的几何子空间的特性进行证明, 即

$$\mathcal{V}^*(\Sigma) = \chi_a \oplus \chi_c = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} I_{n_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

因为给定系统 Σ 已假设为结构分解的形式, 所以 $\Gamma_s = I_n$ 。根据定理 3.8.2, \mathcal{V}^* 在任何输出馈入律下是不变的。我们选择如同式(5.5.2)所示的输出馈入增益矩阵 K , 则可得

$$\hat{A} = A + KC = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb} & 0 & 0 \\ B_c E_{ca} & 0 & A_{cc} & 0 \\ B_d E_{da} & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd}^* + B_d E_{dd} \end{bmatrix}$$

和

$$\hat{B} = B + KD = \check{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_c \\ 0 & B_d & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\hat{\Sigma}$ 是由 (\hat{A}, \hat{B}, C, D) 所表示的系统, 则只要证明

$$\mathcal{V}^*(\hat{\Sigma}) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} I_{n_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

就可以充分证明 $\mathcal{V}^*(\Sigma)$ 的性质。

首先如式(5.5.1)那样选择一个矩阵 F , 则可得

$$\hat{A} + \hat{B}F = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd}^* \end{bmatrix},$$

$$C + DF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

很容易发现, 对任何

$$\zeta \in \chi_a \oplus \chi_c = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} I_{n_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

我们有

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ 0 \\ \zeta_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$(\hat{A} + \hat{B}F)\zeta = \begin{bmatrix} A_{aa}\zeta_a \\ 0 \\ A_{cc}\zeta_c \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} I_{n_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \chi_a \oplus \chi_c,$$

以及

$$(C + DF)\zeta = 0.$$

显然, $\chi_a \oplus \chi_c$ 是 \mathbb{R}^n 中的 $(\hat{A} + \hat{B}F)$ -不变子空间, 并包含在 $\ker(C + DF)$ 中。根据 \mathcal{V}^* 的定义, 我们有

$$\chi_a \oplus \chi_c \subseteq \mathcal{V}^*(\hat{\Sigma}). \quad (5.5.5)$$

反过来,对任何 $\zeta \in \mathcal{V}^*(\hat{\Sigma})$, 根据定义 3.7.2, 存在一个增益矩阵 $\hat{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 使得

$$(\hat{A} + \hat{B}\hat{F})\zeta \in \mathcal{V}^*(\hat{\Sigma}) \quad (5.5.6)$$

和

$$(C + D\hat{F})\zeta = 0. \quad (5.5.7)$$

式(5.5.6)和式(5.5.7)意味着对任何 $\zeta \in \mathcal{V}^*(\hat{\Sigma})$,

$$(C + D\hat{F})(\hat{A} + \hat{B}\hat{F})^k \zeta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.5.8)$$

由此, 根据式(5.5.5)和式(5.5.8)可得

$$(C + D\hat{F})(\hat{A} + \hat{B}\hat{F})^k \begin{bmatrix} I_{n_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.5.9)$$

接下来, 对 \hat{F} 进行如下划分:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} F_{a0} - C_{0a} & F_{b0} - C_{0b} & F_{c0} - C_{0c} & F_{d0} - C_{0d} \\ F_{ad} - E_{da} & F_{bd} - E_{db} & F_{cd} - E_{dc} & F_{dd} - E_{dd} \\ F_{ac} - E_{ca} & F_{bc} & F_{cc} & F_{dc} \end{bmatrix}.$$

我们有

$$C + D\hat{F} = \begin{bmatrix} F_{a0} & F_{b0} & F_{c0} & F_{d0} \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb} & 0 & 0 \\ B_c F_{ac} & B_c F_{bc} & A_{cc} + B_c F_{cc} & B_c F_{dc} \\ B_d F_{ad} & B_d F_{bd} & B_d F_{cd} & A_{dd}^{**} \end{bmatrix},$$

其中, $A_{dd}^{**} = A_{dd}^* + B_d F_{dd}$ 。然后对 $k=0$ 应用式(5.5.9), 我们有

$$(C + D\hat{F}) \begin{bmatrix} I_{n_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

由此可推出

$$F_{a0} = 0, \quad F_{c0} = 0$$

和

$$C + D\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & \star & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5.10)$$

其中,符号 \star 表示一些无关紧要的矩阵。对 $k=1$ 应用式(5.5.9),并考虑到式(5.5.10),可得

$$C_d B_d F_{ad} = 0, \quad C_d B_d F_{cd} = 0$$

和

$$(C + D\hat{F})(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}) = \begin{bmatrix} 0 & \star & 0 & \star \\ 0 & C_d B_d F_{bd} & 0 & C_d A_{dd}^{\star\star} \\ 0 & C_b A_{bb} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.11)$$

总的说来,我们可以证明对任何正整数 k ,

$$C_d (A_{dd}^{\star\star})^{k-1} B_d F_{ad} = 0, \quad C_d (A_{dd}^{\star\star})^{k-1} B_d F_{cd} = 0 \quad (5.5.12)$$

和

$$(C + D\hat{F})(\hat{A} + \hat{B}\hat{F})^k = \begin{bmatrix} 0 & \star & 0 & \star \\ 0 & \star & 0 & C_d (A_{dd}^{\star\star})^k \\ 0 & C_b (A_{bb})^k & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.13)$$

因为有 $(A_{dd}^{\star\star}, B_d, C_d)$ 是可控、可观、可逆和没有不变零点的事实,我们可以很容易地得到另一个结果: $F_{ad}=0$ 和 $F_{cd}=0$ 。现在对任何

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ \zeta_b \\ \zeta_c \\ \zeta_d \end{bmatrix} \in \mathcal{V}^*(\hat{\Sigma}),$$

从式(5.5.8)和式(5.5.13)可得

$$C_b (A_{bb})^k \zeta_b = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

因为 (A_{bb}, C_b) 是可观的,这表明 $\zeta_b=0$,并且

$$C_d (A_{dd}^{\star\star})^k \zeta_d + \star \cdot \zeta_b = C_d (A_{dd}^{\star\star})^k \zeta_d = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

因为 $(A_{dd}^{\star\star}, C_d)$ 也是可观的,这表明 $\zeta_d=0$ 。因此,

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ 0 \\ \zeta_c \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \chi_a \oplus \chi_c$$

和

$$\mathcal{V}^*(\hat{\Sigma}) \subseteq \chi_a \oplus \chi_c. \quad (5.5.14)$$

显然,从式(5.5.5)和式(5.5.14)可导出结果。

类似地,我们可以采用和上面相同的步骤来证明性质 5.4.6 中其他子空间的性质。 ■

性质 5.4.7 的证明 我们来证明 $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 的性质。根据定理 3.8.1 和定理 3.8.2, \mathcal{V}_λ 在任何状态反馈和输出馈入下都是不变的,所以,只要证明

$$\mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma}) = \text{im} \left\{ \begin{bmatrix} X_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & X_{ca} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

就足以证明 $\mathcal{V}_\lambda(\Sigma)$ 的特性,其中, $\tilde{\Sigma}$ 如性质 5.4.2 的证明中所定义, X_{aa} 是一个矩阵,它的列形成了子空间

$$\{\zeta_a \in \mathbb{C}^{n_a} \mid (\lambda I - A_{aa})\zeta_a = 0\}$$

的一个基,并且

$$X_{ca} = (A_{cc} + B_c F_c - \lambda I)^{-1} B_c,$$

其中, F_c 是具有适当维数的矩阵,使得 $A_{cc} + B_c F_c - \lambda I$ 是可逆的。

对任何 $\zeta \in \mathcal{V}_\lambda(\tilde{\Sigma})$, 根据定义 3.7.5, 存在一个矢量 $\omega \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} - \lambda I & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix} = 0,$$

或等价地,

$$\begin{bmatrix} A_{aa} - \lambda I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb} - \lambda I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{cc} - \lambda I & 0 & 0 & 0 & B_c \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} - \lambda I & 0 & B_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_a \\ \zeta_b \\ \zeta_c \\ \zeta_d \\ \omega_0 \\ \omega_d \\ \omega_c \end{pmatrix} = 0. \quad (5.5.15)$$

因此有

$$(A_{aa} - \lambda I)\zeta_a = 0, \quad (5.5.16)$$

这意味着 $\zeta_a \in \text{im}\{X_{aa}\}$,

$$\begin{bmatrix} A_{bb} - \lambda I \\ C_b \end{bmatrix} \zeta_b = 0, \quad (5.5.17)$$

因为 (A_{bb}, C_b) 是可观的,所以 $\zeta_b = 0$, 并且

$$\begin{bmatrix} A_{dd} - \lambda I & B_d \\ C_d & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_d \\ \omega_d \end{pmatrix} = 0,$$

因为 (A_{dd}, B_d, C_d) 是方的、可逆和没有不变零点的, 所以 $\zeta_d = 0$ 和 $\omega_d = 0$ 。我们也有

$$(A_{cc} - \lambda I)\zeta_c + B_c\omega_c = 0,$$

这表明

$$(A_{cc} + B_cF_c - \lambda I)\zeta_c + B_c(\omega_c - F_c\zeta_c) = 0,$$

或者

$$\zeta_c = (A_{cc} + B_cF_c - \lambda I)^{-1}B_c(F_c\zeta_c - \omega_c) = X_{ca}(F_c\zeta_c - \omega_c).$$

因此, $\zeta_c \in \text{im}\{X_{ca}\}$ 。显然,

$$\zeta \in \text{im}\left\{\begin{bmatrix} X_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & X_{ca} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow \nu_\lambda(\check{\Sigma}) \subseteq \text{im}\left\{\begin{bmatrix} X_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & X_{ca} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}. \quad (5.5.18)$$

反过来, 对任何

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ \zeta_b \\ \zeta_c \\ \zeta_d \end{bmatrix} \in \text{im}\left\{\begin{bmatrix} X_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & X_{ca} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\},$$

我们有 $\zeta_b = 0, \zeta_d = 0, \zeta_a \in \text{im}\{X_{aa}\}$, 这表明 $(\lambda I - A_{aa})\zeta_a = 0$, 并且 $\zeta_c \in \text{im}\{X_{ca}\}$, 等价于存在一个矢量 $\bar{\omega}_c$, 使得

$$\zeta_c = X_{ca}\bar{\omega}_c = (A_{cc} + B_cF_c - \lambda I)^{-1}B_c\bar{\omega}_c.$$

所以, 我们有

$$(A_{cc} + B_cF_c - \lambda I)\zeta_c = B_c\bar{\omega}_c \Rightarrow (A_{cc} - \lambda I)\zeta_c + B_c(F_c\zeta_c - \bar{\omega}_c) = 0.$$

令

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_d \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_c\zeta_c - \bar{\omega}_c \end{bmatrix},$$

根据式(5.5.15), 很容易验证

$$\begin{bmatrix} \check{A} - \lambda I & \check{B} \\ \check{C} & \check{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix} = 0.$$

根据定义 3.7.5, 可得

$$\zeta \in \nu_\lambda(\check{\Sigma}) \Rightarrow \text{im}\left\{\begin{bmatrix} X_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & X_{ca} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \subseteq \nu_\lambda(\check{\Sigma}). \quad (5.5.19)$$

最后, 由式(5.5.18)和式(5.5.19)就可以得到结果。

$S_\Sigma(\Sigma)$ 的证明可采用相同的方法。 ■

5.6 系统矩阵的 Kronecker 形和 Smith 形

在这一节中,我们将要证明结构分解或特殊坐标基(SCB)是如何被用来有效地计算由式(5.4.1)所表示系统 Σ 的 Kronecker 规范形(见第3章3.6节)和系统(Rosenbrock)矩阵的 Smith 形。首先,我们知道, Σ 的系统矩阵 $P_\Sigma(s)$ 的 Kronecker 规范形在非奇异状态、输入和输出变换 Γ_s, Γ_i 和 Γ_o 下是不变的,在任何状态反馈和输出馈入下也是不变的。这个事实可以从以下的运算中看出,

$$\begin{aligned} UP_\Sigma(s)V &= \begin{bmatrix} \Gamma_s^{-1} & -\tilde{K}\Gamma_o^{-1} \\ 0 & \Gamma_o^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_s & 0 \\ \Gamma_i \tilde{F} & \Gamma_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} + \tilde{K}\tilde{C} + \tilde{K}\tilde{D}\tilde{F}) & -(\tilde{B} + \tilde{K}\tilde{D}) \\ \tilde{C} + \tilde{D}\tilde{F} & \tilde{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI - A_{KF} & -B_K \\ C_F & \tilde{D} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

其中 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 是变换后的系统,它的表示为

$$\tilde{A} = \Gamma_s^{-1}A\Gamma_s, \quad \tilde{B} = \Gamma_s^{-1}B\Gamma_i, \quad \tilde{C} = \Gamma_o^{-1}C\Gamma_s, \quad \tilde{D} = \Gamma_o^{-1}D\Gamma_i, \quad (5.6.2)$$

在变换后系统的坐标下, \tilde{F} 和 \tilde{K} 分别是状态反馈和输出馈入增益矩阵。最后,由矩阵四元组 $(A_{KF}, B_K, C_F, \tilde{D})$ 所表示的系统 Σ_{KF} , 是在状态反馈和输出馈入律下变换后的系统。

我们现在可以证明, $P_\Sigma(s)$ 的 Kronecker 规范形能够完全通过 Σ 的特殊坐标基(SCB)得到。下面就是为规范形产生所需要的非奇异变换 U 和 V 的逐步构造算法。

KCF 步骤 1 计算 Σ 的特殊坐标基(SCB)

应用 5.3 节和 5.4 节的结果来找到非奇异的状态、输入和输出变换 $\Gamma_s \in \mathbb{C}^{n \times n}, \Gamma_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $\Gamma_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 使得给定系统 Σ 可以变换到定理 5.4.1 的特殊坐标基(SCB)下,或者是下面的标准形式:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b & 0 & L_{ad}C_d \\ 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd}C_d \\ B_c E_{ca} & L_{cb}C_b & A_{cc} & L_{cd}C_d \\ B_d E_{da} & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd}^* + B_d E_{dd} + L_{dd}C_d \end{bmatrix} + B_o C_o,$$

$$\tilde{B} = [B_0 \quad B_1] = \begin{bmatrix} B_{0a} & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们进一步注意到 A_{dd}^* 、 B_d 和 C_d 有下面的形式,

$$A_{dd}^* = \text{blkdiag}\{A_{q_1}, \dots, A_{q_{m_d}}\} \quad (5.6.3)$$

和

$$B_d = \text{blkdiag}\{B_{q_1}, \dots, B_{q_{m_d}}\}, \quad C_d = \text{blkdiag}\{C_{q_1}, \dots, C_{q_{m_d}}\}, \quad (5.6.4)$$

其中, A_{q_i} 、 B_{q_i} 和 C_{q_i} , $i=1, 2, \dots, m_d$ 如同式(5.4.13)所定义。同时, 我们假设 A_{aa} 是 Jordan 规范形, 即

$$A_{aa} = \text{blkdiag}\{J_{a,1}, J_{a,2}, \dots, J_{a,k}\}, \quad (5.6.5)$$

其中 $J_{a,i}$, $i=1, 2, \dots, k$ 是一些 $n_i \times n_i$ 的 Jordan 块,

$$J_{a,i} = \text{diag}\{\alpha_i, \alpha_i, \dots, \alpha_i\} + \begin{bmatrix} 0 & I_{n_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.6.6)$$

(A_{bb} , C_b) 是定理 4.3.1 中的可观结构分解形, 即

$$A_{bb} = A_{bb}^* + L_{bb}C_b = \text{blkdiag}\{A_{bb,1}, \dots, A_{bb,p_b}\} + L_{bb}C_b \quad (5.6.7)$$

和

$$C_b = \text{blkdiag}\{C_{b,1}, \dots, C_{b,p_b}\}, \quad (5.6.8)$$

其中

$$A_{bb,i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{l_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{b,i} = [1 \quad 0], \quad i = 1, 2, \dots, p_b. \quad (5.6.9)$$

最后, 假设 (A_{cc} , B_c) 是定理 4.4.1 的可控结构分解形, 即

$$A_{cc} = A_{cc}^* + B_c E_{cc} = \text{blkdiag}\{A_{cc,1}, \dots, A_{cc,m_c}\} + B_c E_{cc} \quad (5.6.10)$$

和

$$B_c = \text{blkdiag}\{B_{c,1}, \dots, B_{c,m_c}\}, \quad (5.6.11)$$

其中

$$A_{cc,i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{l_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{c,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m_c. \quad (5.6.12)$$

KCF 步骤 2 确定状态反馈和输出馈入律

令

$$\tilde{F} = - \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ E_{da} & E_{db} & E_{dc} & E_{dd} \\ E_{ca} & 0 & E_{cc} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.13)$$

和

$$\tilde{K} = - \begin{bmatrix} B_{0a} & L_{ad} & L_{ab} \\ B_{0b} & L_{bd} & L_{bb} \\ B_{0c} & L_{cd} & L_{cb} \\ B_{0d} & L_{dd} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.14)$$

很容易验证, Σ_{KF} 的表示为

$$A_{KF} = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{cc}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd}^* \end{bmatrix}, \quad B_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_c \\ 0 & B_d & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.15)$$

和

$$C_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.16)$$

KCF 步骤 3 结束

现在可以很简单地验证出, Σ_{KF} 的 (Rosenbrock) 系统矩阵具有下面的形式。

1. 相应于 $J_{a,i}$ 的部分为

$$sI - J_{a,i} = \begin{bmatrix} s - \alpha_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s - \alpha_i & -1 \\ & & & s - \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (5.6.17)$$

这已经是式 (3.6.12) 的形式。

2. 相应于 $(A_{bb,i}, C_{b,i})$ 的部分为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{b,i} \\ sI - A_{bb,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ s & \ddots & \\ & \ddots & -1 \\ & & & s \end{bmatrix}, \quad (5.6.18)$$

这已经是式 (3.6.13) 的形式。

3. 相应于 $(A_{cc,i}, B_{c,i})$ 的部分为

$$[sI - A_{cc,i} \quad -B_{c,i}] = \begin{bmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.6.19)$$

这已经是式(3.6.14)的形式。

4. 最后,相应于 $(A_{q_i}, B_{q_i}, C_{q_i})$ 的部分为

$$\begin{bmatrix} sI - A_{q_i} & -B_{q_i} \\ C_{q_i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & s & -1 & 0 \\ & & & s & -1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.20)$$

令

$$U_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V_{q_i} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.21)$$

可得

$$U_{q_i} \begin{bmatrix} sI - A_{q_i} & -B_{q_i} \\ C_{q_i} & 0 \end{bmatrix} V_{q_i} = \begin{bmatrix} 1 & -s & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & -s & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.6.22)$$

这是式(3.6.15)的形式。

Σ_{KF} 的系统矩阵的 Kronecker 规范形,或等价地, Σ 的系统矩阵(3.6.11),可以通过考虑在式(5.6.18)和式(5.6.21)所示的变换上增加一些变换和适当的置换得到,由此完成算法。

以上构造 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Kronecker 规范形的算法已经在[87]中用 m 函数 kcf. m 实现了。下面我们进行系统矩阵 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Smith 形的计算。回顾 Rosenbrock 和 Storey 经典教科书^[113]中 Smith 形的定义。给定一个多项式矩阵 $A(s)$,在[113]中有证明,存在单模变换 $M(s)$ 和 $N(s)$,使得

$$S(s) = M(s)A(s)N(s) = \begin{bmatrix} D(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.6.23)$$

其中

$$D(s) = \text{diag}\{p_1(s), p_2(s), \dots, p_r(s)\}, \quad (5.6.24)$$

其中,每个 $p_i(s), i=1, 2, \dots, r$, 是首项系数为 1 的多项式, $p_i(s)$ 是 $p_{i+1}(s), i=1, 2, \dots, r-1$ 的因子。注意,一个单模矩阵是一个方的多项式矩阵,它的行列式是一个非零常数。式(5.6.23)中的 $S(s)$ 就被称为 $A(s)$ 的 Smith 规范形或 Smith 形。在下面的内容中,我们将证明,利用结构分解技术, Σ 的系统矩阵 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Smith 形可以直接得到。

SMITH 步骤 1 确定 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Kronecker 形

如同前面的算法一样,可以利用 Σ 的特殊坐标基(SCB)来确定 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Kronecker 规范形。但是对于计算 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Smith 形,我们不需要通过复杂变换把 A_{an} 分解到 Jordan

规范形,这可能需要复的变换。我们让 A_{nn} 保持一个实值矩阵。注意,在 Kronecker 规范形中的变换是定常和非奇异的,因此是单模。

SMITH 步骤 2 确定单模变换

1. 利用 Rosenbrock 和 Storey^[113] 中第 3 章的定理 7.4 的证明过程,很容易证明式(5.6.17)中的 $sI - J_{a,i}$ 可以变成 Smith 形

$$(sI - J_{a,i}) \Leftrightarrow \text{diag}\{\overbrace{1, \dots, 1}^{n_i-1}, (s - \alpha_i)^{n_i}\}. \quad (5.6.25)$$

通常,利用 [113] 中的过程,可以计算出两个单模变换 $M_a(s)$ 和 $N_a(s)$,使得 $sI - A_{aa}$ 被变换到 Smith 形,即

$$M_a(s)(sI - A_{aa})N_a(s) = \{p_{a,1}(s), p_{a,2}(s), \dots, p_{a,n_a}(s)\}. \quad (5.6.26)$$

显然,这些多项式和给定系统 Σ 的不变零点结构相关联。

2. 和式(5.6.18)中的 $(A_{bb,i}, C_{b,i})$ 相对应的部分具有一个定常的 Smith 形:

$$\begin{bmatrix} I_{l_i} \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & & & \\ s & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ s^{l_i} & \dots & s & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & & & \\ s & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & s \end{bmatrix} \right) I_{l_i}. \quad (5.6.27)$$

注意,上方程中右边的第一项是一个单模矩阵。

3. 类似地,和式(5.6.19)中的 $(A_{cc,i}, B_{c,i})$ 相对应部分的 Smith 形也是一个定常矩阵:

$$[I_{r_i} \ 0] = I_{r_i} \left(\begin{bmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{bmatrix} \right) N_{r_i}(s), \quad (5.6.28)$$

其中,

$$N_{r_i}(s) = - \begin{bmatrix} 1 & & & \\ s & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ s^{r_i} & \dots & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_{r_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.29)$$

是一个单模矩阵。

4. 最后,式(5.6.21)中相应于 $(A_{q_i}, B_{q_i}, C_{q_i})$ 部分的 Smith 形是一个单位矩阵:

$$I_{q_i+1} = I_{q_i+1} \left(\begin{bmatrix} 1 & -s & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -s \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{q_i} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & s \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6.30)$$

上方程的最后一项又是单模矩阵。

根据式(5.6.26)~式(5.6.30),以及一些适当的排列置换,可以得到单模变换 $M(s)$ 和 $N(s)$,使得

$$M(s)P_{\Sigma}(s)N(s) = \begin{bmatrix} D_{\Sigma}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.6.31)$$

其中

$$D_{\Sigma}(s) = \text{diag}\{\overbrace{1, \dots, 1}^{n_{bcd}}, p_{a,1}(s), p_{a,2}(s), \dots, p_{a,n_a}(s)\}, \quad (5.6.32)$$

这里, $n_{bcd} = n_b + n_c + n_d + m_0 + m_d$ 。

我们用下面的例子来演示本节的结果。

例 5.6.1 考虑式(5.4.1)所表示的系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.33)$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.6.34)$$

系统已经是特殊坐标基(SCB)的形式了,在 1 有一个不变零点, $n_a = n_b = n_c = n_d = 1$ 。根据 KCF 步骤 1~KCF 步骤 3 的算法,我们得到

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{KF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

和 $B_K = B$, $C_F = C$, $\tilde{D} = D$, 所需的非奇异变换是

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

它把 $P_{\Sigma}(s)$ 变换到 Kronecker 规范形,即

$$UP_{\Sigma}(s)V = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

接着,根据 SMITH 步骤 1~SMITH 步骤 2 的算法,得到两个单模矩阵

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & s-1 \end{bmatrix}$$

和

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & s-1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & s-1 \end{bmatrix},$$

其中, $\det[M(s)] = -1$ 和 $\det[N(s)] = 1$, 它把 $P_{\Sigma}(s)$ 变换到 Smith 形, 即

$$M(s)P_{\Sigma}(s)N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然, 以上 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Smith 形中的 (5,5) 元素是多项式 $s-1$, 这是由 Σ 的不变零点所产生的。

5.7 离散时间系统

对于一般的离散时间系统, 特殊坐标基 (SCB) 或结构分解几乎和 5.4 节的连续时间系统完全一样。为了参照方便, 在这一节中把离散时间系统的结果归纳一下。我们所考虑的离散时间系统表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (5.7.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 是 Σ 的状态、输入和输出。我们同样假设 $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 是满秩的。

定理 5.7.1 (DSCB) 对于由式 (5.7.1) 给定的系统 Σ , 存在非奇异的状态、输出和输

入变换 Γ_s 、 Γ_o 和 Γ_i , 把系统分解到 6 个状态子空间, 这些状态子空间完全描述了系统的有限和无限零点结构以及可逆结构。

新的状态、输入和输出空间由以下一组方程描述:

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u}, \quad (5.7.2)$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{pmatrix}, \quad x_a = \begin{pmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \\ x_a^+ \end{pmatrix}, \quad x_d = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m_d} \end{pmatrix}, \quad (5.7.3)$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_d \\ y_b \end{pmatrix}, \quad y_d = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m_d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_c \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m_d} \end{pmatrix}, \quad (5.7.4)$$

和

$$x_a^-(k+1) = A_{aa}^- x_a^-(k) + B_{0a}^- y_0(k) + L_{ad}^- y_d(k) + L_{ab}^- y_b(k), \quad (5.7.5)$$

$$x_a^0(k+1) = A_{aa}^0 x_a^0(k) + B_{0a}^0 y_0(k) + L_{ad}^0 y_d(k) + L_{ab}^0 y_b(k), \quad (5.7.6)$$

$$x_a^+(k+1) = A_{aa}^+ x_a^+(k) + B_{0a}^+ y_0(k) + L_{ad}^+ y_d(k) + L_{ab}^+ y_b(k), \quad (5.7.7)$$

$$x_b(k+1) = A_{bb} x_b(k) + B_{0b} y_0(k) + L_{bd} y_d(k), \quad y_b(k) = C_b x_b(k), \quad (5.7.8)$$

$$x_c(k+1) = A_{cc} x_c(k) + B_{0c} y_0(k) + L_{cb} y_b(k) + L_{cd} y_d(k) \\ + B_c [E_{ca}^- x_a^-(k) + E_{ca}^0 x_a^0(k) + E_{ca}^+ x_a^+(k)] + B_c u_c(k), \quad (5.7.9)$$

$$y_0(k) = C_{0a}^- x_a^-(k) + C_{0a}^0 x_a^0(k) + C_{0a}^+ x_a^+(k) + C_{0b} x_b(k) \\ + C_{0c} x_c(k) + C_{0d} x_d(k) + u_0(k), \quad (5.7.10)$$

对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$,

$$x_i(k+1) = A_{q_i} x_i(k) + L_{i0} y_0(k) + L_{id} y_d(k) + B_{q_i} [u_i(k) + E_{ia}^- x_a^-(k) \\ + E_{ia}^0 x_a^0(k) + E_{ia}^+ x_a^+(k) + E_{ib} x_b(k) + E_{ic} x_c(k) + E_{id} x_d(k)], \quad (5.7.11)$$

$$y_i(k) = C_{q_i} x_i(k), \quad y_d(k) = C_d x_d(k). \quad (5.7.12)$$

这里, 状态 x_a^- 、 x_a^0 、 x_a^+ 、 x_b 、 x_c 和 x_d 的维数分别是 n_a^- 、 n_a^0 、 n_a^+ 、 n_b 、 n_c 和 $n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i$, 而对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$, 状态 x_i 的维数是 q_i 。控制变量 u_0 、 u_d 和 u_c 的维数分别是 m_0 、 m_d 和 $m_c = m - m_0 - m_d$, 而输出矢量 y_0 、 y_d 和 y_b 的维数分别是 $p_0 = m_0$ 、 $p_d = m_d$ 和 $p_b = p - p_0 - p_d$ 。矩阵 A_{q_i} 、 B_{q_i} 和 C_{q_i} 的形式是

$$A_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{q_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{q_i} = [1, 0, \dots, 0]. \quad (5.7.13)$$

假设 $x_i, i=1, 2, \dots, m_d$ 是按 $q_i \leq q_{i+1}$ 的方式排列的, 矩阵 L_{id} 具有特别的形式

$$L_{id} = [\ell_{i,1} \quad \ell_{i,2} \quad \cdots \quad \ell_{i,i-1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad (5.7.14)$$

其中的最后一行全为零。进一步地, $\lambda(A_{aa}^-) \subset \mathbb{C}^\ominus$ 、 $\lambda(A_{aa}^0) \subset \mathbb{C}^\ominus$ 和 $\lambda(A_{aa}^+) \subset \mathbb{C}^\ominus$ 。同样地, (A_{cc}, B_c) 是可控的, (A_{bb}, C_b) 是可观的。

离散时间系统的结构分解和连续时间系统的结构分解有同样的性质, 即性质 5.4.1~性质 5.4.7。

最后, 我们要指出的是, 许多像几何子空间这样的系统结构性质并不需要把子空间 χ_b 、 χ_c 和 χ_d 分解到积分器链, 当给定系统的数据是病态时 (ill-conditioned), 可能会出现数值计算问题。对此感兴趣的读者可以参考 Chu 等^[36] 的最近结果, 那里证明了在没有确切的积分器链的情况下, 分离 χ_a 、 χ_b 、 χ_c 和 χ_d , 可以应用一些几乎正交的变换来实现。我们已经用 m 函数实现了他们的算法, 叫做 scbrow. m。在工具箱^[87] 中, 我们尽量采用数值稳定性好的 m 函数。当有必要把子系统分解到积分器链的形式时, 可以采用 5.3 节的算法, 和 Sannuti 和 Saberi^[122] 的方法相比较, 该算法需要较少的迭代步数。

5.8 练习

5.1 对 SISO 系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]x,$$

计算特殊坐标基 (SCB)。辨识系统的相对阶和不变零点。

5.2 利用特殊坐标基 (SCB) 的性质构造一个四阶的可控可观的 SISO 系统 Σ , 考虑下面的 5 种情况:

- Σ 没有不变零点, 相对阶为 4。
- Σ 有一个不变零点在 $\{1\}$, 相对阶为 3。
- Σ 有两个不变零点分别在 $\{1, 2\}$, 相对阶为 2。
- Σ 有三个不变零点分别在 $\{1, 2, 3\}$, 相对阶为 1。
- Σ 有四个不变零点分别在 $\{\pm j, \pm 1\}$, 相对阶为 0。

5.3 对 MIMO 系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

和

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x,$$

计算特殊坐标基(SCB)。验证系统既不是左可逆,也不是右可逆,有一个不稳定的不变零点和阶次为1的无限零点。

5.4 对 MIMO 系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

和

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u,$$

计算特殊坐标基(SCB)。验证系统是可逆的,同时给出系统的不变零点和无限零点结构。

5.5 利用特殊坐标基(SCB)的性质构造一个四阶可逆、可控和可观的 MIMO 系统 Σ ,考虑下面的情况:

- Σ 是严格正则的,有一个无限零点结构 $S_{\infty}^* = \{1, 3\}$,这表明 Σ 没有不变零点。
- Σ 是严格正则的,有一个无限零点结构 $S_{\infty}^* = \{2, 2\}$,这表明 Σ 没有不变零点。
- Σ 是严格正则的,有一个不变零点在 $\{1\}$ 和一个无限零点结构 $S_{\infty}^* = \{1, 2\}$ 。
- Σ 是严格正则的,有两个不变零点在 $\{\pm j\}$ 和一个无限零点结构 $S_{\infty}^* = \{1, 1\}$ 。
- Σ 是非严格正则的,有三个不变零点在 $\{1, \pm j\}$ 和一个无限零点结构 $S_{\infty}^* = \{1\}$ 。
- Σ 是非严格正则的,有四个不变零点在 $\{\pm 1, \pm j\}$ 和没有阶次高于 0 的无限零点。

5.6 构造一个三阶严格正则和右可逆的系统 Σ ,有两个输入和一个输出,有以下各种情况:

- Σ 有一个阶次为 2 的无限零点,没有不变零点。
- Σ 有一个阶次为 1 的无限零点,有一个不变零点在 $\{-1\}$ 。

而且得到的系统必须是可控但不可观的。

5.7 构造一个三阶严格正则和左可逆的系统 Σ ,有一个输入和两个输出,有以下各种情况:

- Σ 有一个阶次为 2 的无限零点,没有不变零点。
- Σ 有一个阶次为 1 的无限零点,有一个不变零点在 $\{-1\}$ 。

而且得到的系统必须是不可控但可观的。

5.8 构造二阶系统 Σ ,它具有以下的特性: (i) Σ 既不是左也不是右可逆; (ii) Σ 是不可控和不可观; (iii) Σ 没有有限零点,没有高于 0 阶的无限零点; (iv) Σ 是非严格正则的, $[C \ D]$ 和 $[B' \ D']$ 是满秩的。

5.9 对练习 5.1、练习 5.3 和练习 5.4 所给定的系统,计算几何子空间 \mathcal{V}^* 、 \mathcal{S}^* 、

\mathcal{R}^* 和 \mathcal{N}^* 。

5.10 对练习 5.3 和练习 5.4 所给定的系统, 计算 $\lambda=1$ 时的几何子空间 \mathcal{V}_λ 和 \mathcal{S}_λ 。

5.11 考虑一个 SISO 系统 Σ , 它已经是定理 5.2.1 中的 SCB 形式, 即

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= A_{aa}x_a + L_{ad}y, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad y = x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \dots, \dot{x}_{n_d-1} = x_{n_d}, \\ \dot{x}_{n_d} &= E_{da}x_a + E_1x_1 + E_2x_2 + \dots + E_{n_d}x_{n_d} + u,\end{aligned}$$

或者是矩阵形式

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ad} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ E_{da} & E_1 & E_2 & \cdots & E_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

和

$$y = Cx = [0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]x.$$

令

$$\tilde{B} := B + \begin{bmatrix} K_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对新系统 $\tilde{\Sigma}$, 表示为 $\dot{x} = Ax + \tilde{B}u$ 和 $y = Cx$ 构造特殊坐标基 (SCB)。证明: Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 有同样的相对阶。同时证明: $\tilde{\Sigma}$ 的不变零点由 $\tilde{A}_{aa} := A_{aa} - K_a E_{da}$ 的特征值给出。

5.12 根据定理 5.3.1 可得, Σ 的和 x_d 相关联的每个子系统可以表示为

$$\dot{x}_{d,i} = \begin{bmatrix} \star & I_{q_i-1} \\ \star & \star \end{bmatrix} x_{d,i} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_{d,i} + \star)$$

和

$$y_{d,i} = [1 \quad 0]x_{d,i}.$$

证明: 从 $u_{d,i}$ 到 $y_{d,i}$ 的子系统是可逆、可控和可观的, 没有不变零点。这表明和 x_d 相关联的整个子系统从输入 u_d 到输出 y_d 是可逆、可控可观和没有不变零点的。

5.13 对练习 5.3 和练习 5.4 所给定的系统, 确定 Kronecker 规范形和 Smith 形。

5.14 给定一个线性系统 Σ , 并由定理 5.4.1 给定特殊坐标基 (SCB), 证明性质 5.4.6 中的 S^* , 即

$$S^*(\Sigma) = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_c} & 0 \\ 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} \right\}.$$

5.15 给定一个线性系统 Σ , 并由定理 5.4.1 给定特殊坐标基 (SCB), 证明性质 5.4.7 中的 S_λ^* , 即

$$S_\lambda(\Sigma) = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} \lambda I - A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{ba} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} \right\},$$

其中

$$\text{im}\{Y_{ba}\} = \ker[C_b(A_{bb} + K_b C_b - \lambda I)^{-1}],$$

K_b 是任何一个具有适当维数的矩阵, 满足 $A_{bb} + K_b C_b$ 在 λ 没有特征值的约束。

第 6 章 奇异系统的分解

6.1 导论

在这一章中,我们开始关注更广一类的线性时不变系统的结构分解,即线性奇异(descriptor)系统。奇异系统通常在文献中也称为广义系统(generalized systems),出现在许多实际应用中,包括工程系统、经济系统、网络分析和生物系统中(可参见 Dai^[43], Kuijper^[79]和 Lewis^[80])。事实上,现实生活中的许多系统在本质上是奇异的。因为缺乏有效的工具来处理奇异系统,常常用正则系统来简化或近似它。在近 30 年中,不管是利用代数还是几何方法的线性奇异系统的结构分析,都得到了许多学者的相当关注(参见 Chu 和 Mehrmann^[37], Chu 和 Ho^[38], Fliess^[53], Geerts^[57], Lewis^[80-82], Lewis 和 Ozcaldiran^[83], Loiseau^[93], Malabre^[97], Misra 等^[99], Van Dooren^[143,144], Verghese^[146], Zhou 等^[161],以及相关的参考文献)。一般说来,几乎所有涉及奇异系统的研究工作都是对相应正则系统的自然推广,尽管这些推广并不是直接的。

对非奇异系统,像有限和无限零点结构、可逆结构这样的系统结构性质,已经充分展示了在解决各种控制问题中所发挥的重要作用,包括 H_2 、 H_∞ 控制和干扰解耦(参考[22]和[120])。然而,奇异系统的结构性质和它们在奇异系统控制问题中的应用,在文献中没有得到应有的重视。在这一章中,我们将给出一般多变量线性奇异系统的结构分解技术。和第 5 章的系统相对应,这样的技术可以捕获和揭示一般奇异系统的结构性质,也可以认为是第 5 章正则系统对应结果的自然推广。但是很快就会发现,对一般多变量奇异系统进行结构分解更加复杂。可以预见,这样的分解技术能够成为解决大量奇异系统控制问题的有力工具,如 H_2 和 H_∞ 控制、模型降阶和干扰解耦,这只是其中的几个例子而已。这一章的结果,特别是对于连续时间系统,主要是根据[64,65]中已有的研究结果。

考虑一个连续时间系统, Σ 表示为

$$\Sigma : \begin{cases} E \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 分别是系统的状态、输入和输出, E 、 A 、 B 、 C 和 D 是具有适当维数的定常矩阵。如果 $\text{rank}(E) < n$, 则系统 Σ 是奇异的。通常,为了避免系统的解的任何歧义性,在整章中我们都假设给定的奇异系统 Σ 是正规(regular)的,即对所有的 $s \in \mathbb{C}$, 有 $\det(sE - A) \neq 0$ 。传统上, Kronecker 规范形(严格等价变换下的矩阵束(matrix

pencil)的传统形式)在奇异系统的结构分解分析中得到了广泛应用。Malabre^[97]提出了一种几何方法,并引入了奇异系统的结构不变性。从那篇文章中可以看出,有些定义和其他直接从矩阵束(matrix pencil)工具中推出的结果是一致的,它把许多几何和结构方面的结果从正则系统推广到了奇异系统。

在第3章的正则系统中已经看到,Kronecker 规范形揭示了系统的有限和无限零点结构(即不变指数, invariant indices),以及左和右零空间结构。可以把同样的技术移植到奇异系统不变指数的定义中(见 Malabre^[97])。我们知道,如果存在具有适当维数的非奇异定常矩阵 \tilde{P} 和 \tilde{Q} ,使得

$$\tilde{Q}(sM_1 - N_1)\tilde{P} = sM_2 - N_2, \quad (6.1.2)$$

则两个 $m \times n$ 维的矩阵束 $sM_1 - N_1$ 和 $sM_2 - N_2$ 是严格等价的。在 Gantmacher^[56] 中已经证明,在严格等价意义下,任何矩阵束 $sM - N$ 都可以变换到规范准对角形,即

$$\tilde{Q}(sM - N)\tilde{P} = \begin{bmatrix} \text{blkdiag}\{sI - J, L_{l_1}, \dots, L_{l_q}, R_{r_1}, \dots, R_{r_p}, I - sH\} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.1.3)$$

在本章中,我们将关注

$$P_\Sigma(s) = sM - N = s \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (6.1.4)$$

即和 Σ 相关联的(Rosenbrock)系统矩阵束。在式(6.1.3)中, R_k 和 L_k 分别是 $k \times (k+1)$ 和 $(k+1) \times k$ 双对角束,

$$R_k := \begin{bmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{bmatrix}, \quad L_k := \begin{bmatrix} -1 & & & \\ s & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & s \end{bmatrix}, \quad (6.1.5)$$

J 是 Jordan 规范形, $sI - J$ 有以下 $\sum_{i=1}^{\delta} d_i$ 个束作为它的对角块,

$$sI_{m_{i,j}} - J_{m_{i,j}}(\beta_i) := \begin{bmatrix} s - \beta_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s - \beta_i & -1 \\ & & & s - \beta_i \end{bmatrix}, \quad (6.1.6)$$

$j=1, 2, \dots, d_i, i=1, 2, \dots, \delta$, H 是幂零和 Jordan 规范形, $I - sH$ 有以下 d 个束作为它的对角块,

$$I_{n_j+1} - sJ_{n_j+1}(0) := \begin{bmatrix} 1 & -s & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -s \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.1.7)$$

$j=1, 2, \dots, d$ 。则 $\{(s - \beta_i)^{m_{i,j}}, j=1, 2, \dots, d_i\}$ 是在 $\beta_i, i=1, 2, \dots, \delta$ 的有限基本因子。指

标集 $\{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ 和 $\{l_1, l_2, \dots, l_q\}$ 分别是右和左最小指数。 $\{(1/s)^j, j = 1, 2, \dots, d\}$ 是无限基本因子。 Σ 的结构不变性定义是基于它的系统束的不变指数。对于奇异系统, 右和左可逆指数分别是系统束的右和左的最小指数, 奇异系统的有限和无限零点结构与系统束的有限和无限基本因子相关联。

注意, 奇异系统 Σ 的系统束的不变指数的计算非常简单。不失一般性, 我们假设 E 的形式是

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.1.8)$$

所以, A 、 B 和 C 有相应的分块

$$A = \begin{bmatrix} A_{nn} & A_{ns} \\ A_{sn} & A_{ss} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_n \\ B_s \end{bmatrix}, \quad C = [C_n \quad C_s]. \quad (6.1.9)$$

把式(6.1.4)所示的系统束重新写为

$$P_{\Sigma}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} sI - A_{nn} & -A_{ns} & -B_n \\ \hline -A_{sn} & -A_{ss} & -B_s \\ C_n & C_s & D \end{array} \right] = \begin{bmatrix} sI - A_x & -B_x \\ C_x & D_x \end{bmatrix}. \quad (6.1.10)$$

容易发现, Σ 的不变指数等价于由 (A_x, B_x, C_x, D_x) 所表示的正则系统的不变指数, 因而可以计算出所有的不变指数(参见[91])。从式(6.1.10)也可推断, 奇异系统的 Kronecker 规范形并不能捕获系统的所有结构性质, 因为它和正则系统的是一样的! 在这一章中, 我们的精力并不放在不变指数的计算上, 而是推导可以把给定系统的状态空间分解到几个不同部分的构造性算法, 这些部分与有限和无限零点动态, 以及给定系统的可逆结构直接相关。

有趣的是, 奇异系统和正则系统在结构方面有本质的差别。对于奇异系统来说, 我们很快就会发现, 有些状态变量完全是零, 表明奇异系统的状态轨迹通常并没有张成整个 \mathbb{R}^n 空间, 有一些则是输入变量和它们的导数的线性组合。这一章所给出的分解技术, 将能够自动地分离出奇异系统的冗余动态(redundant dynamics), 而 Kronecker 规范形是做不到这点的。除了这些特有的性质以外, 我们进一步发现, 剩下的状态变量和第 5 章的正则系统有相似的结构性质。

前面已经指出, 在解决一系列奇异系统控制问题方面, 和正则系统相对应, 这一章中的技术应该能够发挥同样的作用。我们要强调的是, 有关奇异系统和控制的研究还远远不够全面, 这一章的结果将是解决许多奇异系统和控制问题的重要工具。

本章的安排如下: 6.2 节是对 SISO 系统结构分解的算法, 6.3 节给出了一般 MIMO 系统结构分解算法和这类系统的结构性质, 6.3 节中结果的证明放在 6.4 节, 6.5 节处理离散时间系统。

在这一章中, $u^{(v)}$ 表示 u 的 v 阶导数, 其中 v 是非负整数。稍许有些不严格, 在不会

引起歧义的情况下,我们有时把 $u^{(v)}$ 写成 $s^v u$ 。这里的 s 是微分算子,或者是 Laplace 变换的变量。

6.2 SISO 奇异系统

在这一节中,我们考虑式(6.1.1)中 $m = p = 1$ 时的奇异系统。正如所料,SISO 系统结构分解的计算要比一般多变量系统结构分解的计算简单得多。为简洁起见,我们在这一节中假设 Σ 的状态变量 $x(t)$ 在 $t = 0$ 时是 t 的连续函数,有以下定理。

定理 6.2.1 考虑式(6.1.1)中 $p = m = 1$ 时的奇异系统 Σ ,满足通常的正规性假设,即对 $s \in \mathbb{C}$,有 $\det(sE - A) \neq 0$ 。存在非奇异的状态、输入和输出变换 $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\Gamma_i \in \mathbb{R}$ 和 $\Gamma_o \in \mathbb{R}$,以及一个 $n \times n$ 的非奇异矩阵 $\Gamma_c(s)$,它的元素是 s 的多项式,所有这些给出了用以下方程组描述的 Σ 的结构分解,

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_z \\ x_e \\ x_a \\ x_d \end{pmatrix}, \quad x_d \in \mathbb{R}^{n_d}, \quad x_d = \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ \vdots \\ x_{dn_d} \end{pmatrix}, \quad (6.2.1)$$

$$x_z \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad x_e \in \mathbb{R}^{n_e}, \quad x_a \in \mathbb{R}^{n_a}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i \tilde{u} \quad (6.2.2)$$

和

情形 1: 如果 $n_d = 0$,即 x_d 不存在,则有

$$\left. \begin{aligned} x_z &= 0, \\ x_e &= \tilde{u}^{(v)}, \\ \dot{x}_a &= A_{aa} x_a + B_{0a} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = \bar{C} x_a + \bar{D} \tilde{u}^{(v)}; \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3)$$

情形 2: 如果 $n_d > 0$,则有

$$\left. \begin{aligned} x_z &= 0, \\ x_e &= \alpha_e \tilde{u}^{(v)}, \\ \dot{x}_a &= A_{aa} x_a + L_{ad} y_d, \\ \dot{x}_{d1} &= x_{d2}, \\ \dot{x}_{d2} &= x_{d3}, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{dn_d} &= M_{dn} x_a + L_{dd} y_d + \tilde{u}^{(v)}, \quad \tilde{y} = y_d = x_{d1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

这里, v 是一个非负的整数, A_{aa} 、 B_{0a} 、 \bar{C} 、 \bar{D} 、 L_{ad} 、 M_{dn} 和 L_{dd} (如果存在的话)是具有适当维数的矩阵, α_e 是非零标量。

证明 以下是关于 Σ 的结构分解的逐步构造性证明。

SISO-SDDS 步骤 1 初步分解

根据文献 Dai^[43], 这一步是把给定的奇异系统分离成一个正则的子系统和一个特殊的奇异子系统(后面称此为 EA 分解)。我们首先注意到, 给定系统(6.1.1)的正规性假设意味着存在一个实标量 β , 使得 $\det(\beta E + A) \neq 0$ 。接下来, 定义

$$\hat{E} = (\beta E + A)^{-1} E. \quad (6.2.5)$$

根据实 Jordan 规范分解, 即定理 4.2.2, 存在一个非奇异的变换 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$T \hat{E} T^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 & 0 \\ 0 & \hat{E}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.2.6)$$

其中, $\hat{E}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ 是一个非奇异的矩阵, $\hat{E}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ 是一个幂零矩阵。最后, 令

$$P = \begin{bmatrix} \hat{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \end{bmatrix} T (\beta E + A)^{-1}, \quad Q = T^{-1}. \quad (6.2.7)$$

则很容易验证

$$\begin{aligned} PEQ &= \begin{bmatrix} \hat{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \end{bmatrix} T (\beta E + A)^{-1} E T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \end{bmatrix} T \hat{E} T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 & 0 \\ 0 & \hat{E}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

其中, $N = (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \hat{E}_2$ 。不难证明, 对任何正整数 h ,

$$\begin{aligned} N^h &= N^{h-2} (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \hat{E}_2 (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \hat{E}_2 \\ &= N^{h-2} (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \hat{E}_2 \hat{E}_2 \\ &\quad \vdots \\ &= (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-h} (\hat{E}_2)^h. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

由于 \hat{E}_2 是幂零的, 显然 N 也是个幂零矩阵。下面, 注意到 $(\beta E + A)^{-1} A = I_n - \beta \hat{E}$, 我们有

$$\begin{aligned}
PAQ &= \begin{bmatrix} \hat{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \end{bmatrix} T(\beta E + A)^{-1} AT^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \end{bmatrix} T(I_n - \beta \hat{E})T^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & (I_{n_2} - \beta \hat{E}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} - \beta \hat{E}_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} - \beta \hat{E}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}. \tag{6.2.10}
\end{aligned}$$

我们同样可以相应地划分

$$PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad CQ = [C_1 \quad C_2] \tag{6.2.11}$$

那么,给定的奇异系统 Σ 就可以被分解成以下两个子系统:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u, \\ y_1 = C_1 x_1, \end{cases} \tag{6.2.12}$$

和

$$\Sigma_2 : \begin{cases} N \dot{x}_2 = x_2 + B_2 u, \\ y_2 = C_2 x_2, \end{cases} \tag{6.2.13}$$

其中, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $y = y_1 + y_2$.

SISO-SDDS 步骤 2 Σ_2 的分解

如果 $B_2 = 0$, 我们有 $x_z = x_2$, $n_z = n_2$, $x_c = \emptyset$, $n_c = 0$ 和 $v = 0$. 在这种情况下, 下面的过程无需进行, 直接转向 SISO-SDDS 步骤 3.

在 $B_2 \neq 0$ 的情况下, 根据定理 4.4.1, 存在一个非奇异的变换 T_2 和 $\alpha \neq 0$, 使得

$$x_2 = T_2 \begin{pmatrix} x_v \\ x_z \end{pmatrix}, \quad x_z \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad x_v \in \mathbb{R}^{v_d}, \quad x_v = \begin{pmatrix} x_{v1} \\ x_{v2} \\ \vdots \\ x_{vv_d} \end{pmatrix}, \tag{6.2.14}$$

$$T_2^{-1} N T_2 = \begin{bmatrix} J_{c0} & N_{cc} \\ 0 & J_{n_z} \end{bmatrix}, \quad T_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} B_{2c} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.15}$$

和

$$C_2 T_2 = [C_{2c} \quad C_{2z}], \tag{6.2.16}$$

其中, (J_{c0}, B_{2c}) 是可控对。因为 N 是幂零矩阵, 所有的特征值为 0, B_{2c} 是列矢量, 实际上 (J_{c0}, B_{2c}) 可以被写为

$$J_{c0} = \begin{bmatrix} 0 & I_{v_d-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad B_{2c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix}. \quad (6.2.17)$$

同时, 注意到 J_{n_z} 的特征值也都是 0. 由此很容易验证, Σ_2 可被分解成下面的子系统:

$$J_{n_z} \dot{x}_z = x_z. \quad (6.2.18)$$

这意味着, 在 $x(t)(t=0)$ 是 t 的连续函数的假设下, 对所有的 t 有 $x_z=0$, 以及

$$J_{c0} \dot{x}_v + N_{cc} \dot{x}_z = x_v + B_{2c} u, \quad (6.2.19)$$

这等价于

$$J_{c0} \dot{x}_v = x_v + B_{2c} u \quad (6.2.20)$$

或

$$u = \alpha x_{vv_d}, \dot{x}_{vv_d} = x_{vv_d-1}, \dots, \dot{x}_{v2} = x_{v1}. \quad (6.2.21)$$

显然, 式(6.2.21)表明

$$x_e := x_{v1} = \frac{1}{\alpha} u^{(v)} \quad \text{和} \quad n_e = 1, \quad (6.2.22)$$

其中, $v = \max(0, v_d - 1)$. 输出 y_2 可被表示为

$$y_2 = C_{2c} x_v + C_{2c} x_z = C_{2c} x_v. \quad (6.2.23)$$

SISO-SDDS 步骤 3 分解 Σ 的有限和无限零点结构

观察式(6.2.12)、式(6.2.13)、式(6.2.18)、式(6.2.21)、式(6.2.22)和式(6.2.23), 现在给定系统 Σ 显然已经被变换到下面的形式:

$$x_z = 0, \quad x_e = \frac{1}{\alpha} u^{(v)}, \quad (6.2.24)$$

和一个正则系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + a B_1 x_{vv_d}, \\ \dot{x}_{v2} &= \frac{1}{\alpha} u^{(v)}, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{vv_d} &= x_{vv_d-1}, \\ y &= C_1 x_1 + C_{2c} x_v. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.25)$$

接下来, 划分

$$C_{2c} = [c_{v1} \quad c_{v2} \quad \dots \quad c_{vv_d}]. \quad (6.2.26)$$

这样, 正则系统(6.2.25)可被重新写为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u}, \\ y = \bar{C} \bar{x} + \bar{D} \bar{u}, \end{cases} \quad (6.2.27)$$

其中

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{v_2} \\ \vdots \\ x_{v_{v_d-1}} \\ x_{v_{v_d}} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

如果 $v_d > 1$, 则

$$\bar{u} = \frac{1}{\alpha} u^{(v)}, \quad \bar{C} = [C_1 \quad c_{v_2} \quad \cdots \quad c_{v_{v_d-1}} \quad c_{v_{v_d}}], \quad \bar{D} = c_{v_1}.$$

如果 $v_d = 1$, 则

$$\bar{x} = x_1, \quad \bar{u} = \frac{1}{\alpha} u, \quad \bar{A} = A_1, \quad \bar{B} = \alpha B_1, \quad \bar{C} = C_1, \quad \bar{D} = C_{2c}.$$

我们有以下两种不同情况。

情形 1 $\bar{D} \neq 0$, 相应于定理 6.2.1 的情形 1。在这种情况下, 很容易得到 $x_d = 0$, $n_d = 0$, $x_a = \bar{x}$, $n_a = n_1 + v$ 和

$$\dot{x}_a = (\bar{A} - \bar{B}\bar{D}^{-1}\bar{C})x_a + \bar{B}\bar{D}^{-1}y = A_{aa}x_a + B_{0a}y \quad (6.2.28)$$

和

$$y = \bar{C}x_a + \bar{D}\alpha^{-1}u^{(v)} = \bar{C}x_a + \bar{D}\bar{u}^{(v)}. \quad (6.2.29)$$

情形 2 $\bar{D} = 0$, 相应于定理 6.2.1 的情形 2。根据定理 5.2.1, 存在非奇异的变换 $\bar{\Gamma}_s$ 、 $\bar{\Gamma}_o$ 和 $\bar{\Gamma}_i$, 当我们对式(6.2.27)所示的系统进行如下坐标变换

$$\bar{x} = \bar{\Gamma}_s \tilde{x} = \bar{\Gamma}_s \begin{pmatrix} x_a \\ x_d \end{pmatrix}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad \bar{u} = \frac{1}{\alpha} u^{(v)} = \bar{\Gamma}_i \tilde{u}^{(v)}, \quad (6.2.30)$$

根据式(6.2.22)可得

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ad}C_d \\ B_d M_{da} & A_{dd} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix} \tilde{u}^{(v)} \quad (6.2.31)$$

和

$$\tilde{y} = [0 \quad C_d] \tilde{x}, \quad (6.2.32)$$

其中, A_{dd} 、 B_d 和 C_d 的形式是

$$A_{dd} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_d-1} \\ \star & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_d = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]. \quad (6.2.33)$$

令

$$u = \Gamma_i \tilde{u} = \alpha \bar{\Gamma}_i \tilde{u} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} u^{(v)} = \bar{\Gamma}_i \tilde{u}^{(v)}. \quad (6.2.34)$$

由此完成了给定 SISO 奇异系统的结构分解算法。 ■

我们用下面的例子来演示上面的分解技术。

例 6.2.1 考虑式(6.1.1)所示的奇异系统,其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.2.35)$$

和

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D = 0. \quad (6.2.36)$$

首先选择 $\beta = -1$, 并得到

$$P = \begin{bmatrix} 1.4142 & 1.4142 & -0.7071 & -1.4142 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 1.2248 & 0 & -1.2248 \\ 0 & -1.4142 & -1.4142 & 1.4142 & 1.4142 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.4083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & 0 & 1 \\ 0 & -0.8165 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0.4083 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$PB = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -1.2247 \\ 1.4142 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad CQ = [0 \ 0 \ 0.7071 \ 0 \ 1],$$

其中, $n_1 = 3$ 和 $n_2 = 2$ 。给定的奇异系统可被分解成下面的子系统:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u, \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

和

$$\Sigma_2 : \begin{cases} N \dot{x}_2 = x_2 + B_2 u, \\ y_2 = C_2 x_2, \end{cases}$$

其中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -1.2248 \\ 1.4142 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \quad 0 \quad 0.7071]$$

和

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \quad 1].$$

注意, B_2 非零, Σ_2 已经是式(6.2.15)所要求的形式, 我们有

$$\alpha = -1, \quad x_z = 0, \quad u = -x_v, \quad x_e = x_v = -u, \quad v_d = 1,$$

以及辅助的正则系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u}, \\ y = \bar{C} \bar{x} + \bar{D} \bar{u}, \end{cases}$$

其中

$$\bar{x} = x_1, \quad \bar{u} = \frac{1}{\alpha} u = -u,$$

$$\bar{A} = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \alpha B_1 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 1.2248 \\ -1.4142 \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{C} = C_1 = [0 \quad 0 \quad 0.7071], \quad \bar{D} = 0,$$

它对应了 SISO-SDDS 步骤 3 的情形 2。根据定理 5.2.1 的结果, 我们得到所需的状态、输出和输入变换矩阵,

$$\bar{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0.7071 \\ 1 & 0 & -1.2248 \\ 0 & 0 & 1.4142 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o = 1, \quad \bar{\Gamma}_i = -1,$$

它把辅助正则系统变换到所需的结构形式:

$$\bar{\Gamma}_s^{-1} \bar{A} \bar{\Gamma}_s = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \bar{\Gamma}_s^{-1} \bar{B} \bar{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_o^{-1} \bar{C} \bar{\Gamma}_s = [0 \quad 0 \mid 1].$$

最后, 所有需要的变换是

$$\Gamma_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1.2248 & 0 & 1.2248 & 0 \\ -1.4142 & -2.1213 & 0 & 2.1213 & 1.4142 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4083 & -0.7071 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8165 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0.4083 & 0.7071 & -1 \end{bmatrix}$$

和

$$\Gamma_i = 1, \quad \Gamma_o = 1.$$

这些变换把奇异系统变换成特殊形式

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \tilde{x} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \tilde{x} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \tilde{u}$$

和

$$\tilde{y} = [1 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ | \ 1] \tilde{x}.$$

分解后的系统可以重新写为

$$x_z = 0, \quad x_c = -\tilde{u},$$

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_d$$

和

$$\dot{x}_d = \tilde{u}, \quad \tilde{y} = x_z + y_d = y_d = x_d.$$

6.3 MIMO 奇异系统

我们首先下面的主要定理中总结多变量奇异系统结构分解,也将给出所有相关的性质。为了陈述清晰,结构分解构造性算法以及所有性质的证明放在 6.4 节中。

定理 6.3.1(SDDS) 考虑式(6.1.1)所示的多变量线性奇异系统 Σ , 对 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\det(sE - A) \neq 0$ 。

1. 存在和坐标无关的非负整数 $n_z, n_c, n_a, n_b, n_e, n_d, m_d, m_0, m_c, p_b$, 如果 $m_d > 0$, 则有正

整数 $q_i, i = 1, 2, \dots, m_d$ 。

2. 存在非奇异的状态和输出定常变换 $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\Gamma_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 以及一个 $m \times m$ 的非奇异输入变换 $\Gamma_i(s)$, 它的逆矩阵的元素是一些 s 的多项式(即它的逆包含了各种微分算子); 一个 $n \times n$ 的非奇异变换 $\Gamma_c(s)$, 它的元素是 s 的多项式。所有这些, 给出了 Σ 的结构分解, 并且显式地揭示了结构性质。

Σ 的结构分解可以用下面一组方程描述:

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i(s) \tilde{u} \quad (6.3.1)$$

和

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_z \\ x_c \\ x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_d \\ y_b \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_c \end{pmatrix}, \quad (6.3.2)$$

$$x_d = \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ \vdots \\ x_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad y_d = \begin{pmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \\ \vdots \\ y_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ \vdots \\ u_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad (6.3.3)$$

以及

$$J_{n_z} \dot{x}_z = x_z, \quad (6.3.4)$$

其中, $J_{n_z} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ 的特征值都在 0,

$$x_c = B_{c0} u_0 + B_{ec} u_c + B_{ed} u_d + s N_{ez}(s) x_z, \quad (6.3.5)$$

$$\dot{x}_a = A_{aa} x_a + B_{0a} y_0 + L_{ad} y_d + L_{ab} y_b + s L_{az}(s) x_z, \quad (6.3.6)$$

$$\dot{x}_b = A_{bb} x_b + B_{0b} y_0 + L_{bd} y_d + s L_{bz}(s) x_z, \quad (6.3.7)$$

$$y_b = C_b x_b + C_{bz} x_z + s C_{bz}(s) x_z, \quad (6.3.8)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc} x_c + B_{0c} y_0 + L_{cd} y_d + L_{cb} y_b + B_c M_{ca} x_a + B_c u_c + s L_{cz}(s) x_z, \quad (6.3.9)$$

$$y_0 = C_{0a} x_a + C_{0b} x_b + C_{0c} x_c + C_{0d} x_d + u_0 + C_{0z} x_z + s C_{0zs}(s) x_z, \quad (6.3.10)$$

对于每个 $i = 1, 2, \dots, m_d$ 和一些定常的具有适当维数的子矩阵, 以及元素是 s 的多项式的矩阵, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}_{di} &= A_{q_i} x_{di} + L_{i0} y_0 + L_{id} y_d + s L_{iz}(s) x_z \\ &\quad + B_{q_i} (u_{di} + M_{ia} x_a + M_{ib} x_b + M_{ic} x_c + \sum_{j=1}^{m_d} M_{ij} x_{dj}), \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

$$y_{di} = C_{q_i} x_i + C_{q_i z} x_z + s C_{q_i z s}(s) x_z, \quad y_d = C_d x_d + C_{dz} x_z + s C_{dzs}(s) x_z, \quad (6.3.12)$$

这里, 状态 x_z, x_e, x_a, x_b, x_c 和 x_d 的维数分别是 n_z, n_e, n_a, n_b, n_c 和 $n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i$; 而对每个 $i=1, 2, \dots, m_d, x_{di}$ 的维数是 q_i 。控制矢量 u_0, u_d 和 u_c 的维数分别是 m_0, m_d 和 $m_c = m - m_0 - m_d$, 而输出变量 y_0, y_d 和 y_b 的维数分别是 m_0, m_d 和 $p_b = p - m_0 - m_d$ 。矩阵对 (A_{bb}, C_b) 是可观的, (A_{cc}, B_c) 是可控的, 三元组 $(A_{q_i}, B_{q_i}, C_{q_i})$ 的形式是

$$A_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{q_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{q_i} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad (6.3.13)$$

假设 $x_{di}, i=1, 2, \dots, m_d$ 以 $q_i \leq q_{i+1}$ 的方式排列, 则矩阵 L_{id} 有特殊的形式

$$L_{id} = [L_{i1} \ L_{i2} \ \dots \ L_{i(i-1)} \ 0 \ \dots \ 0], \quad (6.3.14)$$

其中, 最后一行全为零。

定理 6.3.1 中, 结构分解的构造性证明在下一节中给出。以下的定理 6.3.1 的推论给出了结构分解的简明矩阵形式, 建立了和原系统的等价关系。推论的证明沿用定理 6.3.1 的构造性证明过程。

推论 6.3.1 定理 6.3.1 中, Σ 的结构分解可以表示如下:

$$\tilde{E} = \Gamma_e(s) E \Gamma_s = E_s - E_z(s) + \Psi(s) \quad (6.3.15)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{ez}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{az}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{bz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{cz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{dz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \Psi(s),$$

$$\tilde{A} = \Gamma_e(s) A \Gamma_s = A_s + s\Psi(s)$$

$$= \left(B_0 C_0 + \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa} & L_{ab} C_b & 0 & L_{ad} C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd} C_d \\ 0 & 0 & B_c M_{ca} & L_{cb} C_b & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ 0 & 0 & B_d M_{da} & B_d M_{db} & B_d M_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix} \right) + s\Psi(s), \quad (6.3.16)$$

$$\tilde{B} = \Gamma_c(s)B\Gamma_i(s) = B_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{0e} & B_{de} & B_{ce} \\ B_{0a} & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3.17)$$

$$\tilde{C} = \Gamma_o^{-1}C\Gamma_s = C_s + \Psi_c = \begin{bmatrix} C_{0z} & 0 & C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ C_{dz} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ C_{bz} & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} + \Psi_c, \quad (6.3.18)$$

$$\tilde{D} = \Gamma_o^{-1}D\Gamma_i(s) = D_s + \Psi_d(s) = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \Psi_d(s), \quad (6.3.19)$$

其中, $\Psi(s)$ 是一个元素为一些 s 多项式的 $n \times n$ 矩阵,

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{0a} \\ B_{0b} \\ B_{0c} \\ B_{0d} \end{bmatrix}, \quad C_0 = [0 \quad 0 \quad C_{0a} \quad C_{0b} \quad C_{0c} \quad C_{0d}] \quad (6.3.20)$$

和

$$\Psi_c \bar{x} + \Psi_d(s) \tilde{u} = \Psi_R(s)x_z, \quad (6.3.21)$$

其中, $\Psi_R(s)$ 是元素为一些 s 多项式的矩阵。

推论 6.3.2 令 Σ_s 为一个奇异系统, 用定常矩阵四元组 $(E_s, A_s, B_s, C_s, D_s)$ 来表示, 它的传递函数为

$$H_s(s) = C_s(sE_s - A_s)^{-1}B_s + D_s. \quad (6.3.22)$$

令 $H(s)$ 为原奇异系统 (6.1.1) 的传递函数, 则

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D = \Gamma_o H_s(s) \Gamma_i^{-1}(s), \quad (6.3.23)$$

这表明, 原系统 Σ 的传递函数和用 Σ_s 表示的传递函数之间由非奇异变换相联系。

接下来, 我们要指出的是, 假设 Σ 的状态变量 $x(t)$ 在 $t=0$ 是 t 的连续函数, 并没有失去一般性, 这只是意味着, 从 $x(0^-)$ 到 $x(0^+)$ 时没有跳变, 则很容易证明, 式 (6.3.4) 意味着对所有 t 有 $x_z=0$ 。在这样一个比较弱的假设下, 总结结构分解中状态变量的物理性质如下:

1. 状态 x_z 是纯静态的, 对所有时间 t 都是零。它既不能被系统输入所控制, 也不受其他状态的影响。

2. 状态 x_c 也是静态的, 包含了系统输入变量和它们的适当阶次导数的线性组合。

3. 状态 x_a 既不能被系统输入直接控制, 也不受系统输出的直接影响。

4. 输出 y_b 和状态 x_b 不受任何输入的直接影响, 尽管它可以受到输出 y_d 的间接控制。而且, (A_{bb}, C_b) 形成了可观对, 这表明状态 x_b 是可观的。

5. 状态 x_c 直接受输入 u_c 控制, 但对任何输出没有直接影响。 (A_{cc}, B_c) 形成了可控对, 这表明状态 x_c 是可控的。

6. 变量 u_{di} 通过一组 q_i 个积分器控制输出 y_{di} , 而且所有的状态 x_{di} 是可控和可观的。

我们很快就会发现, 给定系统的所有不变性质都很容易通过结构分解得到。从定理 6.3.1 中 Σ 的结构分解不难和有趣地发现, 给定系统存在冗余的状态变量。因为状态变量 x_z 始终为零, 状态变量 x_c 只是系统输入变量和它们的导数的线性组合, 直接应用该技术就可以把奇异系统变换到一个等价的非奇异系统。所以, 从输入—输出的关系来看系统的话, 给定的奇异系统可以等价地变成以下的非奇异系统:

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + B_{0a}y_0 + L_{ad}y_d + L_{ab}y_b, \quad (6.3.24)$$

$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b + B_{0b}y_0 + L_{bd}y_d, \quad y_b = C_b x_b, \quad (6.3.25)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc}x_c + B_{0c}y_0 + L_{cd}y_d + L_{cb}y_b + B_c M_{ca}x_a + B_c u_c, \quad (6.3.26)$$

$$y_0 = C_{0a}x_a + C_{0b}x_b + C_{0c}x_c + C_{0d}x_d + u_0, \quad (6.3.27)$$

对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{di} &= A_{q_i}x_{di} + L_{i0}y_0 + L_{id}y_d \\ &\quad + B_{q_i} \left(u_{di} + M_{ia}x_a + M_{ib}x_b + M_{ic}x_c + \sum_{j=1}^{m_d} M_{ij}x_{dj} \right), \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

$$y_{di} = C_{q_i}x_{di}, \quad y_d = C_d x_d. \quad (6.3.29)$$

因此, 我们有理由相信, 非奇异系统的许多系统和控制理论结果可以方便地推广到奇异系统。这是本章结构分解技术的最主要性质。

我们在前面已经提到, 定理 6.3.1 的结构分解具有揭示给定奇异系统 Σ 结构性质的特点。我们现在可以研究如何从系统分解中得到 Σ 的系统性质, 如可镇定性、可检测性, 以及有限和无限零点结构。

首先从文献(见 Dai^[43])中来回顾线性奇异系统稳定性、可镇定性和可检测性的定义。

定义 6.3.1(稳定性、可镇定性和可检测性) 如果特征多项式 $\det(sE - A)$ 的根都在 \mathbb{C}^- 中, 则称式(6.1.1)描述的系统 Σ 是稳定的。如果存在一个具有适当维数的定常矩阵 F , 使得 $\det(sE - A - BF)$ 的根是稳定的, 则称系统是可镇定的。类似地, 如果存在一个具有适当维数的定常矩阵 K , 使得 $\det(sE - A - KC)$ 的根是稳定的, 则称系统是可检测的。

我们有以下的性质。

性质 6.3.1(可镇定性和可检测性) 式(6.1.1)给定的系统 Σ 是可镇定的, 当且仅当 (A_{con}, B_{con}) 是可镇定的; Σ 是可检测的, 当且仅当 (A_{obs}, C_{obs}) 是可检测的, 其中

$$A_{\text{con}} := \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad B_{\text{con}} := \begin{bmatrix} B_{0a} & L_{ad} \\ B_{0b} & L_{bd} \end{bmatrix} \quad (6.3.30)$$

和

$$A_{\text{obs}} := \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ B_c M_{ca} & A_{cc} \end{bmatrix}, \quad C_{\text{obs}} := \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0c} \\ M_{da} & M_{dc} \end{bmatrix}. \quad (6.3.31)$$

可以用与正则系统同样的方式来定义奇异系统的不变零点(参见第 3 章),或者是根据 Σ 的 Kronecker 规范形(参见 Malabre^[97])。

定义 6.3.2(不变零点) 如果

$$\text{rank}\{P_{\Sigma}(\alpha)\} < n + \text{normrank}\{H(s)\}, \quad (6.3.32)$$

则复数 $\alpha \in \mathbb{C}$ 就被称为是式(6.1.1)描述的奇异系统 Σ 的不变零点。其中,

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D, \quad (6.3.33)$$

$\text{normrank}\{H(s)\}$ 表示 $H(s)$ 的常态秩,就是定义为在整个具有实系数的 s 的有理函数域上的秩, $P_{\Sigma}(s)$ 是式(6.1.4)中的和 Σ 相关的系统矩阵束。式(6.1.6)中的 β_i 对应了 Σ 的不变零点。

以下的性质表明 Σ 的不变零点可以很直接的方式从结构分解中得到。

性质 6.3.2(不变零点, 常态秩) Σ 的不变零点是 A_{aa} 的特征值。 Σ 的常态秩等于 $m_0 + m_d$ 。

我们注意到, A_{aa} 的 Jordan 规范结构对应了系统的 Morse^[100] \mathbf{I}_1 列。实际上在许多应用中,进一步地分离和不变零点动态相关联的状态变量是有用和必须的,即把 x_a 分解成稳定部分、不稳定部分以及和虚轴上不变零点相关的部分。根据定理 4.2.1,存在一个非奇异的状态变换,比如说是 T_a ,使得

$$x_a = T_a \begin{bmatrix} x_a^- \\ x_a^0 \\ x_a^+ \end{bmatrix}, \quad T_a^{-1} A_{aa} T_a = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 \\ 0 & A_{aa}^0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ \end{bmatrix}, \quad (6.3.34)$$

其中, $\lambda(A_{aa}^-) \subset \mathbb{C}^-$ 为稳定的不变零点, $\lambda(A_{aa}^0) \subset \mathbb{C}^0$ 为虚轴上的不变零点, $\lambda(A_{aa}^+) \subset \mathbb{C}^+$ 是不稳定的不变零点。

给定系统 Σ 的无限零点结构可被定义为式(6.1.7)中 $P_{\Sigma}(s)$ 的 Kronecker 规范形的相应的块结构。也可以应用众所周知的 Smith-McMillan 形或 Morse^[100] 的 \mathbf{I}_1 列来定义。

性质 6.3.3(无限零点结构) Σ 具有 m_0 个 0 阶的无限零点。 Σ 的无限零点结构(大于 0 阶)为

$$S_{\infty}^*(\Sigma) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}, \quad (6.3.35)$$

即对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$, Σ 分别有一个 q_i 阶的无限零点。

注:性质 6.3.3 只对变换后的系统成立。由于对系统输入求导的缘故,如

式(6.1.7)所定义的原系统的无限零点结构和式(6.3.35)有些不同。

我们所给的结构分解也可以给出奇异系统 Σ 的可逆结构。从本质上讲,对于矩阵 $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 是最大秩的通常情况,如果存在一个有理矩阵函数 $L(s)$,使得

$$L(s)H(s) = I_m, \quad (6.3.36)$$

则系统 Σ 或等价地, $H(s)$ 是左可逆的; 如果存在一个有理矩阵函数 $R(s)$,使得

$$H(s)R(s) = I_p, \quad (6.3.37)$$

则系统 Σ 是右可逆的; 进一步地,如果既是左可逆,又是右可逆,则 Σ 就是可逆的; 如果既不是左可逆,又不是右可逆,则 Σ 是不可逆或是退化(degenerate)的。 Σ 的具体的可逆结构同样和式(6.1.5)中 $P_\Sigma(s)$ 的 Kronecker 规范形中相应的块结构的左和右的最小指数有关。实际上,右和左最小指数分别等价于 (A_{bb}, C_b) 的可观性指数和 (A_{cc}, B_c) 的可控性指数,这些分别对应了 Morse^[100] 的 I_3 和 I_2 列。

性质 6.3.4(可逆结构) Σ 是右可逆的,当且仅当 x_b (因此 y_b) 不存在; 是左可逆的,当且仅当 x_c (因此 u_c) 不存在; 是可逆的,当且仅当 x_b 和 x_c 都不存在。

6.4 定理 6.3.1 和性质的证明

我们现在给出前节中主要结果的完整证明,即定理 6.3.1 和它的所有结构性质。

定理 6.3.1 的证明 下面是一般多变量奇异系统结构分解的逐步算法。

MIMO-SDDS 步骤 1 初步分解

这一步是把给定的奇异系统分解成一个正则子系统和一个具有特殊结构的奇异子系统。这一步和 6.2 节中的 SISO-SDDS 步骤 1 相同,就是要找到两个非奇异矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$,使得

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

和

$$PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CQ = [C_1 \ C_2], \quad (6.4.2)$$

其中, A_1, B_1, B_2, C_1 和 C_2 是具有适当维数的矩阵, N 是一个具有适当指数的幂零矩阵,比如说是 h , 即 $N^{h-1} \neq 0$ 而 $N^h = 0$ 。等价地, Σ 可被分解成下面两个子系统:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u, \\ y_1 = C_1 x_1 + Du \end{cases} \quad (6.4.3)$$

和

$$\Sigma_2 : \begin{cases} N \dot{x}_2 = x_2 + B_2 u, \\ y_2 = C_2 x_2, \end{cases} \quad (6.4.4)$$

其中, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$ 和 $y = y_1 + y_2$ 。

MIMO-SDDS 步骤 2 x_z 和 x_c 的分解

主要的想法是分离 Σ_2 中 (N, B_2) 矩阵对的可控和不可控部分。根据第 4 章中的定理 4.4.1 和定理 4.4.2, 存在非奇异的坐标变换

$$x_2 = T_s \hat{x}_2, \quad u = T_i \hat{u}, \quad (6.4.5)$$

使得

$$\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} x_v \\ x_z \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} x_{v1} \\ x_{v2} \\ \vdots \\ x_{vn_c} \end{pmatrix}, \quad x_z \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{n_c} \\ \hat{u}_* \end{pmatrix}, \quad (6.4.6)$$

其中

$$x_{vi} \in \mathbb{R}^{p_i}, \quad x_{vi} = \begin{pmatrix} x_{vi,1} \\ x_{vi,2} \\ \vdots \\ x_{vi,p_i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n_c,$$

$$\hat{N} = T_s^{-1} N T_s = \begin{bmatrix} J_v & N_{zv} \\ 0 & J_{n_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v1} & 0 & \cdots & 0 & N_{1z} \\ 0 & J_{v2} & \cdots & 0 & N_{2z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{vn_c} & N_{n_c z} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{n_z} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_2 = T_s^{-1} B_2 T_i = \begin{bmatrix} B_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n_c} & B_{1z} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2n_c} & B_{2z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{n_c n_c} & B_{n_c z} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中, (J_v, B_v) 是可控的。而且, 由于 N 是幂零矩阵, 所以 J_{vi} 和 J_{n_z} 的特征值都在 0, J_{vi} 、 N_{iz} 、 B_{iz} 和 B_{ij} 的形式是

$$J_{v_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{iz} = \begin{bmatrix} \eta_{iz,1} \\ \vdots \\ \eta_{iz,p_i-1} \\ \eta_{iz,p_i} \end{bmatrix}, \quad B_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.4.7)$$

$$B_{iz} = \begin{bmatrix} b_{iz,1} \\ \vdots \\ b_{iz,p_i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{ij,1} \\ \vdots \\ b_{ij,p_i-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4.8)$$

因此,通过式(6.4.5)的变换, Σ_2 被分解成子系统

$$J_{n_z} \dot{x}_z = x_z, \quad (6.4.9)$$

对 $i=1,2,\dots,n_c$,

$$J_{v_i} \dot{x}_{v_i} + N_{iz} \dot{x}_z = x_{v_i} + B_{ii} \hat{u}_i + \sum_{j=i+1}^{n_c} B_{ij} \hat{u}_j + B_{iz} \hat{u}_*, \quad (6.4.10)$$

这等价于

$$J_{v_i} \dot{x}_{v_i} = x_{v_i} + B_{ii} \hat{u}_i + \sum_{j=i+1}^{n_c} B_{ij} \hat{u}_j + B_{iz} \hat{u}_* - (N_{iz} \dot{x}_z). \quad (6.4.11)$$

因为 J_{v_i} 的特殊结构,对每个 $i=1,2,\dots,n_c$ 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{v_i,2} &= x_{v_i,1} + \sum_{j=i+1}^{n_c} b_{ij,1} \hat{u}_j + b_{iz,1} \hat{u}_* - \eta_{iz,1} \dot{x}_z, \\ \dot{x}_{v_i,3} &= x_{v_i,2} + \sum_{j=i+1}^{n_c} b_{ij,2} \hat{u}_j + b_{iz,2} \hat{u}_* - \eta_{iz,2} \dot{x}_z, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{v_i,p_i} &= x_{v_i,p_i-1} + \sum_{j=i+1}^{n_c} b_{ij,p_i-1} \hat{u}_j + b_{iz,p_i-1} \hat{u}_* - \eta_{iz,p_i-1} \dot{x}_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.12)$$

$$\hat{u}_i = -x_{v_i,p_i} + \eta_{iz,p_i} \dot{x}_z. \quad (6.4.13)$$

重复地对式(6.4.13)中的 \hat{u}_i 求导可得

$$x_{v_i,1} = -\hat{u}_i^{(p_i-1)} - \sum_{k=0}^{p_i-2} \sum_{j=i+1}^{n_c} b_{ij,k+1} \hat{u}_j^{(k)} - \sum_{k=0}^{p_i-2} b_{iz,k+1} \hat{u}_*^{(k)} + \sum_{k=1}^{p_i} \eta_{iz,k} x_z^{(k)}. \quad (6.4.14)$$

对于一个元素为 s 多项式的合适矢量 $\phi_i(s)$,定义一个新的输入变量

$$\check{u}_i = -x_{v_i,1} + \sum_{k=1}^{p_i} \eta_{iz,k} x_z^{(k)} = \phi_i(s) \hat{u}, \quad (6.4.15)$$

则式(6.4.12)可重新写为

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_{vi,2} &= - \sum_{j=i+1 \& p_j > 1}^{n_e} b_{ij,1} x_{vj,p_j} + \sum_{j=i+1 \& p_j = 1}^{n_e} b_{ij,1} \check{u}_j + b_{iz,1} \hat{u}_* \\
 &\quad - \check{u}_i + \sum_{k=2}^{p_i} \eta_{iz,k} x_z^{(k)} + \sum_{j=i+1 \& p_j > 1}^{n_e} b_{ij,1} \eta_{jz,p_j} \dot{x}_z, \\
 \dot{x}_{vi,3} &= x_{vi,2} - \sum_{j=i+1 \& p_j > 1}^{n_e} b_{ij,2} x_{vj,p_j} + \sum_{j=i+1 \& p_j = 1}^{n_e} b_{ij,2} \check{u}_j \\
 &\quad + b_{iz,2} \hat{u}_* - \eta_{iz,2} \dot{x}_z + \sum_{j=i+1 \& p_j > 1}^{n_e} b_{ij,2} \eta_{jz,p_j} \dot{x}_z, \\
 &\quad \vdots \\
 \dot{x}_{vi,p_i} &= x_{vi,p_i-1} - \sum_{j=i+1 \& p_j > 1}^{n_e} b_{ij,p_i-1} x_{vj,p_j} + \sum_{j=i+1 \& p_j = 1}^{n_e} b_{ij,p_i-1} \check{u}_j \\
 &\quad + b_{iz,p_i-1} \hat{u}_* - \eta_{iz,p_i-1} \dot{x}_z + \sum_{j=i+1 \& p_j > 1}^{n_e} b_{ij,p_i-1} \eta_{jz,p_j} \dot{x}_z.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.4.16)$$

接下来,定义

$$\check{u}_e = \begin{pmatrix} \check{u}_1 \\ \check{u}_2 \\ \vdots \\ \check{u}_{n_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{v1,1} + \sum_{k=1}^{p_1} \eta_{1z,k} x_z^{(k)} \\ -x_{v2,1} + \sum_{k=1}^{p_2} \eta_{2z,k} x_z^{(k)} \\ \vdots \\ -x_{vn_e,1} + \sum_{k=1}^{p_{n_e}} \eta_{n_e z,k} x_z^{(k)} \end{pmatrix} \quad (6.4.17)$$

和

$$x_e = \begin{pmatrix} x_{v1,1} \\ x_{v2,1} \\ \vdots \\ x_{vn_e,1} \end{pmatrix} = -\check{u}_e + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p_1} \eta_{1z,k} x_z^{(k)} \\ \sum_{k=1}^{p_2} \eta_{2z,k} x_z^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p_{n_e}} \eta_{n_e z,k} x_z^{(k)} \end{pmatrix} = -\check{u}_e + sN_{ez}(s)x_z, \quad (6.4.18)$$

其中, $N_{ez}(s)$ 是元素为 s 多项式的矩阵。现在很容易验证, 式(6.4.4)中变换后的系统 Σ_2 可以重新写成以下形式

$$\begin{cases} J_{n_z} \dot{x}_z = x_{n_z}, \\ x_c = -\check{u}_c + sN_{cz}(s)x_z, \\ \dot{\check{x}}_2 = \check{A}_2 \check{x}_2 + \check{B}_{2c} \check{u}_c + \check{B}_{2*} \hat{u}_* + s\check{B}_{2z}(s)x_z, \\ y_2 = \check{C}_2 \check{x}_2 + \check{D}_{2c} \check{u}_c + [s\check{D}_{2z}(s) + \check{C}_z]x_z, \end{cases} \quad (6.4.19)$$

其中, \check{x}_2 包含了 x_v 中所有不在 x_c 中的状态变量, $\check{A}_2, \check{B}_{2c}, \check{B}_{2*}, \check{C}_2, \check{D}_{2c}$ 和 \check{C}_z 是具有适当维数的定常矩阵, $\check{B}_{2z}(s)$ 和 $\check{D}_{2z}(s)$ 是元素为一些 s 多项式的矩阵。而且对一些具有适当维数的定常矩阵 $\check{A}_{12}, \check{B}_{1c}, \check{B}_{1*}, \check{C}_{12}, \check{D}_{1c}$ 和 \check{D}_{1*} , 以及一些元素为 s 多项式的矩阵 $\check{B}_{1z}(s)$ 和 $\check{D}_{1z}(s)$, 式(6.4.3) 所示的 Σ_1 可被重新写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + \check{A}_{12} \check{x}_2 + \check{B}_{1c} \check{u}_c + \check{B}_{1*} \hat{u}_* + s\check{B}_{1z}(s)x_z, \\ y_1 = C_1 x_1 + \check{C}_{12} \check{x}_2 + \check{D}_{1c} \check{u}_c + \check{D}_{1*} \hat{u}_* + s\check{D}_{1z}(s)x_z, \end{cases} \quad (6.4.20)$$

MIMO-SDDS 步骤 3 正则系统的形成和最后的分解

关键是从子系统(6.4.19)和(6.4.20)中形成正则系统, 然后对式(6.1.1)所示的原系统应用正则系统结果, 以获得结构分解。根据式(6.4.19)和式(6.4.20), 我们得到正则系统

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u} + \bar{B}_z(s)x_z, \\ y = \bar{C} \bar{x} + \bar{D} \bar{u} + \bar{D}_z(s)x_z, \end{cases} \quad (6.4.21)$$

其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \check{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} \check{u}_c \\ \hat{u}_* \end{bmatrix}, \quad (6.4.22)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \check{A}_{12} \\ 0 & \check{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \check{B}_{1c} & \check{B}_{1*} \\ \check{B}_{2c} & \check{B}_{2*} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_z(s) = \begin{bmatrix} s\check{B}_{1z}(s) \\ s\check{B}_{2z}(s) \end{bmatrix}, \quad (6.4.23)$$

$$\bar{D}_z(s) = \check{C}_z + s\check{D}_{1z}(s) + s\check{D}_{2z}(s) \quad (6.4.24)$$

和

$$\bar{C} = [C_1 \quad \check{C}_2 + \check{C}_{12}], \quad \bar{D} = [\check{D}_{1c} + \check{D}_{2c} \quad \check{D}_{1*}]. \quad (6.4.25)$$

根据定理 5.4.1 的结果可知, 存在非奇异的变换 $\bar{\Gamma}_s \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$, 其中 $\bar{n} = n - n_c - n_z$, $\bar{\Gamma}_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和 $\bar{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 。当对 $\bar{\Sigma}$ 应用这些变换时, 即

$$\bar{x} = \bar{\Gamma}_s \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix}, \quad y = \bar{\Gamma}_o \bar{y} = \bar{\Gamma}_o \begin{bmatrix} y_o \\ y_d \\ y_b \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \bar{\Gamma}_i \bar{u} = \bar{\Gamma}_i \begin{bmatrix} u_o \\ u_d \\ u_c \end{bmatrix}, \quad (6.4.26)$$

其中 $x_a \in \mathbb{R}^{n_a}$, $x_b \in \mathbb{R}^{n_b}$, $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $x_d \in \mathbb{R}^{n_d}$, $u_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $u_c \in \mathbb{R}^{m_c}$, $u_d \in \mathbb{R}^{m_d}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $y_b \in \mathbb{R}^{n_b}$, $y_d \in \mathbb{R}^{m_d}$,

$$x_d = \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ \vdots \\ x_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad y_d = \begin{pmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \\ \vdots \\ y_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ \vdots \\ u_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad (6.4.27)$$

我们有

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + B_{0a}y_0 + L_{ad}y_d + L_{ab}y_b + sL_{az}(s)x_z, \quad (6.4.28)$$

$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b + B_{0b}y_0 + L_{bd}y_d + sL_{bz}(s)x_z, \quad (6.4.29)$$

$$y_b = C_b x_b + C_{bz}x_z + sC_{bzs}(s)x_z, \quad (6.4.30)$$

$$\dot{x}_c = A_{cc}x_c + B_{0c}y_0 + L_{cd}y_d + L_{cb}y_b + B_c[u_c + M_{ca}x_a] + sL_{cz}(s)x_z, \quad (6.4.31)$$

$$y_0 = C_{0a}x_a + C_{0b}x_b + C_{0c}x_c + C_{0d}x_d + u_0 + C_{0z}x_z + sC_{0zs}(s)x_z \quad (6.4.32)$$

和

$$\begin{aligned} \dot{x}_{d_i} = & A_{q_i}x_{d_i} + L_{i0}y_0 + L_{id}y_d + sL_{iz}(s)x_z \\ & + B_{q_i}(u_{d_i} + M_{ia}x_a + M_{ib}x_b + M_{ic}x_c + \sum_{j=1}^{m_d} M_{ij}x_{d_j}), \end{aligned} \quad (6.4.33)$$

$$y_{d_i} = C_{q_i}x_{d_i} + C_{q_i z}x_z + sC_{q_izs}(s)x_z, \quad y_d = C_d x_d + C_{dz}x_z + sC_{dzs}(s)x_z, \quad (6.4.34)$$

其中 $(A_{q_i}, B_{q_i}, C_{q_i})$ 有式(6.3.13)所示的特殊形式。至此,完成了定理 6.3.1 的证明。■

最后,我们注意到推论 6.3.1 和推论 6.3.2 的结果可以从以上的构造过程和一些简单但繁琐的推导中得到。

结构分解性质的证明 一旦有了以下两个引理的结果,奇异系统结构分解性质的证明就可以采用和第 5 章 5.5 节所述正则系统相类似的方法来进行。

引理 6.4.1 考虑用 (E, A, B, C, D) 表示的系统 Σ , 或者是式(6.1.1)所描述的状态空间形式, 则对任何满足 $\det(sE - A - BF) \neq 0$ 的状态反馈增益 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 以 $(E, A + BF, B, C + DF, D)$ 表示的状态反馈系统 Σ_F 有以下性质:

1. Σ_F 是可镇定的, 当且仅当 Σ 是可镇定的;
2. Σ_F 和 Σ 的常态秩相同;
3. Σ_F 和 Σ 有相同的不变零点结构;
4. Σ_F 和 Σ 有相同的无限零点结构;
5. Σ_F 是(左、右或都不是)可逆的, 当且仅当 Σ 是(左、右或都不是)可逆的。

证明 第一项是显然的。第 2 项从以下推导中得出:

$$\begin{aligned} H_F(s) &:= (C + DF)(sE - A - BF)^{-1}B + D \\ &= (C + DF)(sE - A)^{-1}[I - BF(sE - A)^{-1}]^{-1}B + D \\ &= (C + DF)(sE - A)^{-1}B[I - F(sE - A)^{-1}B]^{-1} + D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [C(sE - A)^{-1}B + D][I - F(sE - A)^{-1}B]^{-1} \\ &= H(s)[1 - F(sE - A)^{-1}B]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.4.35)$$

接下来,注意到

$$\begin{bmatrix} A + BF - sE & B \\ C + DF & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - sE & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix}, \quad (6.4.36)$$

以及在式(6.1.2)所示的非奇异定常变换下, $P_{\Sigma}(s)$ 不变性是严格等价的事实,可以推出第3、4和5项。 ■

引理 6.4.2 考虑由 (E, A, B, C, D) 所表示的系统 Σ 或者是式(6.1.1)所描述的状态空间形式,则对于满足 $\det(sE - A - KC) \neq 0$ 的定常输出馈入增益 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 由 $(E, A + KC, B + KD, C, D)$ 所表示的输出馈入系统 Σ_K 有以下的性质:

1. Σ_K 是可检测的,当且仅当 Σ 是可检测的;
2. Σ_K 和 Σ 有相同的常态秩;
3. Σ_K 和 Σ 有相同的不变零点结构;
4. Σ_K 和 Σ 有相同的无限零点结构;
5. Σ_K 是(左、右或都不是)可逆的,当且仅当 Σ 是(左、右或都不是)可逆的。

证明 和引理 6.4.1 是对偶的。 ■

根据推论 6.3.2,变换后的系统 Σ_K 和原系统的性质相同。奇异系统结构性质的证明和正则系统的相同,我们把细节留给感兴趣的读者。

我们在下面的例子中演示一般奇异系统的结构分解和它的性质。

例 6.4.1 考虑式(6.1.1)所描述的奇异系统,其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = I_7, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4.37)$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4.38)$$

MIMO-SDDS 步骤 1 初步分解

不难发现,给定系统已经是式(6.4.2)所示的形式,其中 $n_1 = 1$, $n_2 = 6$,

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + [1 \ 1 \ 0] u_1 \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_1 \end{cases}$$

Σ_2 的表示为

$$N \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_2 = x_2 + B_2 u = x_2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

和

$$y_2 = C_2 x_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_2.$$

MIMO-SDDS 步骤 2 x_z 和 x_c 的分解

利用[87]的工具箱,得到两个非奇异变换

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

它把 Σ_2 变成为规范形

$$x_2 = T_s \begin{pmatrix} x_v \\ x_z \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} x_{v1} \\ x_{v2} \end{pmatrix}, \quad u = T_i \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_* \end{pmatrix},$$

$$T_s^{-1} N T_s = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad T_s^{-1} B_2 T_i = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

和

$$C_2 T_s = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \middle| 1 \right].$$

则变换后的系统 Σ_2 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{v1.2} &= x_{v1.1} + \hat{u}_* - \dot{x}_z, \\ \dot{x}_{v1.3} &= x_{v1.2} + \hat{u}_2 + \hat{u}_* - \dot{x}_z, \\ \hat{u}_1 &= -x_{v1.3} + \dot{x}_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{v2.2} &= x_{v2.1} + \hat{u}_* - \dot{x}_z, \\ \hat{u}_2 &= -x_{v2.2} + \dot{x}_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.40)$$

和

$$0 \cdot \dot{x}_z = x_z \Rightarrow x_z = 0, \quad (6.4.41)$$

以及

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{v1.3} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_{v2.2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_z, \quad (6.4.42)$$

因此, 我们有 $n_z=1, n_c=2, p_1=3, p_2=2$,

$$x_{v1.1} = -\ddot{u}_1 - \dot{u}_2 - (\hat{u}_* + \dot{u}_*) + (\dot{x}_z + \ddot{x}_z + x_z^{(3)})$$

和

$$x_{v2.1} = -\dot{u}_2 - \hat{u}_* + (\dot{x}_z + \ddot{x}_z).$$

接下来, 定义

$$\tilde{u}_c = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_* + \hat{u}_* \\ \dot{u}_2 + \hat{u}_* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & s & s+1 \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_* \end{pmatrix}$$

和

$$x_c = \begin{pmatrix} x_{v1.1} \\ x_{v2.1} \end{pmatrix} = -\tilde{u}_c + \begin{pmatrix} \dot{x}_z + \ddot{x}_z + x_z^{(3)} \\ \dot{x}_z + \ddot{x}_z \end{pmatrix} = -\tilde{u}_c + sN_{ez}(s)x_z,$$

其中

$$N_{ez}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 \\ s + 1 \end{bmatrix},$$

则式(6.4.39)和式(6.4.40)可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{v1.2} &= -\tilde{u}_1 + \hat{u}_* + (\ddot{x}_z + x_z^{(3)}), \\ \dot{x}_{v1.3} &= x_{v1.2} - x_{v2.2} + \hat{u}_*, \\ \dot{x}_{v2.2} &= -\tilde{u}_2 + \hat{u}_* + \ddot{x}_z, \end{aligned}$$

或者是矩阵形式

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{v1.2} \\ \dot{\tilde{x}}_{v1.3} \\ \dot{\tilde{x}}_{v2.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{u}_e + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u}_* + s \begin{bmatrix} s^2 + s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} x_z. \quad (6.4.43)$$

同样,式(6.4.42)可重写为

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_z. \quad (6.4.44)$$

进一步,可有

$$B_1 T_i = [2 \quad 1 \quad 0], \quad DT_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4.45)$$

根据式(6.4.39)、式(6.4.40)和式(6.4.45), Σ_1 可重写为

$$\dot{x}_1 = x_1 + [0 \quad -2 \quad -1] \tilde{x}_2 + 3sx_z \quad (6.4.46)$$

和

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_2 + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_z. \quad (6.4.47)$$

MIMO-SDDS 步骤 3 正则系统的形成和最后的分解

把式(6.4.43)、式(6.4.44)、式(6.4.46)和式(6.4.47)组合在一起,我们得到一个辅助的正则系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u} + \bar{B}_z(s) x_z, \\ y = \bar{C} \bar{x} + \bar{D} \bar{u} + \bar{D}_z(s) x_z, \end{cases}$$

其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_e \\ \hat{u}_* \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_z(s) = s \begin{bmatrix} 3 \\ s^2 + s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_z(s) = \begin{bmatrix} s+1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

还是应用[87]的工具箱,可得

$$\bar{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_o = I_2,$$

$$n_a = 1, \quad n_b = 0, \quad n_c = 1, \quad n_d = 2,$$

$$\bar{x} = \bar{\Gamma}_s \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \\ x_{d1} \\ x_{d2} \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \bar{\Gamma}_i \begin{bmatrix} u_d \\ u_c \end{bmatrix} = \bar{\Gamma}_i \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ u_c \end{bmatrix}, \quad y = \bar{\Gamma}_o \begin{bmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Gamma}_s^{-1} \bar{A} \bar{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_s^{-1} \bar{B} \bar{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Gamma}_s^{-1} \bar{B}_z(s) = s \begin{bmatrix} -3 \\ s^2 + s \\ s + 3 \\ s + 3 \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{\Gamma}_o^{-1} \bar{C} \bar{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_o^{-1} \bar{D}_z(s) = \begin{bmatrix} s + 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

最后, 给定奇异系统的结构分解为

$$0 \cdot \dot{x}_z = x_z,$$

$$x_c = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_c - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} u_d + s \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 \\ s + 1 \end{bmatrix} x_z, \quad u_d = \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}_a = 2x_a + [-1 \quad 2]y_d - 3sx_z,$$

$$\dot{x}_c = -x_c + x_a + [2 \quad -1]y_d + u_c + s(s^2 + s)x_z,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{d1} \\ \dot{x}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y_d + u_d + s \begin{bmatrix} s + 3 \\ s + 3 \end{bmatrix} x_z$$

和

$$y_d = \begin{bmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s + 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_z.$$

从上面的分解中不难发现, 给定系统是右可逆的, 在 $s=2$ 有一个不变零点, 有两个 1 阶的无限零点。给定系统有一个始终为零的状态变量, 有两个完全是由系统输入和它们的导数线性组合的状态变量。这些状态变量在系统动态中实际上是冗余的。为了完整性, 我们给出所需的变换矩阵:

$$\Gamma_c(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & s^2 - s & -s^2 & s^2 - s & 0 & s - s^2 \\ 0 & s & 0 & 0 & -s - 1 & -s & s \\ -1 & -1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & s^2 - s - 1 & -s^2 & s^2 - s & 1 & s - s^2 \\ 1 & 1 + s & 2 & -2 & 1 - s & -1 - s & s - 1 \\ 1 & 2 + s & 3 & -2 & 1 - s & -2 - s & s - 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\Gamma_i^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s & -s & 0 \\ s-1 & -s & 1 \\ -s^2+2s+1 & -s & -s-1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们注意到, 和 s 有关的输入变换 $\Gamma_i(s)$ 实际上意味着

$$\begin{bmatrix} u_c \\ u_{d1} \\ u_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{u} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u.$$

Σ 的结构分解的简明形式(见推论 6.3.1)为

$$E_s = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$A_s = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right],$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_s = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$E_z(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline s^2 + s + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 + s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s + 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s + 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & s+1 & -s-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & s+1 & -s-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_d(s) = \begin{bmatrix} -1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

很容易验证

$$\Psi_c \bar{x} + \Psi_d(s) \bar{u} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} x_z$$

和

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B + D = \Gamma_o [C_s(sE_s - A_s)^{-1}B_s + D_s] \Gamma_i^{-1}(s).$$

6.5 离散时间奇异系统

在这一节中,和连续时间系统相类似,我们要给出一般离散时间奇异系统的结构分解和它们的结构性质。我们所考虑的离散时间奇异系统 Σ 的表达为

$$\Sigma: \begin{cases} E x(k+1) = A x(k) + B u(k), \\ y(k) = C x(k) + D u(k), \end{cases} \quad (6.5.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 分别是系统的状态、输入和输出, E 、 A 、 B 、 C 和 D 是具有适当维数的定常矩阵。我们也假设 Σ 是正规的, 即对 $z \in \mathbb{C}$ 有 $\det(zE - A) \neq 0$, 有下面的定理。

定理 6.5.1 考虑式(6.5.1)所描述的离散时间奇异系统 Σ , 满足对于 $z \in \mathbb{C}$, 有 $\det(zE - A) \neq 0$, 则存在非奇异的状态和输出变换 $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\Gamma_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$; 以及一个 $m \times m$ 的非奇异输入变换 $\Gamma_i(z)$, 它的逆由一些 z 的多项式所组成(即它的逆包含了各种前向移位算子); 一个 $n \times n$ 的非奇异变换 $\Gamma_c(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 它的元素是 z 的多项式。所有这些, 给出了 Σ 的结构分解, 显式地给出了结构性质。

Σ 的结构分解可以用下面的方程组来描述

$$x = \Gamma_s \tilde{x}, \quad y = \Gamma_o \tilde{y}, \quad u = \Gamma_i(z) \tilde{u} \quad (6.5.2)$$

和

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_z \\ x_e \\ x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_b \\ y_d \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_c \\ u_d \end{pmatrix}, \quad (6.5.3)$$

$$x_d = \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ \vdots \\ x_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad y_d = \begin{pmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \\ \vdots \\ y_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ \vdots \\ u_{dm_d} \end{pmatrix}, \quad (6.5.4)$$

以及

$$x_z(k) = 0, \quad (6.5.5)$$

$$x_e(k) = B_{e0} u_0(k) + B_{ec} u_c(k) + B_{ed} u_d(k), \quad (6.5.6)$$

$$x_a(k+1) = A_{aa} x_a(k) + B_{0a} y_0(k) + L_{ad} y_d(k) + L_{ab} y_b(k), \quad (6.5.7)$$

$$x_b(k+1) = A_{bb} x_b(k) + B_{0b} y_0(k) + L_{bd} y_d(k), \quad y_b(k) = C_b x_b(k), \quad (6.5.8)$$

$$x_c(k+1) = A_{cc} x_c(k) + B_{0c} y_0(k) + L_{cd} y_d(k) + L_{cb} y_b(k) \\ + B_c M_{ca} x_a(k) + B_c u_c(k), \quad (6.5.9)$$

$$y_0(k) = C_{0a} x_a(k) + C_{0b} x_b(k) + C_{0c} x_c(k) + C_{0d} x_d(k) + u_0(k), \quad (6.5.10)$$

对每个 $i=1, 2, \dots, m_d$, 对于适当维数的定常矩阵,

$$x_{di}(k+1) = B_{q_i} \left[u_{di}(k) + M_{ia} x_a(k) + M_{ib} x_b(k) + M_{ic} x_c(k) + \sum_{j=1}^{m_d} M_{ij} x_{dj}(k) \right] \\ + A_{q_i} x_{di}(k) + L_{i0} y_0(k) + L_{id} y_d(k), \quad (6.5.11)$$

$$y_{di}(k) = C_{q_i} x_i(k), \quad y_d = C_d x_d(k), \quad (6.5.12)$$

这里, 状态 x_z, x_e, x_a, x_b, x_c 和 x_d 的维数分别为 n_z, n_e, n_a, n_b, n_c 和 $n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i$, 而 x_{di} 的维数对每个 $i = 1, 2, \dots, m_d$ 是 q_i . 控制矢量 u_0, u_d 和 u_c 的维数分别为 m_0, m_d 和 $m_c = m - m_0 - m_d$, 而输出矢量 y_0, y_d 和 y_b 的维数分别是 m_0, m_d 和 $p_b = p - m_0 - m_d$. (A_{bb}, C_b) 是可观的, (A_{cc}, B_c) 是可控的, ($A_{q_i}, B_{q_i}, C_{q_i}$) 的形式为

$$A_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{q_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{q_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{q_i} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \quad (6.5.13)$$

假设 x_{di} 以 $q_i \leq q_{i+1}$ 的排列方式, $i=1, 2, \dots, m_d$, 则矩阵 L_{id} 将有特殊的形式

$$L_{id} = [L_{i1} \quad L_{i2} \quad \dots \quad L_{ii-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad (6.5.14)$$

L_{id} 的最后一行全为零。

最后, 我们注意到, 离散时间奇异系统的结构性质和 6.3 节中的连续时间系统相类似。在结束本章的时候, 我们要指出的是, 奇异系统的理论和控制研究还很不完整, 要全面地理解奇异系统和控制, 还需要更多的研究工作。我们相信, 本章所提供的结果是未来这个研究领域的一个重要工具。

6.6 练习

6.1 常用的 PID 控制律

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t),$$

不能被表示成严格正则或正则的状态空间形式, 但是可以被表示成奇异系统的形式。证明以下的奇异系统实现了上面的 PID 控制律:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

和

$$u(t) = [K_i \quad K_p \quad K_d] x,$$

其中的状态变量表示为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad x_2 = e(t), \quad x_3 = \dot{e}(t).$$

6.2 证明下面的奇异系统是练习 6.1 中 PID 控制律的另一种实现:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

和

$$u(t) = [K_i \quad K_p \quad K_d]x.$$

6.3 证明练习 6.1 和练习 6.2 所给的奇异系统与由

$$\dot{x}_{\text{aux}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{\text{aux}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_{\text{aux}}$$

和

$$y_{\text{aux}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ K_i & K_p \end{bmatrix} x_{\text{aux}} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_d & 0 \end{bmatrix} u_{\text{aux}}$$

所表示的正则系统具有相同的结构不变指数。

6.4 证明练习 6.1 所给的奇异系统是正规的。对系统寻找非奇异的所需变换 P 和 Q , 使得矩阵对

$$(E, A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

可被变换成 EA 分解形式。

6.5 对练习 6.1 所给的奇异系统构造结构分解。验证推论 6.3.1 和推论 6.3.2 的结果。练习 6.1 所给的 PID 控制律的传递函数符合推论 6.3.2 的结果吗?

6.6 利用矩阵束 $sE - A$ 的 Kronecker 规范形, 找出另外的一对方阵 (E, A) 实现 EA 分解的方法。

6.7 对奇异系统

$$E \dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

计算结构分解, 其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用上面得到的结构分解验证性质 6.3.1~性质 6.3.4。

6.8 构造一个有两输入和两输出的 6 阶系统, 有 $n_s = n_c = n_a = n_b = n_e = n_d = 1$, 在 -1 有一个不变零点。很显然, 所得到的系统既不是左可逆, 也不是右可逆, 有一个 1 阶的无限零点。而且, 它有一个始终为零的状态变量, 另一个状态变量直接和输入变量有关。

第7章 双线性变换下结构特性的映射

7.1 导论

在这一章中,我们要全面地给出一般的线性多变量系统在双线性和逆双线性变换下结构特性的映射。我们将深入地探讨在双线性(逆双线性)变换下,一般的线性时不变多变量连续时间(离散时间)系统的有限和无限零点结构,以及可逆性结构是如何映射到离散时间(连续时间)系统的相应结构。和这一章相似的内容已经包含在本书第一作者以前的专著^[22]中,那里应用了双线性变换和它们的结构映射特性的结果,来求一般的 Riccati 方程的解和解决离散时间 H_∞ 控制问题。在这一章中,我们要做的实际上是建立线性系统理论在连续时间域和离散时间域之间的桥梁。在第 8 章就会看到,这一章的结果对解决另一个线性系统问题也是有用的,即离散时间系统的因子分解。

双线性和逆双线性变换在数字控制和信号处理中得到广泛应用。在[22]中已经证明,双线性变换在离散时间 H_∞ 控制的极优值计算,以及在寻找离散时间 Riccati 方程解中起着重要作用。这一章的结果最早出现在 Chen 和 Weller^[30]中。实际上,对连续时间到离散时间模型转换的需求出现在许多工程领域,包括采样数字控制系统设计、数字信号处理。因此有许多离散化过程,包括输入的零阶和一阶保持器输入近似、脉冲不变变换、双线性变换(见[7]和[55])。尽管双线性变换得到广泛应用,但是文献中关于连续时间系统的关键结构特性如何过渡到离散时间系统关键特性的全面研究却比较缺乏,如有限和无限零点结构、可逆特性。我们知道,无限和有限零点结构在控制系统设计中发挥重要作用,正确地理解双线性变换下的零点结构有助于设计采样数字控制系统,并且是对现有的零阶保持采样下的有限和无限零点结构映射的一种补充(参见[6]和[60])。

在这一章中,我们全面地研究在众所周知的双线性(逆双线性)变换下,即

$$s = a \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \Leftrightarrow z = \frac{a+s}{a-s} \quad (7.1.1)$$

一般的连续时间(离散时间)线性时不变系统的结构是如何映射到离散时间(连续时间)系统的,即有限和无限零点结构、可逆结构,以及几何子空间。

7.2 连续时间系统到离散时间系统的映射

在这一节中,我们考虑以下连续时间线性时不变系统 Σ_c ,

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (7.2.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, A, B, C$ 和 D 是具有适当维数的矩阵。不失一般性,假设矩阵 $[C \ D]$ 和 $[B' \ D']$ 都是满秩的, Σ_c 有传递函数

$$G_c(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (7.2.2)$$

对上面的连续时间系统应用双线性变换,用

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = a \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (7.2.3)$$

来代替式(7.2.2)中的 s ,其中 $T=2/a$ 是采样周期。如同式(7.2.3)所示,双线性变换常称为 Tustin 近似^[7],而选择

$$a = \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T/2)} \quad (7.2.4)$$

就产生了预畸变(Pre-warped)Tustin 近似,此时连续时间和离散时间的频率响应在频率 ω_1 处相等。这样,就得到离散时间系统

$$G_d(z) = C \left(a \frac{z-1}{z+1} I - A \right)^{-1} B + D. \quad (7.2.5)$$

下面的引理给出了 $G_d(z)$ 的直接状态空间实现,[55]中有相似的结果。

引理 7.2.1 在双线性变换(7.2.3)下,式(7.2.1)所描述的连续时间系统 Σ_c 的离散化结果 $G_d(z)$ 的一个状态空间实现为

$$\Sigma_d : \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k), \\ y(k) = \tilde{C}x(k) + \tilde{D}u(k), \end{cases} \quad (7.2.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= (aI + A)(aI - A)^{-1}, \\ \tilde{B} &= \sqrt{2a}(aI - A)^{-1}B, \\ \tilde{C} &= \sqrt{2a}C(aI - A)^{-1}, \\ \tilde{D} &= D + C(aI - A)^{-1}B, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.7)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= (aI + A)(aI - A)^{-1}, \\ \tilde{B} &= 2a(aI - A)^{-2}B, \\ \tilde{C} &= C, \\ \tilde{D} &= D + C(aI - A)^{-1}B, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.8)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= (aI + A)(aI - A)^{-1}, \\ \tilde{B} &= B, \\ \tilde{C} &= 2aC(aI - A)^{-2}, \\ \tilde{D} &= D + C(aI - A)^{-1}B. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.9)$$

很显然,在这里我们假设 A 在 a 处没有特征值。

证明 首先,很容易验证

$$\begin{aligned} G_d(z) &= C\left(a\frac{z-1}{z+1}I - A\right)^{-1}B + D \\ &= (z+1)C[a(z-1)I - (z+1)A]^{-1}B + D \\ &= (z+1)C(aI - A)^{-1}[zI - (aI + A)(aI - A)^{-1}]^{-1}B + D \\ &= zC(aI - A)^{-1}(zI - \tilde{A})^{-1}B + [C(aI - A)^{-1}(zI - \tilde{A})^{-1}B + D]. \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

如果引入 $\tilde{G}_d(z) = zC(aI - A)^{-1}(zI - \tilde{A})^{-1}B$, 则可得

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}'\tilde{x}(k) + (aI - A')^{-1}C'\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) = B'\tilde{x}(k+1) = B'\tilde{A}'\tilde{x}(k) + B'(aI - A')^{-1}C'\tilde{u}(k) \end{cases} \quad (7.2.11)$$

是 $\tilde{G}_d'(z)$ 的状态空间实现, 因此

$$\tilde{G}_d(z) = C(aI - A)^{-1}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{A}B + C(aI - A)^{-1}B. \quad (7.2.12)$$

把式(7.2.12)代入式(7.2.10)可得

$$\begin{aligned} G_d(z) &= C(aI - A)^{-1}(zI - \tilde{A})^{-1}(\tilde{A} + I)B + [C(aI - A)^{-1}B + D] \\ &= \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}, \end{aligned}$$

因此有引理 7.2.1 的结果。 ■

下面的定理建立了 Σ_c 和 Σ_d 结构特性之间的相互联系, 是这一章的核心内容。证明非常繁琐, 所以为了清晰起见, 放在 7.4 节中。

定理 7.2.1 考虑式(7.2.1) 描述的连续时间系统 Σ_c , 由四元组 (A, B, C, D) 来表示, 其中 A 在 a 没有特征值。在双线性变换(7.2.3) 下, 式(7.2.6) 描述的离散时间系统 Σ_d 由式(7.2.7) 所示的四元组 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 来表示。我们有以下的特性:

1. Σ_d 的可控(可镇定)性和可观(可检测)性:

(a) (\tilde{A}, \tilde{B}) 对是可控(可镇定)的, 当且仅当 (A, B) 对是可控(可镇定)的。

(b) (\tilde{A}, \tilde{C}) 对是可观(可检测)的, 当且仅当 (A, C) 是可观(可检测)的。

2. 非奇异状态、输出和输入变换, 以及状态反馈和输出馈入律下的结果:

(a) 对任何给定的非奇异状态、输出和输入变换 T_s, T_o 和 T_i , 四元组

$$(T_s^{-1}\tilde{A}T_s, T_s^{-1}\tilde{B}T_i, T_o^{-1}\tilde{C}T_s, T_o^{-1}\tilde{D}T_i) \quad (7.2.13)$$

是连续时间系统

$$(T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i, T_o^{-1}CT_s, T_o^{-1}DT_i) \quad (7.2.14)$$

在双线性变换下所对应的离散时间系统。

(b) 对于任何使得 $A+BF$ 在 a 没有特征值的 $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 定义一个非奇异矩阵

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i &:= I + F(aI - A - BF)^{-1}B \\ &= [I - F(aI - A)^{-1}B]^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

和一个定常矩阵

$$\tilde{F} := \sqrt{2a}F(aI - A - BF)^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (7.2.16)$$

则在式(7.2.3)所示的双线性变换下, 一个用

$$(A + BF, B, C + DF, D), \quad (7.2.17)$$

表示的连续时间系统 Σ_{cF} 被映射成由

$$(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}, \tilde{B}\tilde{T}_i, \tilde{C} + \tilde{D}\tilde{F}, \tilde{D}\tilde{T}_i) \quad (7.2.18)$$

所表示的离散时间系统 Σ_{dF} 。我们注意到, Σ_{cF} 是 Σ_c 在增益矩阵 F 为状态反馈律下所形成的闭环系统; Σ_{dF} 是 Σ_d 在增益矩阵 \tilde{F} 为状态反馈律下, 以及非奇异输入变换 \tilde{T}_i 所形成的闭环系统。

(c) 对任何使得 $A + KC$ 在 a 没有特征值的 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 定义一个非奇异矩阵

$$\tilde{T}_o := [I + C(aI - A - KC)^{-1}K]^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad (7.2.19)$$

和一个定常矩阵

$$\tilde{K} := \sqrt{2a}(aI - A - KC)^{-1}K. \quad (7.2.20)$$

则在式(7.2.3)所示的双线性变换下, 一个用

$$(A + KC, B + KD, C, D) \quad (7.2.21)$$

所表示的连续时间系统 Σ_{cK} 被映射成由

$$(\tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{K}\tilde{D}, \tilde{T}_o^{-1}\tilde{C}, \tilde{T}_o^{-1}\tilde{D}) \quad (7.2.22)$$

所表示的离散时间系统 Σ_{dK} 。我们注意到, Σ_{cK} 是 Σ_c 在增益矩阵 K 为输出馈入律下所形成的闭环系统; Σ_{dK} 是 Σ_d 在增益矩阵 \tilde{K} 为输出馈入律, 以及非奇异输出变换 \tilde{T}_o 所形成的闭环系统。

3. Σ_d 的可逆和结构不变指数 I_2 和 I_3 列:

$$(a) I_2(\Sigma_d) = I_2(\Sigma_c), I_3(\Sigma_d) = I_3(\Sigma_c).$$

(b) Σ_d 是左(右)可逆的, 当且仅当 Σ_c 是左(右)可逆的。

(c) Σ_d 是(不是)可逆的, 当且仅当 Σ_c 是(不是)可逆的。

4. Σ_d 的不变零点以及与此相关的结构由下面两个部分组成:

(a) 令 Σ_c 的无限零点结构(阶次大于 0)为

$$S_{\infty}^*(\Sigma_c) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}, \quad (7.2.23)$$

则 $z = -1$ 是 Σ_d 的一个不变零点, 具有重数结构

$$S_{-1}^*(\Sigma_d) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}. \quad (7.2.24)$$

(b) 令 $s = \alpha \neq a$ 是 Σ_c 的一个不变零点, 具有重数结构

$$S_{\alpha}^*(\Sigma_c) = \{n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_{\alpha}}\}, \quad (7.2.25)$$

则 $z = \beta = (a + \alpha)/(a - \alpha)$ 是离散时间系统 Σ_d 的一个不变零点, 具有重数结构

$$S_{\beta}^*(\Sigma_d) = \{n_{\alpha,1}, n_{\alpha,2}, \dots, n_{\alpha,\tau_{\alpha}}\}. \quad (7.2.26)$$

5. Σ_d 的无限零点结构由以下两部分组成:

(a) 令 $m_0 = \text{rank}(D)$, m_d 是 Σ_c 的阶次大于 0 的无限零点总数, 同时令 τ_a 为 Σ_c 在 $s = a$ 的不变零点的几何重数, 则有 $\text{rank}(\tilde{D}) = m_0 + m_d - \tau_a$ 。

(b) 令 $s = a$ 为给定连续时间系统 Σ_c 的一个不变零点, 具有重数结构

$$S_a^*(\Sigma_c) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}, \quad (7.2.27)$$

则离散时间系统 Σ_d 有一个无限零点结构(阶次高于 0)

$$S_{\infty}^*(\Sigma_d) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}. \quad (7.2.28)$$

6. 几何子空间的映射满足:

$$(a) \mathcal{V}^+(\Sigma_c) = \mathcal{S}^-(\Sigma_d)$$

$$(b) \mathcal{S}^+(\Sigma_c) = \mathcal{V}^-(\Sigma_d)$$

证明 见第 7.4 节。 ■

我们有下面两个有趣的推论, 第一个是关于 Σ_d 的最小和非最小相位特性; 第二个是当采样周期 T 趋向于零时(或等价地当 $a \rightarrow \infty$ 时), Σ_d 的渐近性质。

推论 7.2.1 考虑一个连续时间系统 Σ_c 和在双线性变换(7.2.3)下所对应的离散时间系统 Σ_d , 则根据定理 7.2.1 中的 4(a) 和 4(b), 有

1. Σ_d 的所有不变零点都在单位圆内, 当且仅当 Σ_c 的所有不变零点都在开左半平面, 并且没有阶次高于 0 的无限零点。

2. Σ_d 在单位圆上有不变零点, 当且仅当 Σ_c 在虚轴上有不变零点, 和/或 Σ_c 至少有一个阶次高于 0 的无限零点。

3. Σ_d 在单位圆外有不变零点, 当且仅当 Σ_c 在开右半平面有不变零点。

推论 7.2.2 考虑连续时间系统 Σ_c 和在双线性变换(7.2.3)下所对应的离散时间系

统 Σ_d , 则根据定理 7.2.1, 当采样周期 T 趋于零(但是不为零)时, Σ_d 有以下的渐近特性:

1. Σ_d 没有高于 0 阶的无限零点, 即从输入到输出没有延迟。

2. 如果 Σ_c 具有任何高于 0 阶的无限零点, 则 Σ_d 在 $z=-1$ 有一个具有适当重数结构的不变零点。

3. 如果 Σ_d 还有剩余的不变零点的话, 则趋向于 $z=1$ 点。有趣的是, 和 Σ_c 的稳定的不变零点相对应的 Σ_d 的不变零点总是稳定的, 并从单位圆内趋向于 $z=1$ 点。反过来, 和 Σ_c 的不稳定的不变零点相对应的 Σ_d 的不变零点总是不稳定的, 并且从单位圆外趋向 $z=1$ 点。最后, Σ_c 的虚轴上的不变零点总是被映射到单位圆上, 趋向 $z=1$ 点。

下面的例子演示了定理 7.2.1 的结果。

例 7.2.1 考虑一个连续时间系统 Σ_c , 四元组 (A, B, C, D) 为

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad (7.2.29)$$

和

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad D = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (7.2.30)$$

我们注意到, 上面的系统 Σ_c 已经是定理 5.4.1 的特殊坐标基(SCB)的形式了, 而且 Σ_c 是可控、可观和可逆的, 有一个 0 阶的无限零点和一个 2 阶的无限零点, 即 $S_\infty^*(\Sigma_c) = \{2\}$ 。系统 Σ_c 在 $s=2$ 和 $s=1$ 分别有两个不变零点, 具有结构 $S_2^*(\Sigma_c) = \{1\}$ 和 $S_1^*(\Sigma_c) = \{3\}$ 。

1. 如果 $a=1$, 我们得到一个离散时间系统 Σ_d , 由矩阵四元组 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 表示, 其中

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\tilde{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{D} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right].$$

利用[87]的工具箱, 我们发现, Σ_d 确实是可控、可观和可逆的, 有一个 0 阶的无限零点和一个 3 阶的无限零点, 即 $S_\infty^*(\Sigma_d) = \{3\}$ 。 Σ_d 在 $z=-3$ 和 $z=-1$ 也分别有两个不变零点, 具有结构 $S_3^*(\Sigma_d) = \{1\}$ 和 $S_1^*(\Sigma_d) = \{2\}$ 。

2. 如果 $a=2$, 我们得到另一个离散时间系统 Σ_d ,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ -5 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

这个系统是可控、可观和可逆的, 有一个 0 阶的无限零点和一个 1 阶的无限零点, 即 $S_{\infty}^*(\Sigma_d) = \{1\}$ 。它在 $z=3$ 和 $z=-1$ 也分别有两个不变零点, 具有结构 $S_3^*(\Sigma_d) = \{3\}$ 和 $S_{-1}^*(\Sigma_d) = \{2\}$, 这与定理 7.2.1 的结果相符。

7.3 离散时间系统到连续时间系统的映射

我们在这一节里给出和前一节相类似的结果, 不同的是采用逆双线性变换, 把离散时间系统映射到一个连续时间系统。我们从离散时间线性时不变系统 $\tilde{\Sigma}_d$ 开始, 表示为

$$\tilde{\Sigma}_d : \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k), \\ y(k) = \tilde{C}x(k) + \tilde{D}u(k), \end{cases} \quad (7.3.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 和 \tilde{D} 是具有适当维数的矩阵。不失一般性, 假设 $[\tilde{C} \quad \tilde{D}]$ 和 $[\tilde{B}' \quad \tilde{D}']$ 都是满秩的矩阵, Σ_d 有传递函数

$$H_d(z) = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}. \quad (7.3.2)$$

式(7.3.2)所示的逆双线性变换可以用

$$z = \frac{a+s}{a-s} \quad (7.3.3)$$

来代替 z 而得到, 即

$$H_c(s) = \tilde{C} \left(\frac{a+s}{a-s} I - \tilde{A} \right)^{-1} \tilde{B} + \tilde{D}. \quad (7.3.4)$$

下面的引理和引理 7.2.1 相类似, 给出了 $H_c(s)$ 的状态空间实现。

引理 7.3.1 在逆双线性变换(7.3.3)下, 式(7.3.1)所描述的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_d$ 被映射为连续时间系统 $H_c(s)$, 它的状态空间实现为

$$\tilde{\Sigma}_c : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (7.3.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= a(\tilde{A} + I)^{-1}(\tilde{A} - I), \\ B &= \sqrt{2a}(\tilde{A} + I)^{-1}\tilde{B}, \\ C &= \sqrt{2a}\tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-1}, \\ D &= \tilde{D} - \tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-1}\tilde{B}, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.6)$$

或

$$\left. \begin{aligned} A &= a(\tilde{A} + I)^{-1}(\tilde{A} - I), \\ B &= 2a(\tilde{A} + I)^{-2}\tilde{B}, \\ C &= \tilde{C}, \\ D &= \tilde{D} - \tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-1}\tilde{B}, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.7)$$

或

$$\left. \begin{aligned} A &= a(\tilde{A} + I)^{-1}(\tilde{A} - I), \\ B &= \tilde{B}, \\ C &= 2a\tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-2}, \\ D &= \tilde{D} - \tilde{C}(\tilde{A} + I)^{-1}\tilde{B}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.8)$$

很显然,我们假设 \tilde{A} 在 -1 没有特征值。

下面的定理类似于定理 7.2.1。

定理 7.3.1 考虑式(7.3.1)所描述的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_d$,用四元组 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 来表示,其中矩阵 \tilde{A} 在 -1 没有特征值。在逆双线性变换(7.3.3)下,等价的连续时间系统(7.3.5)的 $\tilde{\Sigma}_c$ 由式(7.3.6)所示的四元组 (A, B, C, D) 表示。我们有下面的特性:

1. $\tilde{\Sigma}_c$ 的可控(可镇定)性和可观(可检测)性:

(a) (A, B) 对是可控(可镇定)的,当且仅当 (\tilde{A}, \tilde{B}) 对是可控(可镇定)的。

(b) (A, C) 对是可观(可检测)的,当且仅当 (\tilde{A}, \tilde{C}) 是可观(可检测)的。

2. 非奇异状态、输出和输入变换,以及状态反馈和输出馈入律下的结果:

(a) 对任何非奇异状态、输出和输入变换 T_s, T_o 和 T_i , 四元组

$$(T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i, T_o^{-1}CT_s, T_o^{-1}DT_i) \quad (7.3.9)$$

是离散时间系统

$$(T_s^{-1}\tilde{A}T_s, T_s^{-1}\tilde{B}T_i, T_o^{-1}\tilde{C}T_s, T_o^{-1}\tilde{D}T_i) \quad (7.3.10)$$

在逆双线性变换(7.3.3)下所对应的连续时间系统。

(b) 对任何使得 $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ 在 -1 没有特征值的 $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,定义一个非奇异矩阵

$$T_i := I - \tilde{F}(I + \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})^{-1}\tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (7.3.11)$$

和一个定常矩阵

$$F := \sqrt{2a}\tilde{F}(I + \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (7.3.12)$$

则在逆双线性变换(7.3.3)下,由

$$(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}, \tilde{B}, \tilde{C} + \tilde{D}\tilde{F}, \tilde{D}) \quad (7.3.13)$$

所表示的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_{df}$ 被映射到由

$$(A + BF, BT_i, C + DF, DT_i) \quad (7.3.14)$$

所表示的连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_{cf}$ 。注意到 $\tilde{\Sigma}_{df}$ 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 在增益矩阵 \tilde{F} 为状态反馈律下所形成的闭环系统; $\tilde{\Sigma}_{df}$ 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 在增益矩阵 F 为状态反馈律,以及非奇异输入变换 T_i 下所形成的闭环系统。

(c) 对任何使得 $\tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C}$ 在 -1 没有特征值的 $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times p}$,定义一个非奇异矩阵

$$T_o := [I - \tilde{C}(I + \tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C})^{-1}\tilde{K}]^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad (7.3.15)$$

和一个定常矩阵

$$K := \sqrt{2a}(I + \tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C})^{-1}\tilde{K}. \quad (7.3.16)$$

则在逆双线性变化(7.3.3)下,由

$$(\tilde{A} + \tilde{K}\tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{K}\tilde{D}, \tilde{C}, \tilde{D}) \quad (7.3.17)$$

所表示的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_{dk}$ 被映射到由

$$(A + KC, B + KD, T_o^{-1}C, T_o^{-1}D), \quad (7.3.18)$$

所表示的连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_{ck}$ 。我们注意到 $\tilde{\Sigma}_{dk}$ 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 在增益矩阵 \tilde{K} 为输出馈入律下所形成的闭环系统; $\tilde{\Sigma}_{ck}$ 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 在增益矩阵 K 为输出馈入律,以及非奇异输出变换 T_o 下所形成的闭环系统。

3. $\tilde{\Sigma}_c$ 的可逆和结构不变指数 \mathbf{I}_2 和 \mathbf{I}_3 列:

(a) $\mathbf{I}_2(\tilde{\Sigma}_c) = \mathbf{I}_2(\tilde{\Sigma}_d)$ 和 $\mathbf{I}_3(\tilde{\Sigma}_c) = \mathbf{I}_3(\tilde{\Sigma}_d)$ 。

(b) $\tilde{\Sigma}_c$ 是左(右)可逆的,当且仅当 $\tilde{\Sigma}_d$ 是左(右)可逆的。

(c) $\tilde{\Sigma}_c$ 是(不是)可逆的,当且仅当 $\tilde{\Sigma}_d$ 是(不是)可逆的。

4. $\tilde{\Sigma}_c$ 的不变零点和它们的结构由以下两部分组成:

(a) 令 $\tilde{\Sigma}_d$ 的无限零点结构(阶次大于0)为

$$S_\infty^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}, \quad (7.3.19)$$

则 $s=a$ 是 $\tilde{\Sigma}_c$ 的一个不变零点,具有重数结构

$$S_a^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}. \quad (7.3.20)$$

(b) 令 $z=\alpha \neq -1$ 是 $\tilde{\Sigma}_d$ 的一个不变零点,具有重数结构

$$S_a^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}, \quad (7.3.21)$$

则 $s = \beta = a \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 是连续时间系统 $\tilde{\Sigma}_c$ 的一个不变零点, 具有重数结构

$$S_\beta^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{n_{a,1}, n_{a,2}, \dots, n_{a,\tau_a}\}. \quad (7.3.22)$$

5. $\tilde{\Sigma}_c$ 的无限零点结构由下面两个部分组成:

(a) 令 $m_0 = \text{rank}(\tilde{D})$, 令 m_d 为 $\tilde{\Sigma}_d$ 高于 0 阶的无限零点总数, 同时令 τ_{-1} 为 $\tilde{\Sigma}_d$ 在不变零点 $z = -1$ 处的几何重数, 则有 $\text{rank}(D) = m_0 + m_d - \tau_{-1}$.

(b) 令 $z = -1$ 为给定离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_d$ 的一个不变零点, 具有重数结构

$$S_{-1}^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{n_{-1,1}, n_{-1,2}, \dots, n_{-1,\tau_{-1}}\}, \quad (7.3.23)$$

则 $\tilde{\Sigma}_c$ 有一个无限零点(高于 0 阶)结构

$$S_\infty^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{n_{-1,1}, n_{-1,2}, \dots, n_{-1,\tau_{-1}}\}. \quad (7.3.24)$$

6. 几何子空间的映射满足:

$$(a) \mathcal{V}^-(\tilde{\Sigma}_d) = \mathcal{S}^+(\tilde{\Sigma}_c)$$

$$(b) \mathcal{S}^-(\tilde{\Sigma}_d) = \mathcal{V}^+(\tilde{\Sigma}_c)$$

证明 类似于定理 7.2.1 的证明. ■

我们用下面的例子来演示上面的结果.

例 7.3.1 考虑离散时间线性时不变系统 $\tilde{\Sigma}_d$, 其矩阵四元组 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.3.25)$$

和

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.3.26)$$

同样, 上面的系统已经是结构分解的形式了. 很容易验证, $\tilde{\Sigma}_d$ 是可控、可观和退化的, 即既不是左可逆, 也不是右可逆. 有两个 1 阶的无限零点, 即 $S_\infty^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{1, 1\}$, $\mathbf{I}_2(\tilde{\Sigma}_d) = \{1\}$ 和 $\mathbf{I}_3(\tilde{\Sigma}_d) = \{1\}$. 它也有一个不变零点在 $z = -1$, 结构为 $S_{-1}^*(\tilde{\Sigma}_d) = \{1, 2\}$. 应用引理 7.3.1 的结果(其中 $a = 1$)可得 $\tilde{\Sigma}_c$ 的 (A, B, C, D) 表示为

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用[87]的软件工具箱,很容易验证 $\tilde{\Sigma}_c$ 是可控、可观和退化的,具有无限零点结构 $S_\infty^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{1, 2\}$, $I_2(\tilde{\Sigma}_c) = \{1\}$ 和 $I_3(\tilde{\Sigma}_c) = \{1\}$ 。而且, $\tilde{\Sigma}_c$ 在 $s=1$ 有一个不变零点,具有结构 $S_1^*(\tilde{\Sigma}_c) = \{1, 1\}$,和定理 7.3.1 的结果相符。

最后,在结束这一节的时候,我们在图 7.3.1 中用图形的方式来总结在双线性变换和逆双线性变换下的结构映射关系。

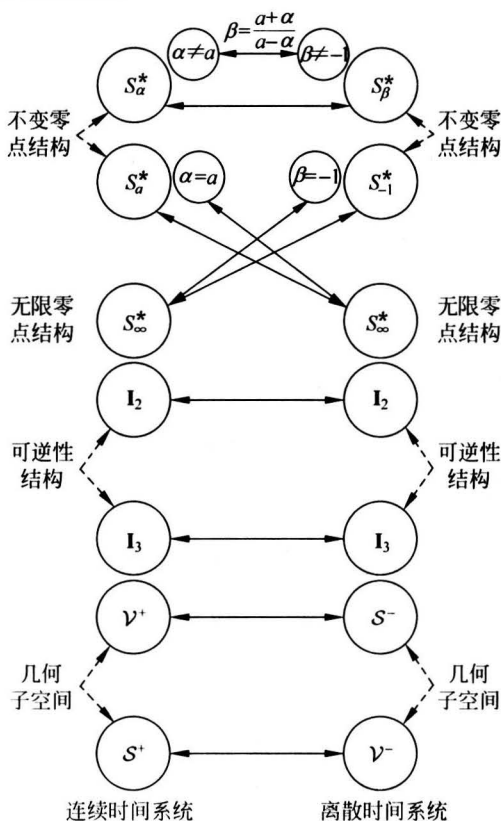


图 7.3.1 双线性变换下的结构映射

7.4 定理 7.2.1 的证明

我们在这一节中要给出定理 7.2.1 的详细证明。为了叙述简便和不失一般性,在整个证明中都假设式(7.2.3)中的常数 a 为 1,即 $a=2/T=1$ 。我们将逐项证明这个定理。

1(a) 令 β 是 \tilde{A} 的一个特征值,即 $\beta \in \lambda(\tilde{A})$ 。如果 A 在 $a=1$ 处没有特征值,以及 $\alpha = (\beta-1)/(\beta+1)$ 是 A 的特征值,即 $\alpha \in \lambda(A)$,则很容易验证 $\beta \neq -1$ 。下面考虑矩阵束

$$\begin{aligned} [\beta I - \tilde{A} \quad \tilde{B}] &= [\beta I - (I-A)^{-1}(I+A) \quad \sqrt{2}(I-A)^{-1}B] \\ &= (I-A)^{-1}[\beta(I-A) - (I+A) \quad \sqrt{2}B] \\ &= (I-A)^{-1}[(\beta-1)I - (\beta+1)A \quad \sqrt{2}B] \\ &= (I-A)^{-1}[aI - A \quad B] \begin{bmatrix} (\beta+1)I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{2}I_m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

显然, $\text{rank}[\beta I - \tilde{A} \quad \tilde{B}] = \text{rank}[aI - A \quad B]$, 所以有 1(a) 的结果。

1(b) 和 1(a) 对偶。

2(a) 该项的证明很显然。

2(b) 根据引理 7.2.1, 由 $(A+BF, B, C+DF, D)$ 所表示的 $\tilde{\Sigma}_{\text{cf}}$ 在双线性变换下的离散时间系统 $\tilde{\Sigma}_{\text{df}}$ 由 $(\tilde{A}_F, \tilde{B}_F, \tilde{C}_F, \tilde{D}_F)$ 表示, 其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_F &= (I+A+BF)(I-A-BF)^{-1}, \\ \tilde{B}_F &= \sqrt{2}(I-A-BF)^{-1}B, \\ \tilde{C}_F &= \sqrt{2}(C+DF)(I-A-BF)^{-1}, \\ \tilde{D}_F &= D+(C+DF)(I-A-BF)^{-1}B. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.1)$$

首先回顾第 2 章中的矩阵恒等式, 即式(2.3.14)和式(2.3.15), 这在推导我们的结果中会经常被用到,

$$(I+XY)^{-1}X = X(I+YX)^{-1} \quad (7.4.2)$$

和

$$[I+X(sI-Z)^{-1}Y]^{-1} = I-X(sI-Z+YX)^{-1}Y. \quad (7.4.3)$$

接下来, 注意到

$$\begin{aligned} \tilde{A}_F &= (I+A+BF)(I-A-BF)^{-1} \\ &= (I+A+BF)(I-A)^{-1}[I-BF(I-A)^{-1}]^{-1} \\ &= [\tilde{A}+BF(I-A)^{-1}][I-BF(I-A)^{-1}]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\tilde{A} + BF(I-A)^{-1}][I + BF(I-A-BF)^{-1}] \\
&= \tilde{A} + \tilde{A}BF(I-A-BF)^{-1} + BF(I-A)^{-1}[I + BF(I-A-BF)^{-1}] \\
&= \tilde{A} + \tilde{A}BF(I-A-BF)^{-1} + BF(I-A)^{-1}(I-A)(I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{A} + \tilde{A}BF(I-A-BF)^{-1} + BF(I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{A} + (\tilde{A} + I)BF(I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{A} + 2(I-A)^{-1}BF(I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_F &= \sqrt{2}(I-A-BF)^{-1}B \\
&= \sqrt{2}[I - (I-A)^{-1}BF]^{-1}(I-A)^{-1}B \\
&= \sqrt{2}(I-A)^{-1}B[I - F(I-A)^{-1}B]^{-1} = \tilde{B}\tilde{T}_i.
\end{aligned}$$

同时有

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_F &= \sqrt{2}(C+DF)(I-A-BF)^{-1} \\
&= \sqrt{2}(C+DF)(I-A)^{-1}[I - BF(I-A)^{-1}]^{-1} \\
&= \sqrt{2}(C+DF)(I-A)^{-1}[I + BF(I-A-BF)^{-1}] \\
&= \sqrt{2}C(I-A)^{-1} + \sqrt{2}DF(I-A)^{-1} \\
&\quad + \sqrt{2}(C+DF)(I-A)^{-1}BF(I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{C} + \sqrt{2}[DF(I-A)^{-1}(I-A-BF) \\
&\quad + (C+DF)(I-A)^{-1}BF](I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{C} + \sqrt{2}[DF - DF(I-A)^{-1}BF + C(I-A)^{-1}BF + DF(I-A)^{-1}BF] \\
&\quad \times (I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{C} + [D + C(I-A)^{-1}B]\sqrt{2}F(I-A-BF)^{-1} \\
&= \tilde{C} + \tilde{D}\tilde{F}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_F &= D + (C+DF)(I-A-BF)^{-1}B \\
&= D + (C+DF)[I - (I-A)^{-1}BF]^{-1}(I-A)^{-1}B \\
&= D + (C+DF)(I-A)^{-1}B[I - F(I-A)^{-1}B]^{-1} \\
&= \{D[I - F(I-A)^{-1}B] + (C+DF)(I-A)^{-1}B\}\tilde{T}_i \\
&= \{D - DF(I-A)^{-1}B + C(I-A)^{-1}B + DF(I-A)^{-1}B\}\tilde{T}_i \\
&= \tilde{D}\tilde{T}_i.
\end{aligned}$$

这样就完成了 2(b) 的证明。

2(c) 这一项和 2(b) 是对偶的。

借助于特性 2(a)~2(c), 剩余部分的证明就相当简单了。众所周知, 在非奇异状态、输出和输入变换、状态反馈和输入馈入下, 与有限和无限零点结构以及可逆性严格对应的 Morse 指数列是不变的。所以, 我们可以对 $\tilde{\Sigma}_c$ 应用适当的非奇异状态、输出和输入变换, 以及状态反馈和输出馈入, 得到一个新的系统, 比如说是 Σ_c^* 。如果在双线性变换下, 这个新系统的离散时间系统是 Σ_d^* , 则根据特性 2(a)~2(c), Σ_d^* 和 Σ_d 具有同样的结构不变特性。所以在余下的证明中, 我们只需要证明 3(a)~6(b) 是 Σ_d^* 的特性就足够了。

我们首先对 Σ_c 应用非奇异状态、输出和输入变换 Γ_s 、 Γ_o 和 Γ_i , 使得变换后的系统是定理 5.4.1 的特殊坐标基 (SCB) 形式, 或等价地是式 (5.4.21)~式 (5.4.24) 的简明形式, 其中 A_{aa} 和 C_{0a} 由式 (5.4.29) 给出, E_{da} 和 E_{ca} 由式 (5.4.30) 给出, B_{a0} 、 L_{ab} 和 L_{ad} 由式 (5.4.32) 给出。进一步假设 A_{aa} 已经是式 (2.3.39) 和式 (5.4.34) 的 Jordan 形, 矩阵 A_{aa} 、 L_{ad} 、 B_{a0} 、 E_{da} 、 C_{0a} 、 E_{ca} 和 L_{ab} 有如下的划分:

$$\begin{aligned} A_{aa} &= \begin{bmatrix} A_{aa}^a & 0 \\ 0 & A_{aa}^* \end{bmatrix}, & L_{ad} &= \begin{bmatrix} L_{ad}^a \\ L_{ad}^* \end{bmatrix}; \\ B_{a0} &= \begin{bmatrix} B_{a0}^a \\ B_{a0}^* \end{bmatrix}, & L_{ab} &= \begin{bmatrix} L_{ab}^a \\ L_{ab}^* \end{bmatrix}, \\ E_{da} &= [E_{da}^a \quad E_{da}^*], & C_{0a} &= [C_{0a}^a \quad C_{0a}^*], & E_{ca} &= [E_{ca}^a \quad E_{ca}^*], \end{aligned}$$

其中, 矩阵 A_{aa}^a 的特征值都在 $a=1$, 即

$$A_{aa}^a = I + \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{a,1}-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{n_{a,r_a}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.4.4)$$

A_{aa}^* 包含了 Σ_c 的剩余不变零点。进一步地假设 (A_{cc}, B_c) 已具定理 4.4.1 的可控结构分解形式, (A_{bb}, C_b) 已具定理 4.3.1 的可观结构分解形式。下面定义一个状态反馈增益矩阵

$$F = -\Gamma_i \begin{bmatrix} C_{0a}^a - C_2^a & C_{0a}^* & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ E_{da}^a - C_1^a & E_{da}^* & E_{db} & E_{dc} & E_{dd} \\ E_{ca}^a & E_{ca}^* & 0 & E_{cc} & 0 \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1}$$

和一个输出馈入增益矩阵

$$K = -\Gamma_o \begin{bmatrix} B_{a0}^a - B_2^a & L_{ad}^a - B_1^a & L_{ab}^a \\ B_{a0}^* & L_{ad}^* & L_{ab}^* \\ B_{b0} & L_{bd} & L_{bb} \\ B_{c0} & L_{cd} & L_{cb} \\ B_{d0} & L_{dd} & 0 \end{bmatrix} \Gamma_o^{-1}$$

这里, E_{cc} 的选择是要抵消 (A_{cc}, B_c) 的可控结构分解中的所有 \star , 即

$$A_{cc}^* := A_{cc} - B_c E_{cc}$$

是所有对角元素为 0 的 Jordan 形。与此类似, L_{bb} 的选择是要使得

$$A_{bb}^* := A_{bb} - L_{bb} C_b',$$

为所有对角元素为 0 的 Jordan 形。同样地, E_{dd} 和 L_{dd} 的选择是要使得

$$A_{dd}^* := A_{dd} - L_{dd} C_d - B_d E_{dd}$$

为所有对角元素为 0 的 Jordan 形, 这又意味着

$$C_d (I - A_{dd}^*)^{-1} B_d = I_{m_d}. \quad (7.4.5)$$

矩阵 B_1^a, B_2^a, C_1^a 和 C_2^a 的选择是要符合式(7.4.4)中 A_{aa}^a 的要求, 即

$$B^a := [B_2^a \quad B_1^a] := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.4.6)$$

和

$$C^a := \begin{bmatrix} C_2^a \\ C_1^a \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.7)$$

这总是可以实现的, 因为已经假设矩阵 A 在 $a = 1$ 处没有特征值, 这意味着 Σ_c 在不变零点 $a = 1$ 处是可控和可观的。

最后, 我们得到由四元组 (A^*, B^*, C^*, D^*) 所表示的连续时间系统 Σ_c^* , 其中

$$\begin{aligned} A^* &= P^{-1} \Gamma_s^{-1} (A + BF + KC + KDF) \Gamma_s P \\ &= \begin{bmatrix} A_{aa}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{bb}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{cc}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd}^* & B_d C_1^a \\ 0 & 0 & 0 & B_1^a C_d & A_{aa}^a + B_2^a C_2^a \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

$$B^* = P^{-1} \Gamma_s^{-1} (B + KD) \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_c \\ 0 & B_d & 0 \\ B_2^a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4.9)$$

$$C^* = \Gamma_0^{-1}(C + DF)\Gamma_s P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_2^a \\ 0 & 0 & 0 & C_d & 0 \\ 0 & C_b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.10)$$

和

$$D^* = \Gamma_0^{-1}D\Gamma_i = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4.11)$$

其中, P 是置换矩阵, 把 A_{aa}^* 从它原来位置的(1,1)块变得到式(7.4.8)中的(5,5)块。

下面定义一个子系统 (A_s, B_s, C_s, D_s) , 其中

$$A_s := \begin{bmatrix} A_{dd}^* & B_d C_1^a \\ B_1^a C_d & A_{aa}^* + B_2^a C_2^a \end{bmatrix}, \quad B_s := \begin{bmatrix} 0 & B_d \\ B_2^a & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4.12)$$

和

$$C_s := \begin{bmatrix} 0 & C_2^a \\ C_d & 0 \end{bmatrix}, \quad D_s := \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.4.13)$$

很容易验证, 如同式(7.4.6)和式(7.4.7)那样选择 B^a 和 C^a , 可使 A_s 没有特征值在 $a=1$ 。因为 A_{bb}^* 和 A_{cc}^* 的全部特征值在 0, A_{aa}^* 只包含 Σ_c 的不变零点, 不在 $a=1$, 所以 A^* 也没有特征值在 $a=1$ 。对 Σ_c^* 应用双线性变换(7.2.3), 根据引理 7.2.1 的结果, 我们得到离散时间系统 Σ_c^* , 由四元组 $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*, \tilde{D}^*)$ 表示, 其中

$$\tilde{A}^* = \begin{bmatrix} (I + A_{aa}^*)(I - A_{aa}^*)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (I + A_{bb}^*)(I - A_{bb}^*)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I + A_{cc}^*)(I - A_{cc}^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I + A_s)(I - A_s)^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.4.14)$$

$$\tilde{B}^* = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (I - A_{cc}^*)^{-1} B_c \\ (I - A_s)^{-1} B_s & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4.15)$$

$$\tilde{C}^* = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_s (I - A_s)^{-1} \\ 0 & C_b (I - A_s)^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.16)$$

和

$$\tilde{D}^* = \begin{bmatrix} D_s + C_s (I - A_s)^{-1} B_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.4.17)$$

下一个任务是找到适当的变换、状态反馈和输出馈入律, 以便把上面的系统变换到特殊坐

标系下,从而显示定理的 3(a)~6(b)的特性。

为了叙述简便,首先关注子系统 $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$,其中

$$\tilde{A}_s := (I + A_s)(I - A_s)^{-1}, \quad \tilde{B}_s := \sqrt{2}(I - A_s)^{-1}B_s \quad (7.4.18)$$

和

$$\tilde{C}_s := \sqrt{2}C_s(I - A_s)^{-1}, \quad \tilde{D}_s := D_s + C_s(I - A_s)^{-1}B_s. \quad (7.4.19)$$

利用式(7.4.5)和式(2.3.19),很容易计算

$$(I - A_s)^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & (I - A_{dd}^*)^{-1}B_d C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1} \\ [(I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a C_d (I - A_{dd}^*)^{-1}] & (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1} \end{bmatrix},$$

其中

$$X_1 = (I - A_{dd}^*)^{-1} + (I - A_{dd}^*)^{-1}B_d C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a C_d (I - A_{dd}^*)^{-1},$$

所以

$$\tilde{A}_s = \begin{bmatrix} X_2 & 2(I - A_{dd}^*)^{-1}B_d C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1} \\ 2(I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a C_d (I - A_{dd}^*)^{-1} & (I + A_{aa} + B^a C^a)(I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (7.4.20)$$

其中

$$X_2 = (I + A_{dd}^*)(I - A_{dd}^*)^{-1} + 2(I - A_{dd}^*)^{-1}B_d C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a C_d (I - A_{dd}^*)^{-1},$$

$$\tilde{B}_s = \sqrt{2} \begin{bmatrix} (I - A_{dd}^*)^{-1}B_d C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_2^a & (I - A_{dd}^*)^{-1}B_d [I + C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a] \\ (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_2^a & (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_s = \sqrt{2} \begin{bmatrix} C_2^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a C_d (I - A_{dd}^*)^{-1} & C_2^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1} \\ [I + C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a]C_d (I - A_{dd}^*)^{-1} & C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1} \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{D}_s = \begin{bmatrix} I + C_2^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_2^a & C_2^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a \\ C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_2^a & I + C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a \end{bmatrix}.$$

注意到式(7.4.4)中 A_{aa} 、式(7.4.6)和式(7.4.7)中 B^a 和 C^a 的结构,我们有

$$(I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -I_{n_{a,1}-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -I_{n_{a,\tau_a}-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4.21)$$

$$C_1^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_2^a = 0, \quad C_2^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B_1^a = 0$$

和

$$C^a (I - A_{aa} - B^a C^a)^{-1}B^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{\tau_a} \end{bmatrix}.$$

因此, \tilde{B}_s 、 \tilde{C}_s 和 \tilde{D}_s 变成了下面的形式:

$$\tilde{B}_s = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & (I - A_{dd}^*)^{-1} B_d [I + C_1^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_1^a] \\ (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_2^a & (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_1^a \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_s = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & C_2^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_1^a \\ [I + C_1^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_1^a] C_d (I - A_{dd}^*)^{-1} & C_1^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_1^a \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{D}_s = \begin{bmatrix} I + C_2^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_2^a & 0 \\ 0 & I + C_1^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_1^a \end{bmatrix}.$$

下面定义

$$\tilde{F}_s := \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C_d (I - A_{dd}^*)^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{K}_s := \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -(I - A_{dd}^*)^{-1} B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此可得

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sc} &= \tilde{A}_s + \tilde{B}_s \tilde{F}_s + \tilde{K}_s \tilde{C}_s + \tilde{K}_s \tilde{D}_s \tilde{F}_s \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa}^{**} & 0 \\ 0 & (I + A_{aa}^a + B^a C^a)(I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{A}_{aa}^{**} := (I + A_{dd}^*) (I - A_{dd}^*)^{-1} - 2(I - A_{dd}^*)^{-1} B_d C_d (I - A_{dd}^*)^{-1}, \quad (7.4.22)$$

$$\tilde{B}_{sc} = \tilde{B}_s + \tilde{K}_s \tilde{D}_s = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_2^a & (I - A_{aa}^a - B^a C^a)^{-1} B_1^a \end{bmatrix},$$

和

$$\tilde{C}_{sc} = \tilde{C}_s + \tilde{D}_s \tilde{F}_s = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & C_2^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a) - 1 \\ 0 & C_1^a (I - A_{aa}^a - B^a C^a) - 1 \end{bmatrix}.$$

重新对式(7.4.6)和式(7.4.7)中的 B^a 和 C^a 划分如下:

$$B^a = [0 \quad \tilde{B}_a] \text{ 和 } C^a = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_a \end{bmatrix},$$

其中, \tilde{B}_a 和 \tilde{C}_a 都是最大秩的。因此可得

$$\tilde{A}_{sc} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa}^{**} & 0 \\ 0 & (I + A_{aa}^a + \tilde{B}_a \tilde{C}_a)(I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_{sc} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1} \tilde{B}_a \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{C}_{sc} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_a (I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{sc} = \tilde{D}_s = \begin{bmatrix} I_{m_0+m_d-\tau_a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

利用式(7.4.4)和式(7.4.21),简单地推导就可以得到

$$\begin{aligned} & (I + A_{aa}^a + \tilde{B} \tilde{C})(I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2I_{n_{a,1-1}} & 0 \end{bmatrix} - I_{n_{a,1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2I_{n_{a,\tau_a}} & 0 \end{bmatrix} - I_{n_{a,\tau_a}} \end{bmatrix}, \\ & (I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1} \tilde{B}_a = - \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

和

$$\tilde{C}_a (I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

而且很容易验证,每一个由 $(\tilde{A}_{ai}, \tilde{B}_{ai}, \tilde{C}_{ai})$, $i=1, 2, \dots, \tau_a$ 所表示的子系统,其中

$$\tilde{A}_{ai} = -I_{n_{a,i}} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2I_{n_{a,i-1}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{ai} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_{ai} = [0 \quad -1],$$

具有特性

$$\tilde{C}_{ai} \tilde{B}_{ai} = \tilde{C}_{ai} \tilde{A}_{ai} \tilde{B}_{ai} = \cdots = \tilde{C}_{ai} (\tilde{A}_{ai})^{n_{a,i}-2} \tilde{B}_{ai} = 0$$

和

$$\tilde{C}_{ai} (\tilde{A}_{ai})^{n_{a,i}-1} \tilde{B}_{ai} \neq 0.$$

根据定理 5.4.1,存在非奇异变换 Γ_{sa} 、 Γ_{oa} 和 Γ_{ia} ,使得

$$\tilde{A}_d = \Gamma_{sa}^{-1} [(I + A_{aa}^a + \tilde{B}_a \tilde{C}_a)(I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1}] \Gamma_{sa}$$

$$= \begin{bmatrix} \star & I_{n_{a,1}-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \star & \star & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \star & I_{n_{a,r_a}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}, \quad (7.4.23)$$

$$\tilde{B}_d = \Gamma_{sa}^{-1} [(I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1} \tilde{B}_a] \Gamma_{sa} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.24)$$

和

$$\tilde{C}_d = \Gamma_{sa}^{-1} [\tilde{C}_a (I - A_{aa}^a - \tilde{B}_a \tilde{C}_a)^{-1}] \Gamma_{sa} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.4.25)$$

现在回到由 $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*, \tilde{D}^*)$ 所表示的 Σ_d^* , 就是式(7.4.14) ~ 式(7.4.17)。利用刚才得到的子系统 $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ 的特性, 可以定义适当的状态反馈和输出馈入增益矩阵, 比如 \tilde{F}^* 和 \tilde{K}^* , 还有非奇异的状态、输出和输入变换 $\tilde{\Gamma}_s^*$ 、 $\tilde{\Gamma}_o^*$ 和 $\tilde{\Gamma}_i^*$, 使得

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{SCB}^* &:= (\tilde{\Gamma}_s^*)^{-1} (\tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{F}^* + \tilde{K}^* \tilde{C}^* + \tilde{K}^* \tilde{D}^* \tilde{F}^*) \tilde{\Gamma}_s^* \\ &= \begin{bmatrix} (I + A_{aa}^*) (I - A_{aa}^*)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (I + A_{bb}^*) (I - A_{bb}^*)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I + A_{cc}^*) (I - A_{cc}^*)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{aa}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_d \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

其中, \tilde{A}_{aa}^{**} 由式(7.4.22)给出, 以及

$$\tilde{B}_{SCB}^* := (\tilde{\Gamma}_s^*)^{-1} (\tilde{B}^* + \tilde{K}^* \tilde{D}^*) \tilde{\Gamma}_i^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I - A_{cc}^*)^{-1} B_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4.27)$$

$$\tilde{C}_{\text{SCB}}^* := (\tilde{\Gamma}_0^*)^{-1}(\tilde{C}^* + \tilde{D}^* \tilde{F}^*) \tilde{\Gamma}_s^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_b(I - A_{bb}^*)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_d \end{bmatrix} \quad (7.4.28)$$

和

$$\tilde{D}_{\text{SCB}}^* := (\tilde{\Gamma}_0^*)^{-1} \tilde{D}^* \tilde{\Gamma}_i^* = \begin{bmatrix} I_{m_0+m_d-r_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.4.29)$$

显然,由 $(\tilde{A}_{\text{SCB}}^*, \tilde{B}_{\text{SCB}}^*, \tilde{C}_{\text{SCB}}^*, \tilde{D}_{\text{SCB}}^*)$ 所表示的 Σ_{SCB}^* 和 Σ_d^* 具有同样的结构不变指数列,而 Σ_d^* 又和 Σ_d 具有同样的结构不变指数列。最为重要的是, Σ_{SCB}^* 是 SCB 的形式,我们现在可以证明定理的特性 3(a)~6(b)。

3(a) 首先注意到 $\mathbf{I}_2(\Sigma_d) = \mathbf{I}_2(\Sigma_{\text{SCB}}^*)$ 。根据式(7.4.26)~式(7.4.29)以及 SCB 的特性,我们知道 $\mathbf{I}_2(\Sigma_{\text{SCB}}^*)$ 由矩阵对

$$((I + A_{cc}^*)(I - A_{cc}^*)^{-1}, (I - A_{cc}^*)^{-1}B_c) \text{ 或 } ((I + A_{cc}^*)(I - A_{cc}^*)^{-1}, B_c)$$

的可控性指数给出。回顾 A_{cc}^* 和 B_c 的定义

$$A_{cc}^* = \begin{bmatrix} 0 & I_{l_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{l_{m_c}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

很容易验证

$$((I + A_{cc}^*)(I - A_{cc}^*)^{-1}, B_c)$$

的可控性指数也是由 $\{l_1, l_2, \dots, l_{m_c}\}$ 所给出的,所以 $\mathbf{I}_2(\Sigma_d) = \mathbf{I}_2(\Sigma_c)$ 。

同样, $\mathbf{I}_3(\Sigma_d) = \mathbf{I}_3(\Sigma_c)$ 的证明沿用同样的思路。

3(b)~3(c)直接从 3(a)中推出。

4(a) 根据 SCB 的特性, $\tilde{\Sigma}_{\text{SBC}}^*$,或等价地, Σ_d 的不变零点结构由 \tilde{A}_{aa}^{**} 和 $(I + A_{aa}^*) \cdot (I - A_{aa}^*)^{-1}$ 的特征值以及相关联的 Jordan 块给出。特性 4(a)相应于式(7.4.22)中 \tilde{A}_{aa}^{**} 的特征值,以及相关联的 Jordan 块。首先,注意到对任何 $z \in \mathbb{C}$,

$$zI - \tilde{A}_{aa}^{**} = [(z-1)I - (z+1)A_{dd}^* + 2(I - A_{dd}^*)^{-1}B_d C_d](I - A_{dd}^*)^{-1}. \quad (7.4.30)$$

回顾 A_{dd}^* 、 B_d 和 C_d 的定义

$$A_{dd}^* = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{q_1}-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{q_{m_d}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

可以证明

$$(z-1)I - (z+1)A_{dd}^* + 2(I - A_{dd}^*)^{-1}B_d C_d = \text{blkdiag}\{Q_1(z), \dots, Q_i(z)\},$$

其中, 对于 $i=1, 2, \dots, m_d$, $Q_i(z) \in \mathbb{C}^{n_{q_i} \times n_{q_i}}$ 为

$$Q_i(z) = \begin{bmatrix} z+1 & -(z+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & z-1 & -(z+1) & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & z-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & z-1 & -(z+1) \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z-1 \end{bmatrix} \quad (7.4.31)$$

根据式(7.4.30), \tilde{A}_{an}^{**} 的特征值是使得

$$\text{blkdiag}\{Q_1(z), Q_2(z), \dots, Q_{m_d}(z)\}$$

的秩降到 $n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i$ 之下的标量 z 。利用 $Q_i(z)$ 的特殊形式, 很显然, 在 $z \in \mathbb{C}$ 中能够使 $Q_i(z)$ 降秩的只有 $z = -1$ 。而且 $\text{rank}\{Q_i(-1)\} = n_{q_i} - 1$, 即 $Q_i(-1)$ 只有一个线性独立的特征矢量。因此 $z = -1$ 是 \tilde{A}_{an}^{**} 的特征值, 或等价地是 Σ_d 的不变零点, 具有重数结构

$$S_{-1}^*(\Sigma_d) = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\} = S_{\infty}^*(\Sigma_c),$$

所以 4(a) 得证。

4(b) 这一部分的无限零点结构对应了矩阵 $(I + A_{an}^*)(I - A_{an}^*)^{-1}$ 的不变零点。由于 A_{an}^* 是 Jordan 形, 可直接推出特性 4(b)。

5(a) 这一项的证明直接从式(7.4.29)来。

5(b) 从式(7.4.23)~式(7.4.25)中的 $(\tilde{A}_d, \tilde{B}_d, \tilde{C}_d)$ 的结构, 以及 SCB 的性质 5.4.4, 可以推出这一项。

6(a)~6(b) 令系统(7.2.1)的状态空间为 \mathcal{X} ,按照 SCB 分解成的子系统为

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_a^+ \oplus \mathcal{X}_b \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d^- \quad (7.4.32)$$

进一步分解 \mathcal{X}_a^+ 为

$$\mathcal{X}_a^+ = \mathcal{X}_{a1}^+ \oplus \mathcal{X}_{a*}^+, \quad (7.4.33)$$

其中, \mathcal{X}_{a1}^+ 和式(7.2.1)在 $s=a=1$ 的不稳定零点的零点动态相关, \mathcal{X}_{a*}^+ 和式(7.2.1)剩余的不稳定零点动态相关。类似地,令变换后的系统(7.2.6)的状态空间为 $\tilde{\mathcal{X}}$,按照它的 SCB 分解的子系统为

$$\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}_a^- \oplus \tilde{\mathcal{X}}_a^0 \oplus \tilde{\mathcal{X}}_a^+ \oplus \tilde{\mathcal{X}}_b \oplus \tilde{\mathcal{X}}_c \oplus \tilde{\mathcal{X}}_d, \quad (7.4.34)$$

进一步分解 $\tilde{\mathcal{X}}_a^0$ 为

$$\tilde{\mathcal{X}}_a^0 = \tilde{\mathcal{X}}_{a1}^0 \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{a*}^0, \quad (7.4.35)$$

其中, $\tilde{\mathcal{X}}_{a1}^0$ 和式(7.2.6)在 $z=-1$ 的不变零点的零点动态相关, $\tilde{\mathcal{X}}_{a*}^0$ 和式(7.2.6)剩余的在单位圆上零点的零点动态相关。然后从上面关于 1(a)~5(b)的推导中,我们可以有以下在式(7.2.1)的 Σ_c 和式(7.2.6)的 Σ_d 的子系统之间的映射:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{X}_a^- &\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_a^- \\ \mathcal{X}_d &\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{a1}^0 \\ \mathcal{X}_a^0 &\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{a*}^0 \\ \mathcal{X}_{a*}^+ &\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_a^+ \\ \mathcal{X}_b &\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_b \\ \mathcal{X}_c &\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_c \\ \mathcal{X}_{a1}^+ &\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_d \end{aligned} \right\} \quad (7.4.36)$$

注意,在任意非奇异输出和输入变换下,以及状态反馈和输出馈入下,几何子空间 \mathcal{V}_x 和 \mathcal{S}_x 是不变的,我们有

$$\mathcal{V}^+(\Sigma_c) = \mathcal{X}_{a*}^+ \oplus \mathcal{X}_{a1}^+ \oplus \mathcal{X}_c = \tilde{\mathcal{X}}_a^+ \oplus \tilde{\mathcal{X}}_d \oplus \tilde{\mathcal{X}}_c = \mathcal{S}^-(\Sigma_d) \quad (7.4.37)$$

和

$$\mathcal{S}^+(\Sigma_c) = \mathcal{X}_a^- \oplus \mathcal{X}_a^0 \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_d = \tilde{\mathcal{X}}_a^- \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{a*}^0 \oplus \tilde{\mathcal{X}}_c \oplus \tilde{\mathcal{X}}_{a1}^0 = \mathcal{V}^-(\Sigma_d). \quad (7.4.38)$$

但是其他的几何子空间并没有以上清晰的映射关系。

这就完成了定理 7.2.1 的证明。 ■

7.5 练习

7.1 考虑一个连续时间系统 Σ_c ,

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

和

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u.$$

(a) 在双线性变换

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

下, 计算离散时间系统 Σ_d 。

(b) 利用线性系统工具箱, 对连续时间系统 Σ_c 计算几何子空间 \mathcal{V}^* 、 \mathcal{V}^- 、 \mathcal{V}^+ 、 \mathcal{S}^* 、 \mathcal{S}^- 、 \mathcal{S}^+ 、 \mathcal{R}^* 和 \mathcal{N}^* ; 对离散时间系统 Σ_d 计算子空间 \mathcal{V}^* 、 \mathcal{V}^- 、 \mathcal{V}^+ 、 \mathcal{S}^* 、 \mathcal{S}^- 、 \mathcal{S}^+ 、 \mathcal{R}^* 和 \mathcal{N}^* 。

(c) 验证 $\mathcal{V}^+(\Sigma_c) = \mathcal{S}^-(\Sigma_d)$ 和 $\mathcal{S}^+(\Sigma_c) = \mathcal{V}^-(\Sigma_d)$ 。评论其他子空间的关系。

7.2 证明推论 7.2.1 和推论 7.2.2。

7.3 考虑连续时间系统 Σ_c ,

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

和

$$y = Cx = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]x.$$

在双线性变换

$$s = a \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$$

下, 计算离散时间系统 Σ_d 的不变零点, 其中采样周期 $T = 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05$ 和 0.01 。通过在复平面上绘出离散时间系统的不变零点, 验证推论 7.2.2 的结果。

7.4 给定一个稳定的连续时间系统 Σ_c , 其传递函数为

$$G_c(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

在通常的双线性变换下, 得到离散时间系统 Σ_d , 且具有传递函数

$$G_d(z) = C\left(a\frac{z-1}{z+1}I - A\right)^{-1}B + D = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D},$$

其中 \tilde{A} 、 \tilde{B} 、 \tilde{C} 和 \tilde{D} 如引理 7.2.1 所给, 证明 Σ_d 是稳定的, 并且

$$\|G_d\|_\infty = \|G_c\|_\infty,$$

同时用一个例子来证明, 在通常情况下有

$$\|G_d\|_2 \neq \|G_c\|_2$$

提示: 参考第 2 章的 2.4 节关于连续时间系统和离散时间系统 H_2 范数和 H_∞ 范数的定义及计算。

7.5 考虑一个连续时间系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

另一个常用的离散化系统的方法是零阶保持变换(ZOH)。可以证明, 在采样周期为 T 的 ZOH 变换下, 等价的离散时间系统为

$$x(k+1) = A_z x(k) + B_z u(k), \quad y(k) = Cx(k) + Du(k),$$

其中

$$A_z = e^{AT}, \quad B_z = \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau\right)B.$$

令 $G_c(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 和 $G_z(z) = C(zI - A_z)^{-1}B_z + D$ 。通过一个例子证明, 通常有

$$\|G_c\|_2 \neq \|G_z\|_2 \quad \text{和} \quad \|G_c\|_\infty \neq \|G_z\|_\infty.$$

7.6 假设对练习 7.3 的连续时间系统采用 ZOH 变换的方法离散化。计算等价离散时间系统的不变零点, 其中 $T=0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05$ 和 0.01 。在复平面上绘出这些不变零点, 并加以讨论。

第 8 章 系统因子分解

8.1 导论

系统因子分解在文献资料中已经得到深入的研究和广泛的应用,如众所周知的内外因子分解和它的对偶形式,非最小相位系统的串级因子分解。最小相位/全通因子分解在一些应用中发挥了重要的作用,具有代表性的是奇异滤波(参见 Halevi 和 Palmor^[61], Shaked^[128])、低价(cheap)和奇异最优 LQ 控制(参见 Shaked^[129]),以及回路传递函数恢复(参见 Chen^[18], Saberi 等^[116], Zhang 和 Freudenberg^[159]),而它的对偶形式——内外因子分解,在解鲁棒和 H_∞ 控制问题时起着十分重要的作用(参见[54]和其中的参考文献)。从传统上看,谱因子分解技术可用于实现最小相位/全通因子分解(参见 Shaked 和 Soroka^[130], Soroka 和 Shaked^[134], Strintzis^[137], Tuel^[142])。Shaked^[127]对最小相位/全通因子分解在控制领域中的作用,以及现有的各种因子分解方法都做了很好的总结。内外因子分解在学术界也得到了很好的研究,有些文章是基于状态空间分解算法的,如 Chen 和 Francis^[35], Weiss^[148]导出了一类系统适用的算法。除此以外,我们也要引入具有一些重要应用的广义因子分解技术。特别是它经过修正以后,可以解决众所周知的零点配置问题,这将在第 9 章详细研究。本章内容以我们以前的研究工作为基础(即 Chen 等^[26], Lin 等^[88]和^[89]),在那里,我们利用本书前面章节的结构分解技术成功地对一般系统构造了上面提及的因子分解。

我们现在只考虑左可逆的非最小相位系统 Σ ,由矩阵四元组 (A, B, C, D) 来表示,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (8.1.1)$$

其中状态矢量 $x \in \mathbb{R}^n$, 输出矢量 $y \in \mathbb{R}^p$, 输入矢量 $u \in \mathbb{R}^m$ 。不失一般性,假设 $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 是最大秩的。 Σ 的传递函数为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (8.1.2)$$

对于最小相位/全通因子分解,要求给定系统 Σ 是可检测的。 $G(s)$ 的最小相位/全通因子分解表示为

$$G(s) = G_m(s)V(s), \quad (8.1.3)$$

其中, $G_m(s)$ 是左可逆和最小相位的,并且满足

$$G(s)G'(-s) = G_m(s)G_m'(-s), \quad (8.1.4)$$

其中, $V(s)$ 是满足

$$V(s)V'(-s) = I \quad (8.1.5)$$

的稳定和右可逆的全通因子。现在的问题就是构造矩阵 B_m 和 D_m , 使得由矩阵四元组 (A, B_m, C, D_m) 所表示的系统 Σ_m 具有特定的传递函数 $G_m(s)$, 而且 Σ_m 的不变零点由 Σ 的最小相位不变零点和 Σ 的非最小相位不变零点的镜像所组成。另一方面, 在回路传递函数恢复和其他的应用场合中, 如有限零点配置问题, 我们并不是真的需要 Σ 的最小相位映像, 我们所需要的是保持 Σ 的无限零点结构模型, 它的不变零点可以被适当地分配在开左半复平面的期望位置上。根据这些观点, 引入一个

$$G(s) = G_M(s)U(s) \quad (8.1.6)$$

的广义串级因子分解形式。这里的 $G_M(s)$ 是系统 Σ_M 的传递函数矩阵, 它和 Σ 具有同样的无限零点结构, 其不变零点都在期望位置和左可逆的最小相位系统。另一方面, $U(s)$ 是方的、稳定的、可逆的, 并在

$$U(s)U'(-s) \rightarrow I, \text{ 当 } |s| \rightarrow \infty \quad (8.1.7)$$

意义上是渐近全通的。

在前面已经提到, 内外因子分解实际上是最小相位/全通因子分解的对偶和一种特殊形式, 它只涉及稳定和正则系统。所以它要求式(8.1.1)给定的系统 Σ 的 A 的所有特征值都在 C^- 中。对偶地, 它要求 Σ 是可镇定的(而不是像最小相位/全通因子分解那样是可检测的)。内外因子分解可表示为

$$G(s) = G_i(s)G_o(s), \quad (8.1.8)$$

其中, $G_i(s)$ 是 $G(s)$ 的一个内因子, 即 $G_i(s)$ 是一个稳定和正则传递函数, 满足

$$G_i'(-s)G_i(s) = I, \quad (8.1.9)$$

$G_o(s)$ 是 $G(s)$ 的一个外因子, 即 $G_o(s)$ 是稳定和正则的, 有一个在 C^+ 中解析的右逆, 等价于 $G_o(s)$ 是右可逆的, 在 C^+ 中没有不变零点。

为了清晰起见和引用方便, 我们首先在 8.2 节中考虑给定系统是严格正则的情形, 而关于一般的非严格正则系统的结果, 在第 8.3 节中给出。最后, 我们注意到所有这些因子分解对离散时间系统是类似的, 这将在第 8.4 节予以论述。

8.2 严格正则系统

我们在这一节中考虑由式(8.1.1)给定的系统 Σ 是严格正则的情形, 即 $D=0$ 。对于最小相位/全通因子分解和广义串级因子分解, 假设 Σ 是左可逆的, 对于内外因子分解, 则假设 Σ 是右可逆的。对最小相位/全通因子分解和内外因子分解, 进一步假设 Σ 在虚轴上没有不变零点。这种情形的结果是很显然的, 在许多应用中是很有用的, 事实上, 在本章导论中所引述的大部分参考文献都处理这种特殊的系统类别。在下一节中, 我们将会

去除这些限制。

我们首先给出构造最小相位/全通因子分解的逐步构造算法。

FACT-SP 步骤 1

利用定理 5.3.1 的结果(也可见第 5 章第 5.4 节中特殊坐标基,即 SCB 的简明形式),找到非奇异变换 $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\Gamma_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和 $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$,使得给定系统 Σ ,即矩阵三元组 (A, B, C) 可被变换到特殊坐标基(SCB)的形式,具体地说就是

$$\tilde{A} = \Gamma_s^{-1} A \Gamma_s = \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & 0 & L_{ab}^+ C_b & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & A_{aa}^- & L_{ab}^- C_b & L_{ad}^- C_d \\ 0 & 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_a^+ & B_d E_a^- & B_d E_b & A_{dd} \end{bmatrix}, \quad (8.2.1)$$

$$\tilde{B} = \Gamma_s^{-1} B \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_d \end{bmatrix}, \quad (8.2.2)$$

$$\tilde{C} = \Gamma_o^{-1} C \Gamma_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & C_b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad B_d' B_d = I. \quad (8.2.3)$$

这里, $\lambda(A_{aa}^+) \subset \mathbb{C}^+$ 和 $\lambda(A_{aa}^-) \subset \mathbb{C}^-$ 分别是 Σ 的非最小相位和最小相位不变零点。我们也注意到,当 Σ 是可检测时, (A_{aa}^+, E_a^+) 是可观测的。

FACT-SP 步骤 2

求 Lyapunov 方程

$$(A_{aa}^+)' P + P A_{aa}^+ = (E_a^+)' \Gamma_i' \Gamma_i E_a^+ \quad (8.2.4)$$

的正定解,即 $P > 0$ 。因为 A_{aa}^+ 是不稳定的,并且 (A_{aa}^+, E_a^+) 是可观测的,所以这样的解总是存在的。接下来,计算

$$K_a^+ = P^{-1} (E_a^+)' \Gamma_i' \Gamma_i \quad (8.2.5)$$

和

$$B_m = \Gamma_s \tilde{B}_m \Gamma_i^{-1} = \Gamma_s \begin{bmatrix} K_a^+ \\ 0 \\ 0 \\ B_d \end{bmatrix} \Gamma_i^{-1}. \quad (8.2.6)$$

FACT-SP 步骤 3

定义 Σ_m 为矩阵三元组 (A, B_m, C) 所表示的系统,并且

$$V(s) = \Gamma_i [I - E_a^+ (sI - A_{aa}^+ + K_a^+ E_a^+)^{-1} K_a^+] \Gamma_i^{-1}. \quad (8.2.7)$$

现在已经完成了对 Σ 构造最小相位/全通因子分解过程。

我们有下面的定理。

定理 8.2.1 考虑式(8.1.1)所示的可检测、左可逆和非最小相位系统 Σ , 其中 $D=0$ 和所有的非最小相位不变零点都在 \mathbb{C}^+ , 则它的最小相位/全通因子分解为

$$G(s) = G_m(s)V(s), \quad (8.2.8)$$

其中, $V(s)$ 是如同式(8.2.7)所给的稳定的全通因子, $G_m(s)$ 是 Σ 的最小相位映像, 是由矩阵三元组 (A, B_m, C) 所表示的 Σ_m 的传递函数, B_m 如式(8.2.6)所给, 即

$$G_m(s) = C(sI - A)^{-1}B_m. \quad (8.2.9)$$

而且, Σ_m 是左可逆的, 和 Σ 有同样的无限零点结构, 它的传递函数满足

$$G_m(s)G'_m(-s) = G(s)G'(-s). \quad (8.2.10)$$

全通因子 $V(s)$ 满足 $V(s)V'(-s) = I$, 它的所有极点都是 Σ 的非最小相位零点的镜像。

证明 我们首先证明 $A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+$ 是个稳定的矩阵。通过检验式(8.2.4)和式(8.2.5), 有

$$A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+ = A_{aa}^+ - P^{-1}(E_a^+)' \Gamma_1' \Gamma_1 E_a^+ = P^{-1}(-A_{aa}^+)' P, \quad (8.2.11)$$

这表明, $A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+$ 的确是个稳定的矩阵。

接下来证明 Σ_m 是最小相位、左可逆的, 和 Σ 具有相同的无限零点结构。不失一般性, 假设 Σ 是第5章中定理5.3.1的SCB形式。对某些具有适当维数的子矩阵, 可把 Σ_m 重新写为

$$\dot{x}_a^+ = A_{aa}^+ x_a^+ + L_{ad}^+ y_d + L_{ab}^+ y_b + K_a^+ u,$$

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + L_{ad}^- y_d + L_{ab}^- y_b,$$

$$\dot{x}_b = A_{bb} x_b + L_{bd} y_d, \quad y_b = C_b x_b,$$

$$\dot{x}_d = A_{dd}^* x_d + L_d y_d + B_d [u + E_a^+ x_a^+ + E_a^- x_a^- + E_b x_b + E_d x_d], \quad y_d = C_d x_d,$$

现在来定义一个新的状态变量

$$x_a^m = x_a^+ - K_a^+ B_d' x_d. \quad (8.2.12)$$

因为 $B_d' B_d = I$, 不难验证

$$\begin{aligned} \dot{x}_a^m &= (A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+) x_a^m - K_a^+ E_a^- x_a^- + L_{ab}^+ y_b \\ &\quad - K_a^+ E_b x_b + (L_{ad}^+ - K_a^+ B_d' L_d) y_d \\ &\quad + (A_{aa}^+ K_a^+ B_d' - K_a^+ E_d - K_a^+ E_a^+ K_a^+ B_d' - K_a^+ B_d' A_{dd}) x_d \end{aligned}$$

和

$$\dot{x}_d = A_{dd}^* x_d + L_d y_d + B_d [u + E_a^+ x_a^m + E_a^- x_a^- + E_b x_b + (E_d + K_a^+ B_d) x_d].$$

现在根据第5章的定理5.3.1中SCB步骤8的证明, 存在一个非奇异的变换 T , 使得某些具有适当维数的矩阵 $L_{ad}^m, L_{ab}^m, E_b^m$ 和 E_d^m 有

$$\begin{pmatrix} x_a^m \\ x_a^- \\ x_b \\ x_d \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \bar{x}_a^m \\ x_a^- \\ x_b \\ x_d \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{x}}_a^m &= (A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+) \bar{x}_a^m - K_a^+ E_a^- x_a^- + L_{ad}^m y_d + L_{ab}^m y_b, \\
 \dot{x}_a^- &= A_{aa}^- x_a^- + L_{ad}^- y_d + L_{ab}^- y_b, \\
 \dot{x}_b &= A_{bb} x_b + L_{bd} y_d, \quad y_b = C_b x_b, \\
 \dot{x}_d &= A_{dd}^* x_d + L_d y_d + B_d [u + E_a^+ \bar{x}_a^m + E_a^- x_a^- + E_b^m x_b + E_d^m x_d], \\
 y_d &= C_d x_d,
 \end{aligned} \tag{8.2.13}$$

式(8.2.13)中的状态方程已经是定理 5.3.1 中的特殊坐标基(SCB)形式了。因此,根据第 5 章第 5.4 节中的特性可知, Σ_m 和 Σ 有同样的无限零点结构, Σ_m 是左可逆的,而且 Σ_m 的不变零点由

$$\lambda \begin{bmatrix} A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+ & -K_a^+ E_a^- \\ 0 & A_{aa}^- \end{bmatrix} \subset \mathbb{C}^- \tag{8.2.14}$$

所给出。所以, Σ_m 是非最小相位的。

下面证明 $V(s)V'(-s) = I$ 。根据 Woodbury 或 Sherman-Morrison-Woodbury 公式,即式(2.3.13)、式(8.2.4)和式(8.2.5),我们有

$$\begin{aligned}
 V^{-1}(s) &= \{ \Gamma_i [I - E_a^+ (sI - A_{aa}^+ + K_a^+ E_a^+)^{-1} K_a^+] \Gamma_i^{-1} \}^{-1} \\
 &= \Gamma_i [I + E_a^+ (sI - A_{aa}^+)^{-1} K_a^+] \Gamma_i^{-1} \\
 &= I + \Gamma_i E_a^+ (sI - A_{aa}^+)^{-1} P^{-1} (E_a^+)' \Gamma_i' \\
 &= I + \Gamma_i E_a^+ (sP - PA_{aa}^+)^{-1} (E_a^+)' \Gamma_i' \\
 &= I + \Gamma_i E_a^+ [sP + (A_{aa}^+)' P - (E_a^+)' \Gamma_i' \Gamma_i E_a^+]^{-1} (E_a^+)' \Gamma_i' \\
 &= I - \Gamma_i E_a^+ P^{-1} [-sI - (A_{aa}^+)' + (E_a^+)' (K_a^+)']^{-1} (E_a^+)' \Gamma_i' \\
 &= I - (\Gamma_i^{-1})' (K_a^+)' [(-sI - A_{aa}^+ + K_a^+ E_a^+)^{-1}]' (E_a^+)' \Gamma_i' \\
 &= (\Gamma_i^{-1})' \{ I - (K_a^+)' [(-sI - A_{aa}^+ + K_a^+ E_a^+)^{-1}]' (E_a^+)' \} \Gamma_i' \\
 &= V'(-s).
 \end{aligned}$$

注意, $V(s)$ 的极点是稳定矩阵 $-A_{aa}^+$ 的特征值, $V^{-1}(s)$ 的极点是 Σ 的非最小相位不变零点,即 $\lambda(A_{aa}^+)$ 。

现在可以证明 $G(s) = G_m(s)V(s)$ 了。定义

$$\tilde{\Phi} = (sI - \tilde{A})^{-1} = \begin{bmatrix} sI - A_{aa}^+ & 0 & -L_{ab}^+ C_b & -L_{ad}^+ C_d \\ 0 & sI - A_{aa}^- & -L_{ab}^- C_b & -L_{ad}^- C_d \\ 0 & 0 & sI - A_{bb} & -L_{bd} C_d \\ -B_d E_a^+ & -B_d E_a^- & -B_d E_b & sI - A_{dd} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_a^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = [E_a^+ \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

和

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} sI - A_{aa}^+ & 0 & -L_{ab}^+ C_b & -L_{ad}^+ C_d \\ 0 & sI - A_{aa}^- & -L_{ab}^- C_b & -L_{ad}^- C_d \\ 0 & 0 & sI - A_{bb} & -L_{bd} C_d \\ 0 & -B_d E_a^- & -B_d E_b & sI - A_{dd} \end{bmatrix}^{-1}.$$

根据式(8.2.2)、式(8.2.3)和式(8.2.6),很容易证明

$$\tilde{B}_m = \tilde{B} + K, \quad \tilde{\Phi} = (\hat{\Phi}^{-1} - \tilde{B}E)^{-1}$$

和

$$\tilde{C} \hat{\Phi} K = 0, \quad E \hat{\Phi} K = E_a^+ (sI - A_{aa}^+)^{-1} K_a^+.$$

因此

$$\begin{aligned} G(s)V^{-1}(s) &= \Gamma_o \tilde{C} \tilde{\Phi} \tilde{B} \tilde{\Gamma}_i^{-1} \Gamma_i [I + E_a^+ (sI - A_{aa}^+)^{-1} K_a^+] \Gamma_i^{-1} \\ &= \Gamma_o [\tilde{C} \tilde{\Phi} \tilde{B} + \tilde{C} (\hat{\Phi}^{-1} - \tilde{B}E)^{-1} \tilde{B}E \hat{\Phi} K] \Gamma_i^{-1} \\ &= \Gamma_o \{ \tilde{C} \tilde{\Phi} \tilde{B} + \tilde{C} [(\hat{\Phi}^{-1} - \tilde{B}E)^{-1} \hat{\Phi}^{-1} - I] \hat{\Phi} K \} \Gamma_i^{-1} \\ &= \Gamma_o (\tilde{C} \tilde{\Phi} \tilde{B} + \tilde{C} \hat{\Phi} K - \tilde{C} \hat{\Phi} K) \Gamma_i^{-1} \\ &= \Gamma_o \tilde{C} \tilde{\Phi} (\tilde{B} + K) \Gamma_i^{-1} \\ &= G_m(s). \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

这样就完成了定理 8.2.1 的证明。 ■

我们用下面的例子来演示上面的结果。

例 8.2.1 考虑一个方的和可逆的系统 Σ , 用矩阵四元组 (A, B, C, D) 表示, 其中

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \tag{8.2.16}$$

和

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.2.17}$$

不难验证, Σ 的传递函数是

$$G(s) = \frac{s-1}{s^5 - 5s^4 + 8s^3 - 5s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} (s-2)(s^2 - s + 1) & (s-1)^2 \\ (s-1)^2 & s(s-1)(s-2) \end{bmatrix}.$$

Σ 也是可控和可观的, 在 $s=1$ 有一个不变零点。而且容易发现, Σ 已经是特殊坐标基 (SCB) 的形式了, 其中

$$A_{aa}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_a^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

这样就得到

$$K_a^+ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

和

$$G_m(s) = \frac{s+1}{s^5 - 5s^4 + 8s^3 - 5s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} (s-2)(s^2 - s + 1) & (s-1)(s+1) \\ (s-1)^2 & s(s+1)(s-2) \end{bmatrix}.$$

只要给定系统 Σ 在虚轴上有不变零点, 就没有办法得到 Σ 的最小相位映像。我们在下面引入广义串级因子分解, 它是最小相位/全通因子分解的自然扩展。给定的非最小相位和左可逆系统被因子分解为

$$G(s) = G_M(s)U(s). \quad (8.2.18)$$

这里, $G_M(s)$ 是最小相位和左可逆的, 具有和 Σ 同样的无限零点结构。而 $U(s)$ 是一个方的、可逆和稳定的传递函数, 是渐近全通的。 $G_M(s)$ 的所有不变零点都在期望的集合 $C_d \subset C^-$ 上。如果给定的系统 Σ 只是可检测而不是可观测时, 集合 C_d 包括了 Σ 的所有不可观但却稳定的特征值, 由此使得 Σ 的所有不好和不希望有的不变零点(比如那些在右半平面或接近虚轴的)就不需要包括在 $G_M(s)$ 中了。这样的广义串级因子分解在回路传递函数恢复设计中有重要的应用。例如, 对 $G_M(s)$ 实行回路传递函数恢复时, 可以在某一频段或在某感兴趣的子空间上全面对回路传递函数恢复误差进行成形, 而把相应于 Σ 的不好不变零点的观测器特征值配置到任何期望的位置(见[116])。我们进一步注意到, 这个广义的串级因子分解立即可用于解决众所周知的零点配置问题, 这个问题将在下一章中详细地探讨。

假设给定系统 Σ 已经被变换为式(8.2.1)~式(8.2.3)的特殊坐标基(SCB)形式, 同时假定在特殊坐标基(SCB)的形式下, x_a 被分解成 x_a^- 和 x_a^+ , 使得 A_{aa}^+ 包含了 Σ 的所有不好的不变零点, 如果这些不好的零点都是可控的, 则可包括不稳定的不变零点、虚轴上的不变零点和一些不需要的稳定的不变零点。

正如所料, 构造广义串级因子分解的过程和最小相位/全通因子分解非常相似。所

以,我们在下面的定理中直接给出这样的分解。

定理 8.2.2 考虑一个左可逆和非最小相位系统 Σ 。假设它已经被变换成式(8.2.1)~式(8.2.3)的 SCB 形式,同时假设它的不好的零点是可观的,并都集中在 $\lambda(A_{aa}^+)$ 。我们可以构造广义串级因子分解(8.2.18),使得

1. Σ 中的最小相位部分由 Σ_M 给出,是由矩阵三元组 (A, B_M, C) 所表示的传递函数 $G_M(s) = C(sI - A)^{-1}B_M$, 其中

$$B_M = \Gamma_s \tilde{B}_M \Gamma_i^{-1} = \Gamma_s \begin{bmatrix} K_a^+ \\ 0 \\ 0 \\ B_d \end{bmatrix} \Gamma_i^{-1}. \quad (8.2.19)$$

这里, K_a^+ 的确定是要使 $\lambda(A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+)$ 在 \mathbb{C}^- 中的期望位置上,而且 Σ_M 也是左可逆的,和 Σ 有相同的无限零点结构。

2. 稳定的因子 $U(s)$ 为

$$U(s) = \Gamma_i [I - E_a^+ (sI - A_{aa}^+ + K_a^+ E_a^+)^{-1} K_a^+] \Gamma_i^{-1}, \quad (8.2.20)$$

并且

$$U^{-1}(s) = \Gamma_i [I + E_a^+ (sI - A_{aa}^+)^{-1} K_a^+] \Gamma_i^{-1}, \quad (8.2.21)$$

$U(s)$ 是渐近全通的,即

$$U(s)U'(-s) \rightarrow I, \text{ 当 } |s| \rightarrow \infty. \quad (8.2.22)$$

可以认为以上的结果是文献中(见[139])研究零点配置的对偶结果。

证明 不失一般性,假设 Σ 已被转换成 SCB 的形式。根据定理 8.2.1 的证明,对某些具有适当维数的矩阵 $L_{ad}^M, L_{ab}^M, E_b^M$ 和 E_d^M ; 存在一个非奇异的状态变换,可以把 Σ_M 变成如下的 SCB 形式:

$$\dot{\bar{x}}_a^M = (A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+) \bar{x}_a^M - K_a^+ E_a^+ x_a^- + L_{ad}^M y_d + L_{ab}^M y_b,$$

$$\dot{x}_a^- = A_{aa}^- x_a^- + L_{ad}^- y_d + L_{ab}^- y_b,$$

$$\dot{x}_b = A_{bb} x_b + L_{bd} y_d, \quad y_b = C_b x_b,$$

$$\dot{x}_d = A_{dd}^* x_d + L_d y_d + B_d [u + E_a^+ \bar{x}_a^M + E_a^- x_a^- + E_b^M x_b + E_d^M x_d], \quad y_d = C_d x_d,$$

因此,根据 SCB 的特性, Σ_M 和 Σ 具有同样的无限零点结构,并且 Σ_M 是左可逆的。而且 Σ_M 的不变零点是

$$\lambda \begin{bmatrix} A_{aa}^+ - K_a^+ E_a^+ & -K_a^+ E_a^- \\ 0 & A_{aa}^- \end{bmatrix} \subset \mathbb{C}^-. \quad (8.2.23)$$

所以, Σ_M 是最小相位的。和 Σ 最小相位不变零点相关联的左状态和输入零点方向在 Σ_M 中保持不变。等式 $G(s) = G_M(s)U(s)$ 直接从式(8.2.15)中得到。因为当 $|s| \rightarrow \infty$ 时有 $U(s) \rightarrow I$, 所以在 $|s| \rightarrow \infty$ 时,有 $U(s)U'(-s) \rightarrow I$, 这样就完成了定理 8.2.2 的证明。 ■

我们用一个例子来演示广义因子分解。

例 8.2.2 考虑如同[159]中的系统 Σ , 它的表示为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.25 \\ -2.5 & -2.5 \\ 0.3 & 1.25 \\ 1.5 & 3.5 \end{bmatrix} \quad (8.2.24)$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad (8.2.25)$$

以及

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0.2)} \begin{bmatrix} -0.2(s-1) & 1 \\ -(s-1) & s+3 \end{bmatrix}.$$

这个系统是方的和可逆的, 在 $s=1$ 和 $s=2$ 有两个不变零点. Σ 的最小相位映像和全通因子是这样得到的,

$$B_m = \begin{bmatrix} 0.7353 & -0.8088 \\ 1.4706 & -1.6176 \\ -0.9353 & 0.8088 \\ -2.4706 & 2.6176 \end{bmatrix},$$

$$G_m(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0.2)} \begin{bmatrix} -0.2(s+3.9412) & 0.6470 \\ -(s+2.1765) & s+2.2941 \end{bmatrix},$$

并且

$$V(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)(s-0.9414)}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1.7646}{s+2} \\ \frac{-1.7646(s-1)}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+0.9414}{s+2} \end{bmatrix}.$$

下面是 Σ 的串级因子分解

$$B_M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 3.75 & -3.75 \\ -0.7 & 0 \\ -4.75 & 4.75 \end{bmatrix},$$

$$G_M(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0.2)} \begin{bmatrix} -0.2(s+3) & 0 \\ -(s+4) & s+4 \end{bmatrix}$$

和

$$U(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+3} & \frac{-5}{s+3} \\ \frac{s-1}{(s+3)(s+4)} & \frac{s^2+s-11}{(s+3)(s+4)} \end{bmatrix}.$$

不难发现, $G_M(s)$ 在 $s=-3$ 和 $s=-4$ 有两个不变零点。

最后, 我们对在虚轴上没有不变零点的一个稳定、严格正则和右可逆的传递函数 $G(s)$ 来构造内外因子分解。令矩阵三元组 (A, B, C) 为系统 $G(s)$ 转置的实现, 即 $G'(s)$ 。显然, 它是左可逆的, 则从对最小相位/全通因子分解的构造性算法 FACT-SP 步骤 1~FACT-SP 步骤 3 中可自动地产生 $G(s)$ 的内外因子分解。我们在下面的定理中总结这一结果。从定理 8.2.1 中可以明显地得到该定理的证明。

定理 8.2.3 考虑一个在虚轴上没有不变零点的稳定、正则和右可逆的传递函数 $G(s)$ 。令 (A, B, C) 是转置 $G'(s)$ 的一个实现, 其中 (A, C) 是可检测的。令

$$G'(s) = G_m(s)V(s) \quad (8.2.26)$$

为如同定理 8.2.1 中那样的最小相位/全通因子分解, 则

$$G(s) = G_i(s)G_o(s) = V'(s)G'_m(s) \quad (8.2.27)$$

是 $G(s)$ 的一个内外因子分解, 其中 $G_i(s) = V'(s)$ 是 $G(s)$ 的一个内因子, 即

$$G'_i(-s)G_i(s) = V(-s)V'(s) = I, \quad (8.2.28)$$

$G_o(s) = G'_m(s)$ 是一个外因子, 它的右逆在 \mathbb{C}^+ 中解析。

8.3 非严格正则系统

我们现在对一般的系统 Σ 进行结构分解, 系统由矩阵四元组 (A, B, C, D) 表示, 它并不一定是左可逆或右可逆的, 它的直接传输矩阵 D 可能非零。对于广义的串级因子分解和内外因子分解, Σ 在虚轴上可能有不变零点。对于最小相位/全通因子分解, 我们仍然需要假设 Σ 在虚轴上没有不变零点。和前一节一样, 首先要给出最小相位/全通因子分解的逐步构造算法。

FACT-NSP 步骤 1

利用第 5 章定理 5.4.1 的结果, 找到非奇异的变换 $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\Gamma_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和 $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 使得给定系统 Σ , 即矩阵四元组 (A, B, C, D) 被变换到和式 (5.4.21)~式 (5.4.24) 的简明 SCB 相类似的形式。变换后的系统具体安排如下:

$$\tilde{A} = \Gamma_s^{-1} A \Gamma_s = \begin{bmatrix} A_{cc} & B_c E_{ca}^+ & B_c E_{ca}^- & L_{cb} C_b & L_{cd} C_d \\ 0 & A_{aa}^+ & 0 & L_{ab}^+ C_b & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & 0 & A_{aa}^- & L_{ab}^- C_b & L_{ad}^- C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_{dc} & B_d E_{da}^+ & B_d E_{da}^- & B_d E_{db} & A_{dd} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{0c} \\ B_{0a}^+ \\ B_{0a}^- \\ B_{0b} \\ B_{0d} \end{bmatrix} [C_{0c} \quad C_{0a}^+ \quad C_{0a}^- \quad C_{0b} \quad C_{0d}], \quad (8.3.1)$$

$$\tilde{B} = \Gamma_s^{-1} B \Gamma_i = \begin{bmatrix} B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \Gamma_o^{-1} D \Gamma_i = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3.2)$$

和

$$\tilde{C} = \Gamma_o^{-1} C \Gamma_s = \begin{bmatrix} C_{0c} & C_{0a}^+ & C_{0a}^- & C_{0b} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.3.3)$$

这里, $\lambda(A_{aa}^+) \subset C^+$ 和 $\lambda(A_{aa}^-) \subset C^-$ 分别是 Σ 的不稳定和稳定的不变零点。

FACT-NSP 步骤 2

令

$$A_x = \begin{bmatrix} A_{cc} & B_c E_{ca}^+ \\ 0 & A_{aa}^+ \end{bmatrix}, \quad B_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_i^{-1}, \quad (8.3.4)$$

$$C_x = \begin{bmatrix} C_{0c} & C_{0a}^+ \\ E_{dc} & E_{da}^+ \end{bmatrix}, \quad D_x = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_d} & 0 \end{bmatrix} \Gamma_i^{-1} \quad (8.3.5)$$

和

$$\Gamma_i^{-1} (\Gamma_i^{-1})' = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma'_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma'_{13} & \Gamma'_{23} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma'_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.3.6)$$

根据 SCB 性质 5.4.1, 当矩阵对 (A, C) 是可检测时, 矩阵对 (A_x, C_x) 是可检测的。我们现在可以对 Riccati 方程

$$A_x P_x + P_x A_x' + B_x B_x' - (C_x P_x + D_x B_x')' (D_x D_x')^{-1} (C_x P_x + D_x B_x') = 0 \quad (8.3.7)$$

求解 $P_x > 0$ 。后面将会证明, 这样的解总是存在的。接下来, 计算

$$K_x := \begin{bmatrix} K_{c0} & K_{cd} \\ K_{a0}^+ & K_{ad}^+ \end{bmatrix} = (C_x P_x + D_x B_x')' (D_x D_x')^{-1} \quad (8.3.8)$$

和

$$B_m = \Gamma_s \begin{bmatrix} B_{c0} + K_{c0} & K_{cd} \\ B_{a0}^+ + K_{a0}^+ & K_{ad}^+ \\ B_{a0}^- & 0 \\ B_{b0} & 0 \\ B_{d0} & B_d \end{bmatrix} \Gamma_m^{-1}, \quad D_m = \Gamma_o \begin{bmatrix} I_{m_o} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_m^{-1}. \quad (8.3.9)$$

FACT-NSP 步骤 3

定义 Σ_m 为四元组 (A, B_m, C, D_m) 所表示的系统, 并且

$$V(s) = \Gamma_m [C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1} (B_x - K_x D_x) + D_x]. \quad (8.3.10)$$

至此已完成了对一般系统 Σ 构造最小相位/全通因子分解的过程。

我们有下面的定理。

定理 8.3.1 考虑一般的如式(8.1.1)所示的可检测系统 Σ , 所有的不稳定的不变零点都在 C^+ 中, 则它的最小相位/全通因子分解为

$$G(s) = G_m(s)V(s), \quad (8.3.11)$$

其中 $V(s)$ 是由式(8.3.10)所给出的稳定的全通因子。 $G_m(s)$ 是 Σ 的最小相位映像, 是由矩阵四元组 (A, B_m, C, D_m) 所表示的 Σ_m 的传递函数, 其中 B_m 和 D_m 由式(8.3.9)所给出, 即

$$G_m(s) = C(sI - A)^{-1} B_m + D_m. \quad (8.3.12)$$

而且 Σ_m 是左可逆的, 和 Σ 有相同的无限零点结构, 它的传递函数 $G_m(s)$ 满足

$$G_m(s)G_m'(-s) = G(s)G'(-s). \quad (8.3.13)$$

全通因子 $V(s)$ 满足 $V(s)V'(-s) = I$ 。

证明 首先注意到, 由于 (A_x, C_x) 是可检测的, $(-A_x, B_x)$ 是可镇定的, 所以根据 Richardson 和 Kwong^[111], 式(8.3.7)有惟一的对称和正定解, 即 $P_x = P_x' > 0$ 。我们现在证明, $A_x - K_x C_x$ 是一个稳定的矩阵, 令

$$P_x^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix},$$

则用 P_x^{-1} 前乘方程(8.3.7)可得

$$P_x^{-1} (A_x - K_x C_x) P_x = \begin{bmatrix} -(A_{cc}^* + B_c \tilde{\Gamma} B_c' P_{11})' & 0 \\ \star & -(A_{aa}^+)' \end{bmatrix},$$

其中

$$A_{cc}^* = A_{cc} - B_c [\Gamma'_{13} \quad \Gamma'_{23}] (\Gamma_m)^2 \begin{bmatrix} C_{0c} \\ E_{dc} \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_{33} - [\Gamma'_{13} \quad \Gamma'_{23}] (\Gamma_m)^2 \begin{bmatrix} \Gamma_{13} \\ \Gamma_{23} \end{bmatrix}.$$

有必要注意到, $\tilde{\Gamma}$ 是一个正定矩阵, 而 P_{11} 是代数 Riccati 方程

$$P_{11}A_{cc}^* + (A_{cc}^*)'P_{11} + P_{11}B_c \tilde{\Gamma} B_c' P_{11} - [C_{0c}' \quad E_{dc}'](\Gamma_m)^2 \begin{bmatrix} C_{0c} \\ E_{dc} \end{bmatrix} = 0$$

的惟一正定解。因此 $\lambda(A_x - K_x C_x) = \lambda(-A_{aa}^+) \cup \lambda(-A_{cc}^* - B_c \tilde{\Gamma} B_c' P_{11})$ 都在 \mathbb{C}^- 中, $A_x - K_x C_x$ 的确是一个稳定的矩阵。我们现在可以证明, 由矩阵四元组 (A, B_m, C, D_m) 所表示的 Σ_m 是最小相位、左可逆的, 和 Σ 有相同的无限零点结构。不失一般性, 假设 Σ 已经是式(8.3.1)~式(8.3.3)所表示的 SCB 形式。定义

$$\hat{A} = A - \begin{bmatrix} B_{c0} \\ B_{a0}^+ \\ B_{a0}^- \\ B_{b0} \\ B_{d0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{c0} \\ K_{a0}^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [C_{0c} \quad C_{0a}^+ \quad C_{0a}^- \quad C_{0b} \quad C_{0d}]$$

和

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} K_{cd} \\ K_{ad}^+ \\ 0 \\ 0 \\ B_d \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 \end{bmatrix},$$

则根据 SCB 的构造和特性(见 5.4 节), 由矩阵四元组 (A, B_m, C, D_m) 所表示的系统 Σ_m 和矩阵三元组 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ 所表示的系统 $\hat{\Sigma}$ 有同样的有限和无限零点结构, 同样的可逆特性。然后采用与定理 8.2.1 的证明相同的过程, 很容易证明, $\hat{\Sigma}$ 是左可逆的, 和 Σ 具有同样的无限零点结构。而且, $\hat{\Sigma}$ 的不变零点位于

$$\lambda \begin{bmatrix} A_x - K_x C_x & \star \\ 0 & A_{aa}^- \end{bmatrix} \subset \mathbb{C}^-,$$

其中, \star 表示无关紧要的矩阵。

接下来, 证明 $V(s)V'(-s) = I$ 。根据式(8.3.7)和式(8.3.8), 可得

$$A_x P_x + P_x A_x' + B_x B_x' - K_x (C_x P_x + D_x B_x') = 0,$$

$$D_x (B_x' - D_x' K_x') = -C_x P_x$$

和

$$K_x C_x P_x + K_x D_x B_x' - B_x D_x' K_x' - P_x C_x' K_x' = 0.$$

我们有

$$V(s)V'(-s) = \Gamma_m [C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1} (B_x - K_x D_x) + D_x] \\ \times [(B_x' - D_x' K_x') (sI - A_x' + C_x' K_x')^{-1} C_x' + D_x'] \Gamma_m'$$

$$\begin{aligned}
&= I + \Gamma_m C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1} (B_x - K_x D_x) \\
&\quad \times (B'_x - D'_x K'_x) (-sI - A'_x + C'_x K'_x)^{-1} C'_x \Gamma_m \\
&\quad - \Gamma_m C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1} P_x C'_x \Gamma_m \\
&\quad - \Gamma_m C_x P_x (-sI - A'_x + C'_x K'_x)^{-1} C'_x \Gamma_m \\
&= I + \Gamma_m C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1} [(B_x - K_x D_x) \\
&\quad \times (B'_x - D'_x K'_x) - P_x (-sI - A'_x + C'_x K'_x) \\
&\quad - (sI - A_x + K_x C_x) P_x] (-sI - A'_x + C'_x K'_x)^{-1} C'_x \Gamma_m \\
&= I + \Gamma_m C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1} [K_x C_x P_x + K_x D_x B'_x \\
&\quad - B_x D'_x K'_x - P_x C'_x K'_x] (-sI - A'_x + C'_x K'_x)^{-1} C'_x \Gamma_m \\
&= I.
\end{aligned}$$

现在证明 $G(s) = G_m(s)V(s)$ 。令

$$\Phi_x(s) = (sI - A_x + K_x C_x)^{-1},$$

$$\bar{\Phi}_x(s) = \begin{bmatrix} \Phi_x(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_k = \begin{bmatrix} K_{c0} & K_{cd} \\ K_{a0}^+ & K_{ad}^+ \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_d \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} B_{c0} \\ B_{a0}^+ \\ B_{a0}^- \\ B_{b0} \\ B_{d0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_d \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_c = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

则有

$$\begin{aligned}
B &= \Gamma_s [\bar{B}_0 \quad \bar{B}_d \quad \bar{B}_c] \Gamma_i^{-1}, \\
B_m \Gamma_m &= \Gamma_s [\bar{B}_0 \quad 0] + \Gamma_s \bar{B}_k, \\
B_m \Gamma_m D_x &= \Gamma_s [\bar{B}_0 \quad 0 \quad 0] \Gamma_i^{-1} + \Gamma_s [\bar{B}_k \quad 0] \Gamma_i^{-1}, \\
D_m \Gamma_m C_x \Phi_x(s) &= C \Gamma_s \bar{\Phi}_x(s)
\end{aligned}$$

和

$$([\bar{B}_0 \quad 0] + \bar{B}_k) C_x \Phi_x(s) + \Gamma_s^{-1} (sI - A) \Gamma_s \bar{\Phi}_x(s) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

我们现在有

$$\begin{aligned}
G_m(s)V(s) &= [C(sI - A)^{-1}B_m + D_m]\Gamma_m \\
&\quad \times [C_x(sI - A_x + K_x C_x)^{-1}(B_x - K_x D_x) + D_x] \\
&= C(sI - A)^{-1}B_m \Gamma_m \\
&\quad \times [C_x(sI - A_x + K_x C_x)^{-1}(B_x - K_x D_x) + D_x] \\
&\quad + D_m \Gamma_m C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1}(B_x - K_x D_x) + D \\
&= C(sI - A)^{-1}[B_m \Gamma_m C_x \Phi_x(s)(B_x - K_x C_x) + B_m \Gamma_m D_x \\
&\quad + (sI - A)\Gamma_s \bar{\Phi}_x(s)(B_x - K_x D_x)] + D \\
&= C(sI - A)^{-1}\Gamma_s \{([\bar{B}_0 \ 0] + \bar{B}_K)C_x \Phi_x(s)(B_x - K_x D_x) \\
&\quad + [\bar{B}_0 \ 0 \ 0]\Gamma_i^{-1} + [\bar{B}_K \ 0]\Gamma_i^{-1} \\
&\quad + \Gamma_s^{-1}(sI - A)\Gamma_s \bar{\Phi}_x(s)(B_x - K_x D_x)\} + D \\
&= C(sI - A)^{-1}\Gamma_s \{[I \ 0 \ 0 \ 0]'(B_x - K_x D_x) \\
&\quad + [\bar{B}_0 \ 0 \ 0]\Gamma_i^{-1} + [\bar{B}_K \ 0]\Gamma_i^{-1}\} + D \\
&= C(sI - A)^{-1}\Gamma_s \{[\bar{B}_0 \ 0 \ 0] + [0 \ \bar{B}_d \ 0] + [0 \ 0 \ \bar{B}_c]\}\Gamma_i^{-1} + D \\
&= C(sI - A)^{-1}B + D \\
&= G(s).
\end{aligned}$$

最后,从 $V(s)V'(-s) = I$ 可立即推出 $G(s)G'(-s) = G_m(s)G'_m(-s)$. ■

我们用下面的例子来演示上面的结果。

例 8.3.1 考虑由矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表示的系统 Σ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3.14)$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.3.15)$$

给定系统 Σ 有一个传递函数 $G(s)$,

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s^5 - 3s^4 - 2s^3 + 3s^2 - s} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} s^5 - 3s^4 - 2s^3 + 3s^2 - s & s^4 + 2s - 1 & s^4 - s^3 - 3s^2 + 1 \\ 0 & s^4 - 2s^3 + 2s - 1 & s^3 - s^2 - s + 1 \\ 0 & s^3 - s^2 - s + 1 & s^2 - 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

该系统既不是左可逆的,也不是右可逆的,在 $\{-1, 1\}$ 有两个不变零点,因此是非最小相位

的。而且不难验证, Σ 是特殊坐标基(SCB)的形式, 其中

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以根据 FACT-NSP 步骤 2~FACT-NSP 步骤 3 的过程, 其中包括解一个 Riccati 方程, 我们得到

$$K_x = \begin{bmatrix} 1.412771 & 1.063856 \\ -0.348915 & 2.255424 \end{bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 1.412771 & 1.063856 \\ -0.348915 & 2.255424 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_m(s) = \frac{1}{s^5 - 3s^4 - 2s^3 + 3s^2 - s} [G_{m1}(s) \quad G_{m2}(s)]$$

和

$$V(s) = \frac{1}{s^2 + 2.73205s + 1.73205}$$

$$\times \begin{bmatrix} s^2 + 1.31928s - 0.06386 & -1.06386s - 1.19157 & s + 1.25542 \\ -1.06386s + 1.41277 & s^2 - 0.58723s - 0.76169 & s - 0.65109 \end{bmatrix},$$

其中

$$G_{m1}(s) = \begin{bmatrix} s^5 - 1.58723s^4 - 4.1106s^3 - 1.58723s^2 - 0.30217s + 1.41277 \\ 1.06386s^3 - 1.41277s^2 - 1.06386s + 1.41277 \\ 1.06386s^2 - 0.34892s - 1.41277 \end{bmatrix}$$

和

$$G_{m2}(s) = \begin{bmatrix} 2.06386s^4 + 3.44699s^3 - 0.93614s^2 - 2.51085s + 0.06386 \\ s^4 + 1.31928s^3 - 1.06386s^2 - 1.31928s + 0.06386 \\ s^3 + 2.31928s^2 + 1.25542s - 0.06386 \end{bmatrix}.$$

对一般的非严格正则和非左可逆系统, 也可以得到类似的广义串级因子分解。我们有下面的结果。

定理 8.3.2 考虑一般的系统 Σ , 它已被变换到式(8.3.1)~式(8.3.3)的特殊坐标基(SCB)形式。假设它的不好的不变零点是可观的, 并且都已经集中在 $\lambda(A_m^+)$, 可以构造一个广义的串级因子分解 $G(s) = G_M(s)U(s)$, 使得

1. Σ 的最小相位部分由矩阵四元组 (A, B_M, C, D_M) 所表示的 Σ_M 给出, 具有传递函数

$G_M(s) = C(sI - A)^{-1}B_M + D_M$, 其中

$$B_M = \Gamma_s \begin{bmatrix} B_{c0} + K_{c0} & K_{cd} \\ B_{a0}^+ + K_{a0}^+ & K_{ad}^+ \\ B_{b0}^- & 0 \\ B_{b0} & 0 \\ B_{d0} & B_d \end{bmatrix} \Gamma_m^{-1}, \quad D_M = \Gamma_o \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_m^{-1}, \quad (8.3.16)$$

其中

$$K_x = \begin{bmatrix} K_{c0} & K_{cd} \\ K_{a0}^+ & K_{ad}^+ \end{bmatrix} \quad (8.3.17)$$

的选取是使得 $\lambda(A_x - K_x C_x)$ 都在 C^- 中的期望位置上。注意, 这里的 A_x, C_x 和 Γ_m 如同式(8.3.4)~式(8.3.6)所定义。而且, Σ_M 是左可逆的, 具有和 Σ 同样的无限零点结构。

2. 因子 $U(s)$ 可表示为

$$U(s) = \Gamma_m [C_x (sI - A_x + K_x C_x)^{-1} (B_x - K_x D_x) + D_x], \quad (8.3.18)$$

其中 $U(s)$ 是稳定、右可逆和渐近全通的, 即

$$\text{当 } |s| \rightarrow \infty, \quad U(s)U'(-s) \rightarrow I \quad (8.3.19)$$

证明 和定理 8.2.2 的证明思路一样。 ■

我们用下面的例子来演示广义因子分解。

例 8.3.2 考虑和例 8.3.1 同样的系统 Σ 。选择 K_x , 使得 $\lambda(A_x - K_x C_x) = \{-2, -3\}$, 于是可得

$$K_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_M(s) = \frac{1}{s^5 - 3s^4 - 2s^3 + 3s^2 - s} \times \begin{bmatrix} s^5 - s^4 - 12s^3 - 7s^2 + 7s + 2 & 2s^4 + 7s^3 + s^2 - 6s \\ -2s^3 - 2s^2 + 2s + 2 & s^4 + 3s^3 - s^2 - 3s \\ -2s^2 - 4s - 2 & s^3 + 4s^2 + 3s \end{bmatrix}$$

和

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s^2 + 3s & -s - 3 \\ 2s + 2 & s^2 - 5 \end{bmatrix}.$$

最后, 我们以下面关于一般系统内外因子分解的定理来结束本节。

定理 8.3.3 考虑一般的非严格正则和稳定的传递函数 $G(s)$, 它在虚轴上可能有不变零点。令矩阵四元组 (A, B, C, D) 为该系统转置 $G'(s)$ 的一个实现, 其中 (A, C) 是可检

测的。我们认为 $G(s)$ 或 (A, B, C, D) 所有在虚轴上的不变零点是“好的”，并把它们放置在 $\lambda(A_{aa}^-)$ 中，则根据定理 8.3.1 的结果，构造 $G'(s)$ 的最小相位/全通因子分解，即

$$G'(s) = G_m(s)V(s), \quad (8.3.20)$$

其中 $G_m(s)$ 是左可逆的，在 C^+ 中没有不变零点， $V(s)$ 是一个全通因子。则

$$G(s) = G_i(s)G_o(s) = V'(s)G'_m(s) \quad (8.3.21)$$

是 $G(s)$ 的一个内外因子分解，其中 $G_i(s) = V'(s)$ 是 $G(s)$ 的一个内因子，即

$$G'_i(-s)G_i(s) = V(-s)V'(s) = I, \quad (8.3.22)$$

$G_o(s) = G'_m(s)$ 是一个外因子，它的右逆在 C^+ 中解析。

8.4 离散时间系统

在这一节中，我们考虑一般的离散时间系统的因子分解，系统的表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (8.4.1)$$

其中，状态矢量 $x \in \mathbb{R}^n$ ，输出矢量 $y \in \mathbb{R}^p$ ，输入矢量 $u \in \mathbb{R}^m$ 。不失一般性，假设 $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 是最大秩的。令 Σ 的传递函数为

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (8.4.2)$$

因为产生一个渐近全通因子的广义串级因子分解在离散时间域中并没有太大的意义，所以我们对系统(8.4.1)只研究内外因子分解和最小相位/全通因子分解。对于一个正则和稳定的传递函数 $G(z)$ ，定义它的内外因子分解为

$$G(z) = G_i(z)G_o(z), \quad (8.4.3)$$

其中， $G_i(z)$ 是满足 $G'(z^{-1})G(z) = I$ 的内矩阵， $G_o(z)$ 是一个右可逆、没有无限零点和在单位圆外(即 C°)没有不变零点的外矩阵。类似地，在单位圆上没有任何不变零点的最小相位/全通因子 $G(z)$ 被定义为

$$G(z) = G_m(z)V(z), \quad (8.4.4)$$

其中， $G_m(z)$ 是左可逆和最小相位的，没有无限零点。 $V(z)$ 是满足 $V(z)V'(z^{-1}) = I$ 的一个全通因子。

我们可在原则上采用和前一节连续时间系统相类似的步骤来得到这些因子分解的显式表达。实际上，Lin 等^[89]就是这样得到离散时间系统内外因子分解的。但在这一节中，借助于第7章的双线性变换和逆双线性变换，我们将证明，离散时间系统因子分解问题可被转变成等价的连续时间问题，然后应用8.2节和8.3节的结果求解这个问题。过程是很明显的。

1. D-FACT 步骤 1

以 $a=1$ 对离散时间系统(8.4.1)或它的传递函数(8.4.2)应用式(7.3.3)所示的双线性变换,得到一个连续时间映像:

$$\tilde{G}(s) = G(z) \Big|_{z=(1+s)/(1-s)} = C \left(\frac{1+s}{1-s} I - A \right)^{-1} B + D. \quad (8.4.5)$$

应用引理 7.3.1 可得到 $\tilde{G}(s)$ 的一个状态空间实现。

2. D-FACT 步骤 2

应用定理 8.3.1 的结果来找一个 $\tilde{G}(s)$ 的最小相位/全通因子分解,即

$$\tilde{G}(s) = \tilde{G}_m(s) \tilde{V}(s), \quad (8.4.6)$$

或者是利用定理 8.3.3 的结果得到 $\tilde{G}(s)$ 的一个内外因子分解,

$$\tilde{G}(s) = \tilde{G}_i(s) \tilde{G}_o(s). \quad (8.4.7)$$

3. D-FACT 步骤 3

以 $a=1$ 应用双线性变换(7.2.3),对于最小相位/全通因子分解,计算

$$G_m(z) = \tilde{G}_m(s) \Big|_{s=(z-1)/(z+1)}, \quad V(z) = \tilde{V}(s) \Big|_{s=(z-1)/(z+1)} \quad (8.4.8)$$

或对内外因子分解,计算

$$G_i(z) = \tilde{G}_i(s) \Big|_{s=(z-1)/(z+1)}, \quad G_o(z) = \tilde{G}_o(s) \Big|_{s=(z-1)/(z+1)} \quad (8.4.9)$$

可以利用引理 7.2.1 来寻找离散时间传递函数所对应的状态空间实现。

4. D-FACT 步骤 4

$G(z)$ 的内外因子分解为

$$G(z) = G_i(z) G_o(z), \quad (8.4.10)$$

而最小相位/全通因子分解为

$$G(z) = G_m(z) V(z). \quad (8.4.11)$$

以上的算法来自下面引理的结果。

引理 8.4.1 考虑一个连续时间传递函数 $\tilde{V}(s)$ 和在双线性变换下的离散时间系统 $V(z)$ 。当且仅当 $V(z)$ 是全通(内)因子时, $\tilde{V}(s)$ 是全通(内)因子。

证明 如果 $\tilde{V}(s)$ 是一个连续时间域的全通因子,即

$$\tilde{V}(s) \tilde{V}'(-s) = I,$$

则

$$\begin{aligned} V(z)V'(z^{-1}) &= \tilde{V}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\tilde{V}'\left(\frac{z^{-1}-1}{z^{-1}+1}\right) \\ &= \tilde{V}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\tilde{V}'\left(-\frac{z-1}{z+1}\right) = \tilde{V}(s)\tilde{V}'(-s) = I. \end{aligned}$$

所以, $V(z)$ 是一个离散时间域的全通因子。对于内因子的反方向的证明结果是类似的。 ■

引理 8.4.2 考虑一个连续时间传递函数 $\tilde{G}_o(s)$, 以及在双线性变换下的离散时间系统 $G_o(z)$ 。当且仅当 $G_o(z)$ 是一个外矩阵时, $\tilde{G}_o(s)$ 是一个外矩阵。

证明 直接根据定理 7.2.1 和定理 7.3.1 可得。

我们用下面的例子来演示这节的结果。

例 8.4.1 考虑一个由 (A, B, C, D) 所表示的离散时间系统 Σ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.12)$$

和

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.4.13)$$

很容易验证, (A, B) 是可镇定的, 以上的系统既不是左可逆, 也不是右可逆, 在 $z=0$ 和 $z=1.1$ 有两个不变零点, 有一个无限零点。

根据引理 7.3.1 所给的公式, 我们得到 Σ 的连续时间对应系统, 用 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 来表示, 其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.31799 & -0.02302 & 0.01096 & 0.14906 & 0.11508 \\ 0.11508 & -1.17263 & 0.08220 & 1.11796 & 0.86313 \\ 0.10960 & -0.16441 & 0.12591 & 0.11234 & 0.82203 \\ 0.11508 & -0.17263 & 0.08220 & 0.11796 & 0.86313 \\ -0.23017 & 0.34525 & -0.16440 & -0.23592 & -0.72626 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.08220 & -0.86313 & -0.11508 \\ 0.04110 & 0.43157 & 0.05754 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34763 & -0.63652 & 0.21699 & 0.47428 & 1.45636 \\ -0.23136 & 0.40458 & -0.14960 & 0.20388 & -1.15975 \end{bmatrix}$$

利用前一节所给的算法和[87]中的工具箱,得到 $\tilde{G}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$ 的如下内外因子分解:

$$\tilde{G}(s) = \tilde{G}_i(s) \tilde{G}_o(s),$$

其中的内因子 $\tilde{G}_i(s)$ 由 $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i)$ 表示,其中

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} -0.82764 & -0.90098 & 0.00289 \\ -0.08007 & -0.62084 & 0.00520 \\ -0.94833 & -0.87474 & -0.04635 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} -0.24313 & -0.30779 \\ -0.43738 & -0.55371 \\ 0.73049 & -0.69541 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0.11903 & -0.04326 & -0.09426 \\ -1.88731 & -2.05455 & 0.00660 \\ 2.08383 & 1.02727 & -0.00330 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} 0.78472 & -0.61986 \\ -0.55442 & -0.70187 \\ 0.27721 & 0.35094 \end{bmatrix},$$

外因子 $\tilde{G}_o(s)$ 由 $(\tilde{A}_o, \tilde{B}_o, \tilde{C}_o, \tilde{D}_o)$ 表示,其中

$$\tilde{A}_o = \begin{bmatrix} -0.31799 & -0.02302 & 0.01096 & 0.14906 & 0.11508 \\ 0.11508 & -1.17263 & 0.08220 & 1.11796 & 0.86313 \\ 0.10960 & -0.16441 & 0.12591 & 0.11234 & 0.82203 \\ 0.11508 & -0.17263 & 0.08220 & 0.11796 & 0.86313 \\ -0.23017 & 0.34525 & -0.16441 & -0.23592 & -0.72626 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_o = B, \quad \tilde{C}_o = \begin{bmatrix} -0.04494 & 0.14716 & 0.06847 & 0.11731 & 0.46051 \\ -0.05843 & 0.18861 & -0.06712 & 0.27241 & 0.57146 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{D}_o = \begin{bmatrix} 0.84168 & 0.59817 & 0.07976 \\ -0.54774 & 0.75726 & 0.10097 \end{bmatrix}.$$

$\tilde{G}(s)$ 的最小相位/全通因子分解为

$$\tilde{G}(s) = \tilde{G}_m(s) \tilde{V}(s),$$

其中的最小相位映像 $\tilde{G}_m(s)$ 由矩阵四元组 $(\tilde{A}_m, \tilde{B}_m, \tilde{C}_m, \tilde{D}_m)$ 表示,其中

$$\tilde{A}_m = \begin{bmatrix} -0.31799 & -0.02302 & 0.01096 & 0.14906 & 0.11508 \\ 0.11508 & -1.17263 & 0.08220 & 1.11796 & 0.86313 \\ 0.10960 & -0.16441 & 0.12591 & 0.11234 & 0.82203 \\ 0.11508 & -0.17263 & 0.08220 & 0.11796 & 0.86313 \\ -0.23017 & 0.34525 & -0.16441 & -0.23592 & -0.72626 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_m = \begin{bmatrix} -0.10357 & -0.14446 \\ -0.65755 & -0.91712 \\ 0.87426 & -0.49682 \\ -0.65755 & -0.91712 \\ -0.20767 & -0.28966 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_m = \begin{bmatrix} 0.81270 & -0.58268 \\ -0.57419 & -0.65978 \\ 0.28709 & 0.32989 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34763 & -0.63652 & 0.21699 & 0.47428 & 1.45636 \\ -0.23136 & 0.40458 & -0.14960 & 0.20388 & -1.15975 \end{bmatrix}.$$

全通因子 $\tilde{V}(s)$ 由表示 $(\tilde{A}_v, \tilde{B}_v, \tilde{C}_v, \tilde{D}_v)$ 表示,其中

$$\tilde{A}_v = \begin{bmatrix} -0.33259 & 0.04006 & -0.01323 \\ -0.29863 & -0.71383 & 0.19158 \\ 0.18651 & 1.07034 & -0.35706 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0.00440 & -1.05564 \\ 0 & -1.77426 & -0.23657 \\ 0 & 1.10808 & 0.14774 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_v = \begin{bmatrix} 0.09721 & 0.55790 & -0.21093 \\ 0.13559 & 0.77813 & -0.29420 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{D}_v = \begin{bmatrix} 0.81270 & 0.57757 & 0.07701 \\ -0.58268 & 0.80557 & 0.10741 \end{bmatrix}.$$

接下来,应用引理7.2.1中的双线性变换公式,我们得到 $G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$ 的如下内外因子分解:

$$G(z) = G_i(z)G_o(z),$$

内因子 $G_i(z)$ 由 (A_i, B_i, C_i, D_i) 表示,其中

$$A_i = \begin{bmatrix} 0.12162 & -0.62348 & 0.00000 \\ -0.05852 & 0.26315 & 0.00612 \\ -0.96763 & -0.49091 & 0.90628 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} -0.24313 & -0.30779 \\ -0.43738 & -0.55371 \\ 0.73049 & -0.69541 \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0.21692 & -0.07883 & -0.17176 \\ -1.08171 & -0.27353 & -0.00435 \\ 1.27885 & -0.71087 & 0.00000 \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} 0.70943 & -0.56940 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

外因子 $G_o(z)$ 由 (A, B, C_o, D_o) 表示,其中

$$C_o = \begin{bmatrix} -0.20269 & 0.20269 & -0.02878 & 0.38891 & 0.74970 \\ -0.25253 & 0.25253 & -0.36910 & 0.74531 & 0.89188 \end{bmatrix}$$

和

$$D_o = \begin{bmatrix} 0.86753 & 1.01343 & 0 \\ -0.67536 & 1.26267 & 0 \end{bmatrix}.$$

最后, $G(z)$ 的最小相位/全通因子分解可以从对应的连续时间系统

$$G(z) = G_m(z)V(z)$$

得到。这里的最小相位映像 $G_m(z)$ 由 (A, B_m, C, D_m) 表示, 其中

$$B_m = \begin{bmatrix} -0.10357 & -0.14446 \\ -0.65755 & -0.91712 \\ 0.87426 & -0.49682 \\ -0.65755 & -0.91712 \\ -0.20767 & -0.28966 \end{bmatrix}, \quad D_m = \begin{bmatrix} 0.81270 & -0.58268 \\ -0.65755 & -0.91712 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

全通因子 $V(z)$ 由 (A_v, B_v, C_v, D_v) 表示, 其中

$$A_v = \begin{bmatrix} 0.49301 & 0.02831 & -0.01055 \\ -0.26015 & 0.27488 & 0.18251 \\ 0.0000 & 1.00941 & 0.61628 \end{bmatrix}, \quad B_v = \begin{bmatrix} 0 & 0.00440 & -1.05564 \\ 0 & -1.77426 & -0.23657 \\ 0 & 1.10808 & 0.14774 \end{bmatrix}$$

和

$$C_v = \begin{bmatrix} -0.06518 & 0.19822 & -0.14833 \\ -0.09091 & 0.27647 & -0.20688 \end{bmatrix}, \quad D_v = \begin{bmatrix} 0.81270 & 0 & 0 \\ -0.58268 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.5 练习

8.1 给定一个稳定和正则的传递函数 $G(s)$, 以及它的最小相位/全通因子分解

$$G(s) = G_m(s)V(s),$$

证明

$$\sigma_{\max}[V(j\omega)] = \cdots = \sigma_{\min}[V(j\omega)] = 1$$

和

$$\|G\|_2 = \|G_m\|_2, \quad \|G\|_\infty = \|G_m\|_\infty.$$

同时证明对于 $G(s) = G_i(s)G_o(s)$ 的内外因子分解, 有

$$\sigma_{\max}[G_i(j\omega)] = \cdots = \sigma_{\min}[G_i(j\omega)] = 1$$

和

$$\|G\|_2 = \|G_o\|_2, \quad \|G\|_\infty = \|G_o\|_\infty.$$

8.2 证明练习 8.1 的结果对离散时间系统也是正确的。

8.3 给定一个连续时间系统传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^3 + s^2 - s - 1 & -3s^2 + 3 \\ & s^2 - 1 & -3s + 3 \end{bmatrix}}{s^4 + 5s^3 + 16s^2 + 16s + 28},$$

或者是一个状态空间实现

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ -8 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

和

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

系统是稳定的,可控和可观测的,既不是左可逆的也不是右可逆的,在 2 有一个不稳定的不变零点,有一个 1 阶的无限零点。

(a) 对 $G(s)$ 找一个最小相位/全通因子分解。

(b) 对 $G(s)$ 找一个内外因子分解。

(c) 验证练习 8.1 的结果。

8.4 给定一个离散时间的传递函数矩阵

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} z^2 - 0.2z + 0.01 & 0.1z - 0.01 \\ 0.1z - 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}}{z^3 - 0.2z^2 - 0.01z + 0.001},$$

或者是一个状态空间实现

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(k)$$

和

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k).$$

该系统是稳定、可控和可观测的,既不左可逆也不右可逆,有一个 1 阶的无限零点,没有不变零点。

(a) 找到 $G(z)$ 的一个最小相位/全通因子分解。

(b) 找到 $G(z)$ 的一个内外因子分解。

(c) 验证练习 8.2 的结果。

第9章 通过选择传感器/执行器实现结构配置

9.1 导论

我们在研究中都知道,像有限和无限零点结构与可逆性结构这样的线性系统结构特性,在线性系统理论和控制领域中发挥着重要的作用(如 Chen^[22]的鲁棒和 H_∞ 控制, Saber 等^[120]的 H_2 最优控制, Lin^[85], Hu 和 Lin^[67]的约束控制系统)。我们认为,把类似于 H_2 和 H_∞ 控制这样的大量而有用的多变量控制综合技术应用到实际设计中的主要困难之一,是对控制系统性能和控制系统实现之间联系的研究不足,这包括硬件的选择,如适合鲁棒和性能要求的合适的传感器配置。这样的联系,奠定了在控制系统设计的初始阶段就可以对各方面性能进行权衡的基础。例如,我们在研究中都知道,非最小相位系统在控制系统设计中总是很难处理的。但是从第8章的结果(即定理 8.2.2 和定理 8.2.3)可以清楚地看到,适当地增加或重新放置执行器件(如式(8.2.19)的 B_M 中增加项 K_a^+),或对偶地,增加或重新放置传感器,就可以完全消除麻烦的非最小相位不变零点,得到更好的性能。本章的目的在于研究给定线性系统结构特性的可配置性,给出能够产生期望结构特性的传感器和执行器组合。

有必要回顾线性系统结构配置技术的发展简史。大部分相关文献都是关于不变零点或传输零点(即有限零点结构)配置(参见 Emami-Naeini 和 Van Dooren^[51], Karcianis 等^[74], Kouvaritakis 和 MacFarlane^[77], Patel^[108], Vardulakis^[145], Syrmos^[139], Syrmos 和 Lewis^[140])。到现在为止,包括上面提到的文献,都只涉及有限零点配置。而系统的无限零点结构和其他像可逆这样的结构,或者是保持原样,或者是不去关心它。只是到了最近,Chen 和 Zheng^[31]才提出了一种可以同时配置有限和无限零点结构的技术。据我们所知,到目前为止,只有 Liu, Chen 和 Lin^[92]的结果涉及到完整的系统结构配置,包括有限和无限零点结构与可逆性结构。在这一章中,我们给出[31]中处理有限和无限零点结构同时配置的技术,以及[92]的一般结构特性配置技术。具体地说,考虑线性时不变系统的状态空间方程

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (9.1.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入。所谓的结构配置或传感器选择问题,就是找到一个定常矩阵 C , 或等价地, 一个测量输出

$$y = Cx, \quad (9.1.2)$$

使得由矩阵三元组 (A, B, C) 所表示的系统具有预先指定的期望结构特性, 包括有限和无限零点结构与可逆结构。我们注意到, 这样的技术可解决执行器选择的对偶问题, 即在矩阵 A 和 C 都给定的情况下, 找到矩阵 B , 使得由三元组 (A, B, C) 所表示的系统具有预先指定的结构特性。在这一章里, 对于复标量集合 \mathcal{W} , 如果对于任何 $w \in \mathcal{W}$, 它的复共轭 $w^* \in \mathcal{W}$, 则称 \mathcal{W} 是自共轭的。

9.2 有限和无限零点结构的同时配置

我们从 SISO 系统的有限和无限零点结构的同时配置着手。这是由于该问题的解要相对简单和具有启发性, 对于理解 MIMO 系统的结果推导也是有帮助的。

9.2.1 SISO 系统

我们在这一小节中考虑系统(9.1.1)在 $m=1$ 时的有限和无限零点配置问题。首先有以下的定理, 它的证明是构造性的, 给出了一组输出矩阵集合 Ω 的显式表达。对于 Ω 中的任何一个元素, 相应的系统都具有期望的有限和无限零点结构。

定理 9.2.1 考虑由 (A, B) 所表示的无检测系统(9.1.1), 其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 。令 $\mathcal{C} := \{k_1\}$ 为 (A, B) 的可控性指数, n_0 为不可控的模态数。同时令 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_0}\}$ 为 (A, B) 的不可控模态。则对任何给定的整数 $q_1, 0 < q_1 \leq k_1$, 和一组自共轭标量 $\{z_1, z_2, \dots, z_{k_1 - q_1}\}$, 存在一个非空的输出矩阵集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^{1 \times n}$, 使得对任何 $C \in \Omega$ 所形成的系统 (A, B, C) , 在 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_0}, z_1, z_2, \dots, z_{k_1 - q_1}\}$ 有 $n_0 + k_1 - q_1$ 个不变零点, 并且具有无限零点结构 $S_\infty^* = \{q_1\}$, 即 (A, B, C) 的相对阶等于 q_1 。

证明 根据定理 4.4.1, 存在非奇异的状态和输入变换 T_s 和 T_i , 能把 (A, B) 变换成式(4.4.7)所示形式的可控结构规范形。下面把式(4.4.7)重新写为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1 - q_1 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{q_1 - 1} \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (9.2.1)$$

其中, \star 表示无关紧要的矩阵。

令

$$a(s) := s^{k_1 - q_1} + a_1 s^{k_1 - q_1 - 1} + \dots + a_{k_1 - q_1} \quad (9.2.2)$$

为根在 $z_1, z_2, \dots, z_{k_1 - q_1}$ 的多项式。同时定义

$$\underline{a} := [a_{k_1-q_1-1} \quad \cdots \quad a_2 \quad a_1],$$

则期望的输出矩阵集合为

$$\Omega := \{C \in \mathbb{R}^{1 \times n} \mid C = \alpha [d \quad a_{k_1-q_1} \quad \underline{a} \quad 1 \quad 0] T_s^{-1}, 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{1 \times n_0}\} \quad (9.2.3)$$

我们在下面要证明,对任何 $C \in \Omega$,所产生的系统具有定理 9.2.1 所陈述的特性。定义

$$\hat{A}_{aa} := \begin{bmatrix} 0 & I_{k_1-q_1-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad \hat{E}_{da} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}', \quad \hat{K}_a := [a_{k_1-q_1} \quad \underline{a}]' \quad (9.2.4)$$

和

$$\hat{A}_{dd} := \begin{bmatrix} 0 & I_{q_1-1} \\ \star & \star \end{bmatrix}', \quad \hat{C}_d := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}', \quad \hat{B}_d := [1 \quad 0]'. \quad (9.2.5)$$

不难发现, $(\hat{A}_{aa}, \hat{E}_{da})$ 是可观的, 以及

$$\hat{A}_{aa}^c := \hat{A}_{aa} - \hat{K}_a \hat{E}_{da}$$

的特征值在 $z_1, z_2, \dots, z_{k_1-q_1}$ 。也很容易验证, 系统 (A, B, C) 和 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ 有同样的有限(不变)零点和无限零点结构, 其中

$$\hat{A} := \tilde{A}' = \begin{bmatrix} A'_o & 0 & \star \cdot \hat{C}_d \\ 0 & \hat{A}_{aa} & \star \cdot \hat{C}_d \\ 0 & \hat{B}_d \hat{E}_{da} & \hat{A}_{dd} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} := \begin{bmatrix} \underline{d}' \\ \hat{K}_a \\ \hat{B}_d \end{bmatrix}$$

和

$$\hat{C} := \tilde{B}' = [0 \quad 0 \quad \hat{C}_d].$$

从定理 8.2.1 的证明可知, 存在一个非奇异状态变换 T , 使得

$$T^{-1} \hat{A} T = \begin{bmatrix} A'_o & \underline{d}' \hat{E}_{da} & \star \cdot \hat{C}_d \\ 0 & \hat{A}_{aa}^c & \star \cdot \hat{C}_d \\ 0 & \hat{B}_d \hat{E}_{da} & \hat{A}_{dd}^* \end{bmatrix}, \quad T^{-1} \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{B}_d \end{bmatrix}$$

和

$$\hat{C} T = [0 \quad 0 \quad \hat{C}_d],$$

这里

$$\hat{A}_{dd}^* := \hat{A}_{dd} + \hat{B}_d \cdot \star. \quad (9.2.6)$$

注意, 现在的 $(T^{-1} \hat{A} T, T^{-1} \hat{B}, \hat{C} T)$ 已经是定理 5.2.1 的特殊坐标基(SCB)形式了。因而根据特殊坐标基(SCB)的性质可知 $(T^{-1} \hat{A} T, T^{-1} \hat{B}, \hat{C} T)$, 或等价地, (A, B, C) 有一个

无限零点结构 $S_{\infty}^* = \{q_1\}$, 和位于

$$\lambda(A'_o) \cup \lambda(\hat{A}_{aa}^c) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_o}, z_1, z_2, \dots, z_{k_1 - q_1}\} \quad (9.2.7)$$

的不变(有限)零点。这就完成了定理 9.2.1 的证明。 ■

下面的推论表明,式(9.2.3)中的 Ω 是完全的(complete)。

推论 9.2.1 由式(9.2.3)给出的输出矩阵集合 Ω 是完全的,即对于任何一个输出矩阵 C 所产生的系统 (A, B, C) , 若具有定理 9.2.1 所列特性,则 C 属于 Ω 。

证明 令 C 所产生的系统 (A, B, C) 的不变零点位于 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_o}\} \cup \{z_1, z_2, \dots, z_{k_1 - q_1}\}$, 具有相对阶 $q_1 \leq k_1$ 。很显然, C 能够写成和式(9.2.1)相对应的形式

$$C = [d \quad e \quad h \quad g \quad \underline{z}] T_s^{-1}, \quad (9.2.8)$$

其中, $d \in \mathbb{R}^{1 \times n_o}$, $e \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^{1 \times (k_1 - q_1 - 1)}$, $g \in \mathbb{R}$ 和 $\underline{z} \in \mathbb{R}^{1 \times (q_1 - 1)}$ 。注意到

$$\begin{aligned} [A^{q_1} B \quad \dots \quad AB \quad B] &= T_s [\tilde{A}^{q_1} \tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A} \tilde{B} \quad \tilde{B}] T_s^{-1} \\ &= T_s \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \dots & 1 & 0 \\ \star & \dots & \star & 1 \end{bmatrix} T_s^{-1}, \end{aligned}$$

则不难验证, (A, B, C) 的相对阶为 q_1 , 即

$$CB = CAB = \dots = CA^{q_1 - 1} B = 0, \quad (9.2.9)$$

而 $CA^{q_1} B \neq 0$ 表明 $\underline{z} = 0$ 和 $g \neq 0$, 所以有

$$C = \alpha [d/\alpha \quad e/\alpha \quad h/\alpha \quad 1 \quad 0] T_s^{-1},$$

其中, $\alpha = g$ 。采用和式(9.2.4)~式(9.2.6)相同的过程, 可以证明, (A, B, C) 的不变零点为 $\lambda(A_o) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_o}\}$, 以及

$$\lambda(\hat{A}_{aa} - [e/\alpha \quad h/\alpha]' \hat{E}_{da}) = \{z_1, z_2, \dots, z_{k_1 - q_1}\}. \quad (9.2.10)$$

因为 $(\hat{A}_{aa}, \hat{E}_{da})$ 是一个单输出的系统, $[e/\alpha \quad h/\alpha]'$ 由闭环特征值 $\{z_1, z_2, \dots, z_{k_1 - q_1}\}$ 惟一地确定, 所以

$$[e/\alpha \quad h/\alpha] = [a_{k_1 - q_1} \quad a] \quad (9.2.11)$$

并且 $C \in \Omega$ 。

我们用下面的例子来演示上面的结果。

例 9.2.1 考虑

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (9.2.12)$$

很容易看出, (A, B) 已经是可控结构分解形式了, 可控性指数 $C = \{3\}$ 。则根据定理 9.2.1 知道, 可以选择输出矩阵, 以使形成的系统具有: ① $S_\infty^* = \{3\}$ 的无限零点结构, 没有不变零点; ② $S_\infty^* = \{2\}$, 有一个不变零点; ③ $S_\infty^* = \{1\}$, 有两个不变零点。配备下面输出矩阵的系统具有这样的特性,

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha[1 \quad 0 \quad 0], \\ C_2 &= \alpha[a_1 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

和

$$C_3 = \alpha[a_2 \quad a_1 \quad 1],$$

其中, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ 。只要计算相应的传递函数, 就很容易验证这些。于是有

$$\begin{aligned} H_1(s) &:= C_1(sI_3 - A)^{-1}B = \frac{\alpha}{s(s^2 - 1)}, \\ H_2(s) &:= C_2(sI_3 - A)^{-1}B = \frac{\alpha(s + a_1)}{s(s^2 - 1)} \end{aligned}$$

和

$$H_3(s) := C_3(sI_3 - A)^{-1}B = \frac{\alpha(s^2 + a_1s + a_2)}{s(s^2 - 1)}.$$

9.2.2 MIMO 系统

我们现在来解 MIMO 系统的有限和无限零点结构同时配置的问题。如同 SISO 情形, 首先以定理的方式陈述结果, 然后给出构造性的证明, 该证明给出了输出矩阵集合 Ω 的一个显式表达, 使得对于任何 $C \in \Omega$, 所产生的系统 (A, B, C) 都是方可逆的, 且具有指定的有限和无限零点结构。我们将在评注中对构造性过程进行总结, 以便让读者更容易地掌握算法。

定理 9.2.2 考虑由 (A, B) 所表示的无检测系统 (9.1.1), 其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。假设 B 是满秩的。令 (A, B) 的可控性指数为 $C := \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, (A, B) 有 n_0 个不可控模态, 设 $(v_1, v_2, \dots, v_{n_0})$ 就是 (A, B) 的不可控模态。则对于任何一组整数 $S_\infty^* := \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, $0 < q_i \leq k_i, i = 1, 2, \dots, m$, 和一组自共轭标量 $\{z_1, z_2, \dots, z_l\}$, $l := \sum_{i=1}^m (k_i - q_i)$, 存在一个非空的输出矩阵集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^{m \times n}$, 使得 $C \in \Omega$ 对所形成的系统 (A, B, C) 具有下面的特性:

1. (A, B, C) 是方的和可逆的。
2. (A, B, C) 在 $\{v_1, \dots, v_{n_0}, z_1, \dots, z_l\}$ 有 $n_0 + l$ 个不变零点。
3. (A, B, C) 有一个无限零点结构 $S_\infty^* = \{q_1, \dots, q_m\}$ 。

证明 根据定理 4.4.1 可得, 存在非奇异的变换 T_s 和 T_t , 使得 (A, B) 能被变换到式 (4.4.7) 所示的可控结构分解形式。接下来, 把 \tilde{A} 和 \tilde{B} 重新写为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_1-q_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{q_1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{k_m-q_m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & I_{q_m-1} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}, \quad (9.2.13)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.2.14)$$

并定义

$$\tilde{A}_{aa} := \begin{bmatrix} 0 & I_{k_1-q_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{k_m-q_m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.15)$$

和

$$\tilde{L}_{ad} := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.2.16)$$

注意, $(\tilde{A}_{aa}, \tilde{L}_{ad})$ 是可控的, 实际上也是可控结构分解形式。我们也定义

$$\mathbf{F}_a := \{\tilde{F}_a \in \mathbb{R}^{m \times l} \mid \lambda(\tilde{A}_{aa} - \tilde{L}_{ad} \tilde{F}_a) = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}\}. \quad (9.2.17)$$

对任何 $\tilde{F}_a \in \mathbf{F}_a$, 我们参照式(9.2.16), 把它划分为

$$\tilde{F}_a = \begin{bmatrix} F_{11}^0 & F_{11}^1 & \cdots & F_{1m}^0 & F_{1m}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{m1}^0 & F_{m1}^1 & \cdots & F_{mm}^0 & F_{mm}^1 \end{bmatrix}, \quad (9.2.18)$$

参照式(9.2.13)和式(9.2.14), 定义一个相应的 $m \times n$ 矩阵

$$\tilde{C} := \begin{bmatrix} K_1 & F_{11}^0 & F_{11}^1 & 1 & 0 & \cdots & F_{1m}^0 & F_{1m}^1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_m & F_{m1}^0 & F_{m1}^1 & 0 & 0 & \cdots & F_{mm}^0 & F_{mm}^1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.2.19)$$

其中,

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_m \end{bmatrix} \quad (9.2.20)$$

是任意的 $m \times n_0$ 维矩阵。所要的矩阵集合 Ω 为

$$\Omega := \{C \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid C = \Gamma \tilde{C} T_s^{-1}, \text{ 其中 } \tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n_0}, \tilde{F}_a \in \mathbf{F}_a, \Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ 和 } \det(\Gamma) \neq 0\}. \quad (9.2.21)$$

我们现在对任何 $C \in \Omega$ 来证明系统 (A, B, C) 的特性。由于 (A, B, C) 和 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 是通过一些非奇异变换 T_s, T_i 和 Γ 相关联的, 所以两者的无限和有限零点结构是相同的。

观察 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 的结构可见, 存在一个置换矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$P^{-1} \tilde{A} P = \begin{bmatrix} A_o & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{aa} & \tilde{L}_{ad} \tilde{C}_d \\ 0 & \tilde{B}_d \star & \tilde{A}_{dd} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{B}_d \end{bmatrix},$$

和

$$\tilde{C} P = [\tilde{K} \quad \tilde{F}_a \quad \tilde{C}_d],$$

其中

$$\tilde{A}_{dd} := \begin{bmatrix} 0 & I_{q_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{q_m-1} \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{C}_d := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

如同 SISO 的情况一样,采用定理 8.2.1 的对偶方式,可以证明 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$,或等价地,系统 (A, B, C) 有一个无限零点结构 $S_\infty^* = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$,不变零点位于

$$\lambda(A_o) \cup \lambda(\tilde{A}_{ad} - \tilde{L}_{ad} \tilde{F}_a) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_o}, z_1, z_2, \dots, z_l\}.$$

这就完成了定理 9.2.2 的证明。 ■

现在有下面的评注。

评注 9.2.1

1. (A, B) 的不可控模态被自动地包含在 (A, B, C) 的不变零点中,这里的 C 是任何一个使得 (A, B, C) 是方的和可逆的矩阵。因此,定理 9.2.1 和定理 9.2.2 中的不变零点 v_1, v_2, \dots, v_{n_o} 是不能被重新配置的,但是它们可以被排除在左可逆或不可逆系统的不变零点以外。当我们在下一节中处理一般的结构配置问题时,会实现这一点。

2. 遗憾的是,通过例子可以证明式(9.2.21)中的 Ω 在 $m > 1$ 情况下并不是完全的,即存在一个输出矩阵 C ,使得所产生的系统 (A, B, C) 具有定理 9.2.2 所列出的所有特性,但是 $C \notin \Omega$ 。

评注 9.2.2 我们注意到,输出矩阵集合 Ω 的构造已经隐含在定理 9.2.2 的证明过程中了。我们用下面几点来总结产生这个集合 Ω 的易于掌握的步骤。

1. 给定一个矩阵对 (A, B) ,计算非奇异的变换 T_s 和 T_i ,使得 $(T_s^{-1}AT_s, T_s^{-1}BT_i)$ 为可控结构分解形式,可控性指数为 $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ 。

2. 用一组整数 $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ 确定所产生系统期望的无限零点结构,其中 $0 < q_i \leq k_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。

3. 确定期望的自共轭不变零点 $\{z_1, z_2, \dots, z_l\}$,其中 $l = \sum_{i=1}^m (k_i - q_i)$ 。

4. 定义如同式(9.2.15)和式(9.2.16)那样的 $(\tilde{A}_{ad}, \tilde{L}_{ad})$,计算式(9.2.17)中的 F_a 集合。

5. 最后,计算式(9.2.21)的期望输出矩阵集合 Ω 。

我们用下面的例子来演示定理 9.2.2。

例 9.2.2 考虑一个两输入系统

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u. \quad (9.2.22)$$

利用[87]软件包,我们得到

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_i = I_2,$$

(A, B) 的可控结构分解形式为

$$\tilde{A} = T_s^{-1}AT_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T_s^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

具有可控指数 $C = \{2, 2\}$ 。采用定理 9.2.2 证明的步骤,我们得到一组输出矩阵

$$\Omega_1 = \left\{ \Gamma \begin{bmatrix} a_1 & 1 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 & 1 \end{bmatrix} T_s^{-1} \mid a_1 + a_4 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = 2, \right. \\ \left. \Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ 及 } \det(\Gamma) \neq 0 \right\}$$

这样,由任何 $C \in \Omega_1$ 所产生的系统 (A, B, C) 都有一个无限零点结构 $S_\infty^* = \{1, 1\}$ 和两个位于 $-1 \pm j1$ 的不变零点。以下是得到的另一个输出矩阵集合,

$$\Omega_2 = \left\{ \Gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_s^{-1} \mid a \in \mathbb{R}, \Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ 及 } \det(\Gamma) \neq 0 \right\}.$$

很容易验证,对任何 $C \in \Omega_2$, 所得到的系统 (A, B, C) 具有无限零点结构 $S_\infty^* = \{1, 2\}$ 和一个位于 -1 的不变零点。

9.3 完全结构配置

学习完前一章的所有线性系统结构特性以后,即有限零点和无限零点结构以及可逆性结构,我们现在可以在下面的定理中给出一般系统的结构配置。

定理 9.3.1 考虑式(9.1.1)所描述的无检测系统,其中 B 是满秩的。令 (A, B) 的可控性指数为 $C = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, (A, B) 如果存在不可控模态的话,则由 $\Delta = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_0}\}$ 给出。令

$$\Lambda_2 := \{l_1, l_2, \dots, l_{m_c}\} \subset C := \{k_1, k_2, \dots, k_m\}, \quad (9.3.1)$$

$$C \setminus \Lambda_2 := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m_d}\}, \quad m_d = m - m_c, \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{m_d}, \quad (9.3.2)$$

$$\Lambda_4 := \{q_1, q_2, \dots, q_{m_d}\}, \quad q_i \leq \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_d. \quad (9.3.3)$$

令 Λ_1 是一组复标量集合

$$\Lambda_1 = \Theta_c \cup \Delta_1 := \{z_1, z_2, \dots, z_{s_1}\} \cup \Delta_1 \quad (9.3.4)$$

其中, Θ_c 是自共轭的, $\Delta_1 \subset \Delta$ 也是。为简便起见, 假设 $\Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_1$ 中的元素是各不相同的, 而且 s_1 的选择满足

$$s_1 \leq n - \sum_{i=1}^{m_c} l_i - \sum_{i=1}^{m_d} q_i - n_o. \quad (9.3.5)$$

最后令

$$\Lambda_3 := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p_b}\} \quad (9.3.6)$$

为一组正整数, 其中 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{p_b}$, 满足约束条件

$$s_1 + n_o + \sum_{i=1}^{p_b} \mu_i + \sum_{i=1}^{m_c} l_i + \sum_{i=1}^{m_d} q_i = n, \quad (9.3.7)$$

则存在一个非空的集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^{(m_d + p_b) \times n}$, 使得对任何 $C \in \Omega$, 由矩阵三元组 (A, B, C) 所表示的系统具有下面的特性: 它的不变零点为 Λ_1 , 它的不变指数为 $\mathbf{I}_2 = \Lambda_2, \mathbf{I}_3 = \Lambda_3$ 和 $\mathbf{I}_4 = \Lambda_4$, 或等价地, 三元组 (A, B, C) 的无限零点结构为 Λ_1 , 可逆结构分别为 Λ_2 和 Λ_3 。图 9.3.1 以图形的方式总结了以上的一般结构配置。

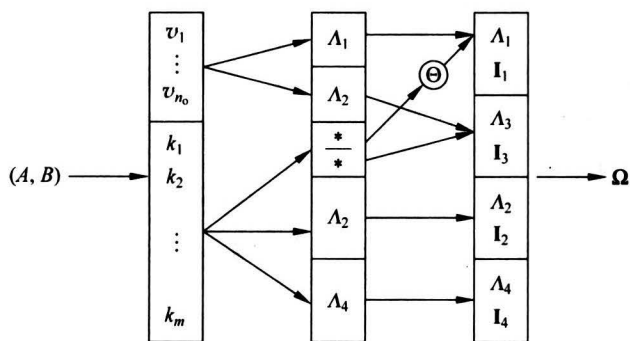


图 9.3.1 一般结构配置的示意图

证明 我们将给出产生所需要的集合 Ω 的构造性证明。首先引入下面的关键性引理, 它对定理 9.3.1 的证明非常重要。

引理 9.3.1 考虑一个由 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 三元组所表示的线性系统 $\tilde{\Sigma}$, 假设已经是定理 5.4.1 的特殊坐标基 (SCB) 形式, 或者是式 (5.4.21)~式 (5.4.23) 的简明形式, 即

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{na} & L_{ab}C_b & 0 & L_{ad}C_d \\ 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd}C_d \\ B_c E_{ca} & L_{cb}C_b & A_{cc} & L_{cd}C_d \\ B_d E_{da} & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_c \\ B_d & 0 \end{bmatrix} \quad (9.3.8)$$

和

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.3.9)$$

令

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A_{aa} & M_{ab} & 0 & M_{ad} \\ 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd}C_d \\ B_c E_{ca} & B_c E_{cb} & A_{cc} & M_{cd} \\ B_d E_{da} & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix}, \quad (9.3.10)$$

其中, M_{ab} 、 M_{ad} 、 M_{bd} 和 M_{cd} 是具有适当维数的矩阵, 则矩阵三元组 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 具有与 $\tilde{\Sigma}$ 同样的结构不变指数 I_1 、 I_2 、 I_3 和 I_4 。

只要从常规上考虑转置的系统 $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}')$ 和 $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}')$, 就可以证明该引理。从定理 5.3.1 的证明过程中的 SCB 步骤 8 就可以得到结果。

我们现在可以给出定理 9.3.1 的详细证明了。根据定理 4.4.1, 存在非奇异的状态和输入变换 T_o 和 T_i , 使得变换对

$$(A_1, B_1) := (T_o^{-1}AT_o, T_o^{-1}BT_i) \quad (9.3.11)$$

为式(4.4.7)所示的可控结构分解形式, 具有可控性指数 $C = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ 。根据特殊坐标系(SCB)的性质, 不难发现所形成系统的 B_1 中, 每个输入通道都可以配置到和 x_c 或者是和 x_d 相关联的状态变量。然而, 如果把某一特定输入通道配置成所期望系统之 x_c 的一部分, 必须把与该输入通道相关联的整块都搭进去。这是由于以下两个原因: 1) 整个块对输入通道来说是可控的; 2) x_a 和 x_b 的动态不能被和 x_c 相关联的输入通道所控制。另一方面, 和 x_d 相关的结构并没有这样的约束, 即无限零点结构。

令 Λ_2 和 Λ_4 分别如式(9.3.1)和式(9.3.3)所给, 并且

$$n_c = \sum_{i=1}^{m_c} l_i \quad \text{和} \quad n_d = \sum_{i=1}^{m_d} q_i. \quad (9.3.12)$$

不难验证, 存在置换 P_1 和 P_{i1} , 使得

$$A_2 = P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{bmatrix} A_o & 0 & 0 \\ B_c \cdot \star & A_{cc} & B_c \cdot \star \\ \tilde{B}_d \cdot \star & \tilde{B}_d \cdot \star & A_d \end{bmatrix}$$

和

$$B_2 = P_1^{-1}B_1P_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_c & 0 \\ 0 & \tilde{B}_d \end{bmatrix},$$

其中

$$A_{cc} := \begin{bmatrix} 0 & I_{l_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{l_{m_c}-1} \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_s := \begin{bmatrix} 0 & I_{\omega_1-q_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{q_1-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{\omega_{m_d}-q_{m_d}-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & I_{q_{m_d}-1} \\ \star & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

其中, \star 是无关紧要的子矩阵。

现在不难发现, 存在另一对置换矩阵 P_2 和 P_{i2} , 使得变换对

$$(A_3, B_3) := (P_2^{-1} A_2 P_2, P_2^{-1} B_2 P_{i2})$$

具有下面的形式:

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{ab}^* & 0 & \star \\ B_c \cdot \star & B_c \cdot \star & A_{cc} & B_c \cdot \star \\ B_d \cdot \star & B_d \cdot \star & B_d \cdot \star & A_{dd}^* + B_d \cdot \star \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_c \\ B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.3.13)$$

其中

$$A_{dd}^* = \begin{bmatrix} 0 & I_{q_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{q_{m_d}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (9.3.14)$$

和

$$A_{ab}^* = \begin{bmatrix} 0 & I_{\omega_1-q_1-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{\omega_{m_d}-q_{m_d}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

我们现在定义

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

该形式对应了式(9.3.14)中的 A_{dd}^* 和 B_d 。进一步定义

$$C_3 = [0 \ 0 \ 0 \ C_d], \quad (9.3.15)$$

它和式(9.3.13)中的 A_3 和 B_3 相对应。引理 9.3.1 的结果表明,存在一个非奇异状态变换 T_3 ,使得

$$A_4 = T_3^{-1} A_3 T_3 = \begin{bmatrix} A_{ab} & 0 & L_{abd} C_d \\ B_c \bullet \star & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d \bullet \star & B_d \bullet \star & A_{dd}^* + B_d \bullet \star \end{bmatrix},$$

$$B_4 = T_3^{-1} B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_c \\ B_d & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_4 = C_3 T_3 = C_3 = [0 \ 0 \ C_d],$$

其中

$$A_{ab} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ 0 & A_{ab}^* \end{bmatrix}, \quad L_{abd} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_{abd}^* \end{bmatrix}. \quad (9.3.16)$$

根据特殊坐标基(SCB)的特性,很容易看出,三元组 (A_4, B_4, C_4) 是特殊坐标基(SCB)的形式,具有结构不变指数 $\mathbf{I}_2 = \Lambda_2, \mathbf{I}_4 = \Lambda_4, \mathbf{I}_3$ 是空的,它的不变零点是 $\lambda(A_{ab})$ 。

接下来,定义一个新的输出矩阵

$$\tilde{C}_4 := C_4 + [K_c \ 0 \ 0] = [K_c \ 0 \ C_d], \quad (9.3.17)$$

其中

$$K_c = [K_{c1} \quad K_{c2}],$$

它的划分和式(9.3.16)中的 A_{ab} 和 L_{abd} 相对应, K_{c1} 是具有适当维数的任意矩阵, K_{c2} 的选择要满足

$$\Theta_c \subset \lambda(A_{ab}^* - L_{abd}^* K_{c2}),$$

而剩下的 $A_{ab}^* - L_{abd}^* K_{c2}$ 的特征值为实且各不相同, 而且不同于 Δ_2 中的元素。因为矩阵对 (A_{ab}^*, L_{abd}^*) 是可控的, 所以这些都是可以实现的。对于对偶化定理 8.2.1, 可以证明, 存在状态变换 T_4 , 使得

$$A_5 = T_4^{-1} A_4 T_4 = \begin{bmatrix} A_{ab} - L_{abd} K_c & 0 & \tilde{L}_{abd} C_d \\ B_c \bullet \star & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d \bullet \star & B_d \bullet \star & A_{dd} + B_d \bullet \star \end{bmatrix},$$

$$B_5 = T_4^{-1} B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_c \\ B_d & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_5 := \tilde{C}_4 T_4 = [0 \quad 0 \quad C_d].$$

同样地, 三元组 (A_5, B_5, C_5) 是特殊坐标基 (SCB) 的形式, 和三元组 (A_4, B_4, C_4) 具有同样的结构指数 $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ 和 \mathbf{I}_4 。而且它的不变零点由 $A_{ab} - L_{abd} K_c$ 的特征值给出, 矩阵 $A_{ab} - L_{abd} K_c$ 可重新写为

$$A_{ab} - L_{abd} K_c = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ -L_{abd}^* K_{c1} & A_{ab}^* - L_{abd}^* K_{c2} \end{bmatrix}.$$

接下来找到变换 T_{ab} , 使得 $A_{ab} - L_{abd} K_c$ 被变换为

$$\tilde{A}_{ab} = T_{ab}^{-1} (A_{ab} - L_{abd} K_c) T_{ab} = \begin{bmatrix} A_{aa} & M_{ab} \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix},$$

其中, $\lambda(A_{aa}) = \Delta_1 = \Delta_1 \cup \Theta_c$, Θ_c 由式(9.3.4)给出, A_{bb} 是对角矩阵。令

$$T_5 = \begin{bmatrix} T_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

则可得

$$A_6 = T_5^{-1} A_5 T_5 = \begin{bmatrix} A_{aa} & M_{ab} & 0 & L_{ad} C_d \\ 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd} C_d \\ B_c \bullet \star & B_c \bullet \star & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d \bullet \star & B_d \bullet \star & B_d \bullet \star & A_{dd} + B_d \bullet \star \end{bmatrix},$$

$$B_6 = T_5^{-1} B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_c \\ B_d & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_6 := C_5 T_5 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad C_d].$$

余下要做的工作是配置结构不变指数 \mathbf{I}_3 为给定集合 $\Lambda_3 = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p_b}\}$, 这可以通过选择下面的输出矩阵来实现:

$$\tilde{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$C_b = \begin{bmatrix} C_{b_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_{b_{p_b}} \end{bmatrix},$$

这里的 $C_{b_i}, i=1, 2, \dots, p_b$, 是一个所有元素非零的 $1 \times \mu_i$ 矢量。再次利用引理 9.3.1 的结果, 可以证明, 由 (A_6, B_6, \tilde{C}_6) 所代表的三元组的不变零点在 $\lambda(A_{aa})$, 它的结构不变指数分别是 $\mathbf{I}_2 = \Lambda_2, \mathbf{I}_3 = \Lambda_3$ 和 $\mathbf{I}_4 = \Lambda_4$ 。令 $p = m_d + p_b$, 最终得到期望的集合

$$\Omega = \left\{ \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} (T_0 P_1 P_2 T_3 T_4 T_5)^{-1} \mid \Gamma_0 \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ 是非奇异的} \right\}. \quad (9.3.18)$$

这就完成了定理 9.3.1 的证明。 ■

下面是一些评注。

评注 9.3.1 如果 Λ_2 集合是空的, 则所得到的系统是左可逆的。类似地, 如果 Λ_3 集合是空的, 所得到的系统是右可逆的。

评注 9.3.2 注意, 如果 Λ_2 中的元素有相同的, 则配置 Λ_3 稍微有些复杂。我们必须利用定理 4.2.2 的实 Jordan 规范形的结果来配置 Λ_3 , 即根据 A_0 中被分配到 Λ_3 的那部分之实 Jordan 块结构来进行配置。

现在用下面两个例子来说明我们的结果。在第一个例子中, 采用定理 9.3.1 证明中的算法, 产生一组定常矩阵, 其中的任何一个都能使所产生的系统具有期望的不变指数 $\mathbf{I}_1 \sim \mathbf{I}_4$ 。在第二个例子中, 我们研究一个由 Wie 和 Bernstein^[149] 提出来的挠性机械系统鲁棒控制的基准范题。我们将辨识一组传感器, 在 H_∞ 几乎干扰解耦的框架下能产生最佳的性能。

例 9.3.1 考虑下面的线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u. \quad (9.3.19)$$

根据定理 4.4.1 和 [87] 的工具箱, 得到下面的状态和输入变换:

$$T_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.516398 & -0.258199 & -0.512989 & -0.307794 & -0.102598 \\ 0 & -0.258199 & -0.258199 & -0.205196 & -0.205196 & -0.102598 \\ 0 & 0 & -0.258199 & -0.102598 & -0.205196 & -0.102598 \\ 0 & 0 & 0 & -0.102598 & -0.102598 & -0.102598 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.102598 & -0.102598 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.102598 \end{bmatrix}$$

和

$$T_i = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.258199 & 0 \\ 0 & 0 & -0.102598 \end{bmatrix},$$

它把给定矩阵对 (A, B) 变换到下面的可控结构分解形式,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.032796 & 0 & 1.025978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.936492 & 2 & 1 & 1.986799 & 1.192079 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4.873397 & 5.033223 & 2.516611 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

具有可控性指数 $C = \{1, 2, 3\}$ 。根据定理 9.3.1 的结果, 我们有以下关于 $\Lambda_1 \sim \Lambda_4$ 的容许选择,

$$\Lambda_2 = \{1\}, \quad \Lambda_4 = \{1, 1\}, \quad \Lambda_1 = \{-3\}, \quad \Lambda_3 = \{2\}.$$

从定理 9.3.1 的证明可得 $P_1 = I$,

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$T_3 = I$, 和

$$A_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_{abd} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

现在,很容易验证,对于增益矩阵 K_c ,

$$K_c = \begin{bmatrix} -0.072739 & 0.031699 & 2.214148 \\ 2.234751 & -0.973901 & 1.072739 \end{bmatrix},$$

$A_{ab} - L_{abd}K_c$ 的特征值被配置在 $-3, 0$ 和 2 。第一个特征值的选择和 Λ_1 的要求相一致,其他两个则选得互不相同。接下来,我们继续定理 9.3.1 的证明过程,得到

$$T_4 = \begin{bmatrix} 0.183616 & -0.399509 & -0.334800 & 0 & 0 & 0 \\ -0.085347 & -0.916729 & 0.144674 & 0 & 0 & 0 \\ 0.256040 & 0 & 0.289349 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707107 & 0 & 0 \\ -0.550849 & 0 & -0.669600 & 0 & 1 & 0 \\ -0.768121 & 0 & 0.578698 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$T_5 = I$, 以及

$$\tilde{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中, $\alpha_1 \neq 0$ 和 $\alpha_2 \neq 0$ 。最后,得到期望的输出矩阵集合为

$$\Omega = \left\{ \Gamma_o \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_x \mid \Gamma_o \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ 和 } \det(\Gamma_o) \neq 0 \right\},$$

其中

$$\Gamma_x = \begin{bmatrix} 0 & -6.76078 & 6.76078 & 14.17556 & -37.56982 & 23.39426 \\ 0 & 1.57356 & -1.57356 & 7.33281 & -7.20391 & -0.12890 \\ 0 & 5.98250 & -5.98250 & -12.54373 & -0.44033 & 12.98406 \\ 2.82843 & -5.65685 & 2.82843 & -5.65685 & 2.82843 & 2.82843 \\ 0 & 0.28172 & -4.15470 & 3.28230 & -17.11718 & 17.70786 \\ 0 & -8.65515 & 8.65515 & 18.14757 & -28.60333 & 0.70897 \end{bmatrix}.$$

现在利用[87]的工具箱很容易验证,当 C 从 Ω 选择时,所形成的矩阵三元组 (A, B, C) 的确实有不变零点在 -3 , 且具有不变指数 $\mathbf{I}_2 = \Lambda_2 = \{1\}$, $\mathbf{I}_3 = \Lambda_3 = \{2\}$ 和 $\mathbf{I}_4 = \{1, 1\}$ 。

例 9.3.2 我们考虑由 Wie 和 Bernstein^[149] 提出的挠性机械系统鲁棒控制的基准范题。尽管问题很简单,但作为一个有趣的例子,体现了传感器的选择是如何改变设计的性能的。问题是要通过对第一个质量块施加作用力来控制第二个质量块的位移,如图 9.3.2 所示。

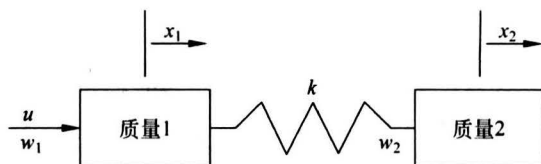


图 9.3.2 一个双质量弹簧挠性机械系统

系统的动态模型为

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + u + w_1, \quad (9.3.20)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + w_2, \quad (9.3.21)$$

或者是用状态空间来表示,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & 0 & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

其中, x_1 和 x_2 分别是质量块 1(质量为 m_1) 和质量块 2(质量为 m_2) 的位置, k 是弹性常数, u 是输入力, w_1 和 w_2 是摩擦(扰动)。为简单起见, 设 $m_1 = m_2 = 1$ 和 $k = 1$ 。很自然, 要定义被控输出为 $h = x_2$, 即第二个质量块的位置。所以, 用于鲁棒控制综合的对象模型为

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (9.3.22)$$

和

$$h = C_2 x = [0 \ 0 \ 1 \ 0]x. \quad (9.3.23)$$

不难验证, 子系统 (A, B, C_2) 是最小相位和可逆的。因此在全状态反馈下, 扰动 w 可以完全从被控输出 h 中解耦。我们的下一个目标是要辨识出测量输出集, 或者是传感器的位置, 使之能产生和状态反馈同样的性能。根据[22, 147]的结果, 只要选择测量输出

$$y = C_1 x, \quad (9.3.24)$$

使得所产生的子系统 (A, E, C_1) 是左可逆和最小相位的, 就有可能实现这一目标。采用前一节的过程, 首先把 (A, E) 变换到定理 4.4.1 的可控结构分解(CSD)形式, 这只要有状态和输入变换

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0.316228 & 0 & 0.707107 & 0 \\ 0 & 0.316228 & 0 & 0.707107 \\ -0.316228 & 0 & 0.707107 & 0 \\ 0 & -0.316228 & 0 & 0.707107 \end{bmatrix}$$

和

$$T_i = \begin{bmatrix} 0.316228 & 0.707107 \\ -0.316228 & 0.707107 \end{bmatrix}$$

就可以做到了。(A, E)的可控结构分解为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.3.25)$$

其中,(A, E)的可控性指数为{2, 2}。根据定理 9.3.1 的证明,我们得到下面的测量矩阵集合,

$$\Omega_1 = \left\{ \Gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \middle| \Gamma_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \det(\Gamma_0) \neq 0 \right\}, \quad (9.3.26)$$

使得对任何 $C_1 \in \Omega_1$, 所产生的系统(A, E, C_1)是方可逆的,有两个 2 阶的无限零点,没有不变零点,因而是最小相位的。众所周知,高阶无限零点会导致高控制器增益,这在实际中是不可取的。我们在后面要辨识一组测量矩阵 Ω_2 ,使得对任何的 $C_1 \in \Omega_2$,所产生的子系统(A, E, C_1)是最小相位和方可逆的,有两个 1 阶的无限零点,在 -1 有两个不变零点。下面的 Ω_2 还是应用定理 9.3.1 的证明过程得到的,

$$\Omega_2 = \left\{ \Gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \middle| \Gamma_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \det(\Gamma_0) \neq 0 \right\}. \quad (9.3.27)$$

对于挠性机械系统(9.3.22)~(9.3.23),以及测量输出 $y = C_1 x$,其中 $C_1 \in \Omega_1$ 或 $C_1 \in \Omega_2$, H_∞ 几乎干扰解耦问题是是可以实现的。事实上可以证明,如果只容许放置一个传感器在系统中,就不能实现 H_∞ 几乎干扰解耦,也就是说,必须放置两个或更多的传感器在系统中,才能使得干扰(摩擦)和第二个质量块的位置实现解耦。

9.4 练习

9.1 考虑下面的线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

和

$$y = Cx = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]x,$$

它在 1 处有一个不稳定的不变零点,相对阶为 3。

(a) 确定一个新的测量矩阵 \tilde{C}_1 ,使得所产生的新系统 (A, B, \tilde{C}_1) 在 -1 处有一个不变零点,和原系统 (A, B, C) 有同样的相对阶。

(b) 确定一个新的测量矩阵 \tilde{C}_2 ,使得所产生的新系统 (A, B, \tilde{C}_2) 在 -1 和 -2 处有两个不变零点,相对阶为 2。

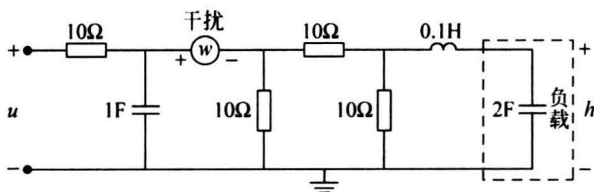
(c) 确定一个新的测量矩阵 \tilde{C}_3 ,使得所产生的新系统 (A, B, \tilde{C}_3) 在 -1、-2 和 -3 处有 3 个不变零点,相对阶为 1。

(d) 确定一个新的控制矩阵 \tilde{B}_1 ,使得所产生的新系统 (A, \tilde{B}_1, C) 在 -1 处有一个不变零点,和原系统有同样的相对阶。

(e) 确定一个新的控制矩阵 \tilde{B}_2 ,使得所产生的新系统 (A, \tilde{B}_2, C) 在 -1 和 -2 处有两个不变零点,相对阶为 2。

(f) 确定一个新的控制矩阵 \tilde{B}_3 ,使得所产生的新系统 (A, \tilde{B}_3, C) 在 -1、-2 和 -3 处有 3 个不变零点,相对阶为 1。

9.2 考虑下图中的电路系统,其中电路负载上的电压,即被控输出 h 是测量不到的,需要抑制干扰输入 w 。



练习 9.2 的电路图

(a) 验证系统从控制输入 u 到被控输出 h 的状态空间实现可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew, \\ h = C_2x + D_2u, \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 & 0 \\ 5 & -50 & -10 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.15 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1], \quad D_2 = 0, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

这里的 x_1 是电容 1F 两端的电压, x_2 是通过 0.1H 电感上的电流, 最后的 x_3 是 2F 电容两端的电压。

(b) 证明: 如果只有电感上的电流可以测量得到, 即

$$y = C_1 x + D_1 w = [0 \quad 1 \quad 0]x + 0 \cdot w,$$

则所产生的从干扰 w 到测量输出 y 的子系统是非最小相位的。在这种情况下, 无法找到一个正则的和可使系统稳定的控制器, 从而实现从 w 到 h 的 H_∞ 几乎干扰解耦。

(c) 证明: 如果 1F 电容的电压可以测量到, 即

$$y = C_1 x + D_1 w = [1 \quad 0 \quad 0]x + 0 \cdot w,$$

则所产生的从 w 到 y 的子系统是最小相位的。因而存在一个正则的和可使电路稳定的控制器, 使得干扰 w 可以几乎从被控输出 h 中解耦。

第 10 章 通过状态反馈实现 时标和特征结构配置

10.1 导论

我们在这一章中将给出现代控制系统设计中线性系统结构分解的主要应用之一,即利用状态反馈方法的渐近时标和特征结构配置(asymptotic time-scale and eigenstructure assignment,或简称为 ATEA)。这个概念最初是由 Saber 和 Sannuti^[117, 118]提出的,后经 Chen^[18]和 Chen 等^[27]的进一步完善。它在本质上是分散(decentralized)控制,实际上是从 Kokotovic 等^[75]的奇异摄动方法中衍生出来的。它利用矩阵四元组 (A, B, C, D) 所表示的线性系统的结构分解设计状态反馈增益矩阵 F ,使得所形成的闭环系统矩阵 $A+BF$ 具有预先指定的时标和特征结构。通过处理代表给定系统有限零点结构的子系统,就可以适当地配置 $A+BF$ 的预定的有限特征结构。而处理代表给定系统无限零点结构的子系统,就可以适当地配置 $A+BF$ 的渐近无限特征结构。这样的设计方法已经被广泛地应用在许多控制问题的设计中,如 H_∞ 控制(参见 Chen^[22])、 H_2 最优控制(参见 Saber 等^[120])、回路传递函数恢复(参见 Chen^[18]和 Saber 等^[116]),以及干扰解耦问题(参见 Chen^[22], Lin 和 Chen^[86],以及 Ozcetin 等^[106, 107])。我们很快就会发现,ATEA 设计技术是揭示 H_2 和 H_∞ 控制之间本质区别的好方法。

为简便起见,我们在这一章中都假设给定的连续时间(或离散时间)系统在虚轴(或单位圆)上没有不变零点。对于其他不同的应用,在虚轴(或单位圆)上有不变零点的系统的详细处理,可以在 Chen^[22], Lin 和 Chen^[86],以及 Saber 等^[120]中找到。

10.2 连续时间系统

在这一节中,我们要探讨针对连续时间系统设计的渐近时标和特征结构配置技术(ATEA),以及在解 H_2 和 H_∞ 控制问题与干扰解耦中的应用。考虑一个线性连续时间系统 Σ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (10.2.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 分别为 Σ 的状态、输入和输出。不失一般性,假设 (A, B) 是

可镇定的, $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 都是满秩。如同在前面所指的, 假设 Σ 在虚轴上没有任何不变零点。

10.2.1 设计步骤和基本特性

我们在下面给出 ATEA 设计的逐步算法。该设计方法的特性总结在定理中, 并给出详细的证明。

ATEA-C 步骤 1

把 Σ 变换到结构分解或定理 5.4.1 的特殊坐标基(SCB)形式, 即计算非奇异状态、输入和输出变换 Γ_s 、 Γ_i 和 Γ_o , 使得给定系统 Σ 能够变换到定理 5.4.1 的特殊坐标基(SCB)的形式, 也可以表示成下面的简明形式:

$$\tilde{A} = \Gamma_s^{-1} A \Gamma_s = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & L_{ab}^- C_b & 0 & L_{ad}^- C_d \\ 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & 0 & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd} C_d \\ B_c E_{ca}^- & B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & A_{cc} & L_{cd} C_d \\ B_d E_{da}^- & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & B_d E_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0a}^+ \\ B_{0b} \\ B_{0c} \\ B_{0d} \end{bmatrix} [C_{0a}^- \ C_{0a}^+ \ C_{0b} \ C_{0c} \ C_{0d}], \quad (10.2.2)$$

$$\tilde{B} = \Gamma_s^{-1} B \Gamma_i = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.2.3)$$

$$\tilde{C} = \Gamma_o^{-1} C \Gamma_s = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.2.4)$$

$$\tilde{D} = \Gamma_o^{-1} D \Gamma_i = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.2.5)$$

特别有

$$A_{dd} = A_{dd}^* + B_d E_{dd} + L_{dd} C_d, \quad (10.2.6)$$

其中, A_{dd}^+ 、 B_d 和 C_d 如第 5 章的式(5.4.26)和式(5.4.27)所给。接下来, 定义

$$A_{ss} = \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad B_{0s} = \begin{bmatrix} B_{0a}^+ \\ B_{0b} \end{bmatrix}, \quad L_{sd} = \begin{bmatrix} L_{ad}^+ \\ L_{bd} \end{bmatrix} \quad (10.2.7)$$

和

$$B_s = [B_{0s} \quad L_{sd}]. \quad (10.2.8)$$

ATEA-C 步骤 2

设 F_s 的选择满足

$$\lambda(A_{ss}^c) = \lambda(A_{ss} - B_s F_s) \subset \mathbb{C}^-, \quad (10.2.9)$$

参照式(10.2.7)和式(10.2.8), 把 F_s 划分为

$$F_s = \begin{bmatrix} F_{s0} \\ F_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{a0}^+ & F_{b0} \\ F_{a1}^+ & F_{b1} \end{bmatrix}. \quad (10.2.10)$$

根据特殊坐标基(SCB)的性质, 只要 (A, B) 是可镇定的, (A_{ss}, B_s) 就是可控的。然后, 进一步划分 $F_{s1} = [F_{a1}^+ \quad F_{b1}]$ 为

$$F_{s1} = [F_{a1}^+ \quad F_{b1}] = \begin{bmatrix} F_{a11}^+ & F_{b11} \\ F_{a12}^+ & F_{b12} \\ \vdots & \vdots \\ F_{a1m_d}^+ & F_{b1m_d} \end{bmatrix}, \quad (10.2.11)$$

其中, F_{a1i}^+ 和 F_{b1i} 的维数分别是 $1 \times n_a^+$ 和 $1 \times n_b$ 。

ATEA-C 步骤 3

令 F_c 为任意的 $m_c \times n_c$ 矩阵, 满足

$$A_{cc}^c = A_{cc} - B_c F_c \quad (10.2.12)$$

是个稳定矩阵的约束。注意, (A_{cc}, B_c) 是可控的, 所以存在这样的 F_c 。

ATEA-C 步骤 4

这一步利用由式(5.4.11)所表示的快速子系统, $i=1, 2, \dots, m_d$ 。令

$$\Lambda_i = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{iq_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m_d$$

为一组 q_i 元素的集合, 都在 \mathbb{C}^- 中, 在复共轭下是闭的, q_i 和 m_d 在定理 5.4.1 中有定义。

然后, 令 $\Lambda_d := \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_{m_d}$ 。对于 $i=1, 2, \dots, m_d$, 定义

$$p_i(s) := \prod_{j=1}^{q_i} (s - \lambda_{ij}) = s^{q_i} + F_{i1} s^{q_i-1} + \dots + F_{iq_i-1} s + F_{iq_i} \quad (10.2.13)$$

和一个子增益矩阵, 以参数 ϵ 为调节参数,

$$\tilde{F}_i(\epsilon) := \frac{1}{\epsilon^{q_i}} [F_{iq_i}, \epsilon F_{iq_i-1}, \dots, \epsilon^{q_i-1} F_{i1}]. \quad (10.2.14)$$

ATEA-C 步骤 5

在这一步中, ATEA-C 步骤 2~ATEA-C 步骤 4 所计算出来的各增益都集中在一起,

形成对给定系统 Σ 的复合状态反馈增益。令

$$\tilde{F}_{a1}^+(\epsilon) := \begin{bmatrix} F_{a11}^+ F_{1q_1} / \epsilon^{q_1} \\ F_{a12}^+ F_{2q_2} / \epsilon^{q_2} \\ \vdots \\ F_{a1m_d}^+ F_{m_d q_{m_d}} / \epsilon^{q_{m_d}} \end{bmatrix}, \quad (10.2.15)$$

$$\tilde{F}_{b1}(\epsilon) := \begin{bmatrix} F_{b11} F_{1q_1} / \epsilon^{q_1} \\ F_{b12} F_{2q_2} / \epsilon^{q_2} \\ \vdots \\ F_{b1m_d} F_{m_d q_{m_d}} / \epsilon^{q_{m_d}} \end{bmatrix} \quad (10.2.16)$$

和

$$\tilde{F}_{s1}(\epsilon) = [\tilde{F}_{a1}^+(\epsilon) \quad \tilde{F}_{b1}(\epsilon)], \quad (10.2.17)$$

则 ATEA 的状态反馈增益为

$$F(\epsilon) = -\Gamma_s(\tilde{F}(\epsilon) + \tilde{F}_0)\Gamma_s^{-1}, \quad (10.2.18)$$

其中

$$\tilde{F}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & F_{a0}^+ & F_{b0} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{F}_{a1}^+(\epsilon) & \tilde{F}_{b1}(\epsilon) & 0 & \tilde{F}_d(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & F_c & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.2.19)$$

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ E_{da}^- & E_{da}^+ & E_{db} & E_{dc} & E_{dd} \\ E_{ca}^- & E_{ca}^+ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.2.20)$$

其中的

$$\tilde{F}_d(\epsilon) = \text{diag}[\tilde{F}_1(\epsilon), \tilde{F}_2(\epsilon), \dots, \tilde{F}_{m_d}(\epsilon)]. \quad (10.2.21)$$

这就完成了连续时间系统的 ATEA 算法。

我们有下面的结果。

定理 10.2.1 考虑式(10.2.1)给定的系统 Σ 。若 $F(\epsilon)$ 如式(10.2.18)所给出,则 ATEA 状态反馈律 $u=F(\epsilon)x$ 具有下面的特性。

1. 存在一个标量 $\epsilon^* > 0$, 使得对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$, 由给定系统 Σ 和 ATEA 状态反馈律所形成的闭环系统是渐近稳定的。而且, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 闭环特征值为

$$\lambda(A_{an}^-), \quad \lambda(A_{cc}^c), \quad \lambda(A_{ss}^c) + o(\epsilon), \quad \frac{\Lambda_d}{\epsilon} + o(1). \quad (10.2.22)$$

总共有 n_d 个闭环特征值, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时具有无限负实部。

2. 令

$$C_s = \Gamma_o \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_b \end{bmatrix}, \quad D_s = \Gamma_o \begin{bmatrix} I_{m_o} & 0 \\ 0 & I_{m_d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.2.23)$$

则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 在 s 点上有

$$H(s, \epsilon) := [C + DF(\epsilon)][sI - A - BF(\epsilon)]^{-1} \rightarrow [0 \quad H_s(s) \quad 0 \quad 0] \Gamma_s^{-1}, \quad (10.2.24)$$

其中

$$H_s(s) = (C_s - D_s F_s)(sI - A_{ss} + B_s F_s)^{-1}. \quad (10.2.25)$$

证明 在证明这个定理之前, 需要下面的引理给出一些预备的结果。

引理 10.2.1 设矩阵三元组 (A, B, C) 是右可逆和最小相位的, 其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. 设 $F(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 以 ϵ 为参数, 具有形式

$$F(\epsilon) = N(\epsilon)\Gamma(\epsilon)T(\epsilon) + R(\epsilon), \quad (10.2.26)$$

其中, $N(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\Gamma(\epsilon) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $T(\epsilon) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 和 $R(\epsilon) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. $\Gamma(\epsilon)$ 也是非奇异的。我们更进一步假设以下条件成立:

1. 对所有的 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, $A + BF(\epsilon)$ 是渐近稳定的, 其中 $\epsilon^* > 0$ 。
2. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $T(\epsilon) \rightarrow WC$, 其中 W 是某个 $p \times p$ 的非奇异矩阵。
3. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $N(\epsilon)$ 趋向某有限矩阵 N , 使得 $C(sI - A)^{-1}BN$ 是可逆的。
4. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $R(\epsilon)$ 趋向某有限矩阵 R 。
5. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\Gamma^{-1}(\epsilon) \rightarrow 0$ 。

那么, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 在 s 点上, $C[sI - A - BF(\epsilon)]^{-1} \rightarrow 0$ 。

引理 10.2.1 的证明 首先设 $N^* \in \mathbb{R}^{m \times (m-p)}$, 使得

$$\tilde{N} = [N \quad N^*]$$

是一个 $m \times m$ 非奇异的矩阵, 把 R 重新写为

$$R = \tilde{N} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix},$$

其中, 分别有 $R_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 和 $R_2 \in \mathbb{R}^{(m-p) \times n}$ 。则对于充分小的 ϵ , $F(\epsilon)$ 有渐近形式

$$\begin{aligned} F(\epsilon) &= N(\epsilon)\Gamma(\epsilon)T(\epsilon) + R(\epsilon) \sim \tilde{N} \begin{bmatrix} \Gamma(\epsilon)T(\epsilon) + R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{N} \tilde{\Gamma} \begin{bmatrix} T(\epsilon) + \Gamma^{-1}(\epsilon)R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma(\epsilon) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

这样, $F(\epsilon)\Phi B$ 具有渐近形式

$$F(\epsilon)\Phi B \sim G = \tilde{N}\tilde{\Gamma} \begin{bmatrix} T(\epsilon) + \Gamma^{-1}(\epsilon)R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \Phi B \quad (10.2.27)$$

其中, $\Phi = (sI - A)^{-1}$ 。注意到

$$(I - G)^{-1} = \tilde{N}(I - \tilde{N}^{-1}G\tilde{N})^{-1}\tilde{N}^{-1},$$

我们有下面的约化:

$$\begin{aligned} & C\Phi B[I - F(\epsilon)\Phi B]^{-1}F(\epsilon) \sim C\Phi B(I - G)^{-1}F(\epsilon) \\ & = C\Phi B\tilde{N}(I - \tilde{N}^{-1}G\tilde{N})^{-1}\tilde{N}^{-1}F(\epsilon) \\ & \sim C\Phi B\tilde{N} \left[I - \tilde{\Gamma} \begin{bmatrix} T(\epsilon) + \Gamma^{-1}(\epsilon)R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \Phi B\tilde{N} \right]^{-1} \tilde{\Gamma} \begin{bmatrix} T(\epsilon) + \Gamma^{-1}(\epsilon)R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \\ & = C\Phi B\tilde{N} \\ & \quad \times \begin{bmatrix} \Gamma^{-1}(\epsilon) - [T(\epsilon) + \Gamma^{-1}(\epsilon)R_1]\Phi BN & - [T(\epsilon) + \Gamma^{-1}(\epsilon)R_1]\Phi BN^* \\ -R_2\Phi BN & I - R_2\Phi BN^* \end{bmatrix}^{-1} \\ & \quad \times \begin{bmatrix} T(\epsilon) + \Gamma^{-1}(\epsilon)R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \\ & \sim C\Phi B\tilde{N} \begin{bmatrix} -WC\Phi BN & -WC\Phi BN^* \\ -R_2\Phi BN & I - R_2\Phi BN^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} WC \\ R_2 \end{bmatrix} \\ & = C\Phi B\tilde{N} \begin{bmatrix} -WC\Phi BN & -WC\Phi BN^* \\ -R_2\Phi BN & I - R_2\Phi BN^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ R_2 \end{bmatrix} \\ & = [C\Phi BN \quad C\Phi BN^*] \begin{bmatrix} -C\Phi BN & -C\Phi BN^* \\ -R_2\Phi BN & I - R_2\Phi BN^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ R_2 \end{bmatrix} \\ & = [-I \quad 0] \begin{bmatrix} C \\ R_2 \end{bmatrix} \\ & = -C, \end{aligned} \quad (10.2.28)$$

这表明, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$C\Phi B[I - F(\epsilon)\Phi B]^{-1}F(\epsilon) \rightarrow -C \quad (10.2.29)$$

在复平面上逐点收敛。现在应用众所周知的矩阵求逆等式(2.3.16), 即

$$(I - NM)^{-1} = I + N(I - MN)^{-1}M,$$

则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} C[sI - A - BF(\epsilon)]^{-1} &= C[\Phi^{-1} - BF(\epsilon)]^{-1} \\ &= C\Phi[I - BF(\epsilon)\Phi]^{-1} \\ &= C\Phi\{I + B[I - F(\epsilon)\Phi B]^{-1}F(\epsilon)\Phi\} \\ &= C\Phi + C\Phi B[I - F(\epsilon)\Phi B]^{-1}F(\epsilon)\Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow C\Phi - C\Phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.2.30)$$

这就完成了引理 10.2.1 的证明。 ■

我们现在可以证明定理 10.2.1 的结果了。首先证明在 ATEA 状态反馈 $u = F(\epsilon)x$ 下, 闭环系统是渐近稳定的, 其中 $F(\epsilon)$ 如式(10.2.18)所给。不失一般性, 假设给定系统 (A, B, C, D) 是定理 5.4.1 的特殊坐标基(SCB)形式。不难验证, 闭环系统矩阵为

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}(\epsilon) = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & \star & 0 & \star \\ 0 & A_{ss} - B_{0s}F_{s0} & 0 & L_{sd}C_d \\ 0 & \star & A_{cc}^c & \star \\ 0 & -B_{0d}F_{s0} - B_d\tilde{F}_{s1}(\epsilon) & 0 & A_{dd}^* - B_d\tilde{F}_d(\epsilon) + L_{dd}C_d \end{bmatrix}.$$

显然, 闭环系统有 $n_a^- + n_c$ 个特征值在 $\lambda(A_{aa}^-) \subset \mathbb{C}^-$ 和 $\lambda(A_{cc}^c) \subset \mathbb{C}^-$ 。所以, 只要子系统矩阵

$$A_{\text{smix}} = \begin{bmatrix} A_{ss} - B_{0s}F_{s0} & L_{sd}C_d \\ -B_{0d}F_{s0} - B_d\tilde{F}_{s1}(\epsilon) & A_{dd}^* - B_d\tilde{F}_d(\epsilon) + L_{dd}C_d \end{bmatrix} \quad (10.2.31)$$

是稳定的, 就可充分证明闭环系统的稳定性。根据 A_{dd}^* 、 B_d 和 C_d 的特殊结构, 很容易发现, A_{smix} 的稳定性等价于一个辅助子系统的稳定性, 该系统的状态方程为

$$\dot{x}_s = (A_{ss} - B_{0s}F_{s0})x_s + L_{sd}y_d, \quad (10.2.32)$$

对 $i=1, 2, \dots, m_d$,

$$\dot{x}_i = A_{q_i}x_i + L_{is}x_s + L_{id}y_d - \frac{1}{\epsilon^{q_i}}B_{q_i}[F_{s1i}F_{iq_i}x_s + F_iS_i(\epsilon)x_i], \quad (10.2.33)$$

$$y_i = C_{q_i}x_i, \quad y_d = C_d x_d, \quad (10.2.34)$$

其中

$$x_d = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_d} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} L_{1s} \\ \vdots \\ L_{m_d s} \end{bmatrix} = -B_{0d}F_{s0}, \quad (10.2.35)$$

$$F_{s1i} = [F_{a1i}^+ \quad F_{b1i}], \quad F_i = [F_{iq_i}, F_{iq_i-1}, \dots, F_{i1}] \quad (10.2.36)$$

和

$$S_i(\epsilon) = \text{diag}\{1, \epsilon, \dots, \epsilon^{q_i-1}\}. \quad (10.2.37)$$

我们首先定义状态变换

$$\bar{x}_s = x_s, \quad \bar{x}_i = x_i + \begin{bmatrix} F_{s1i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_s, \quad i = 1, 2, \dots, m_d \Rightarrow \bar{x}_d = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_{m_d} \end{bmatrix}, \quad (10.2.38)$$

则可得

$$\dot{\bar{x}}_s = A_{ss}^c \bar{x}_s + L_{sd} \bar{y}_d, \quad (10.2.39)$$

对 $i=1, 2, \dots, m_d$,

$$\dot{\bar{x}}_i = \left[A_{q_i} - \frac{1}{\epsilon^{q_i}} B_{q_i} F_i S_i(\epsilon) \right] \bar{x}_i + \bar{L}_{is} \bar{x}_s + L_{id} \bar{y}_d, \quad (10.2.40)$$

$$\bar{y}_d = y_d + F_{s1} x_s = C_d \bar{x}_d, \quad (10.2.41)$$

其中, $\bar{L}_{is} = L_{is} - L_{id} F_{s1}$ 。为了后面的应用,注意式(10.2.38)所示状态变换的形式是

$$\bar{\Gamma}_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \star & I \end{bmatrix}, \quad (10.2.42)$$

状态方程(10.2.39)~(10.2.41)的系统矩阵为

$$\bar{A}_{\text{smix}} = \begin{bmatrix} A_{ss}^c & L_{sd} C_d \\ \bar{L}_{ds} & A_{dd}^* - B_d \tilde{F}_d(\epsilon) + L_{dd} C_d \end{bmatrix}, \quad (10.2.43)$$

其中

$$\bar{L}_{ds} = \begin{bmatrix} \bar{L}_{1s} \\ \vdots \\ \bar{L}_{m_d s} \end{bmatrix}. \quad (10.2.44)$$

下一步,定义另一个状态变换

$$\tilde{x}_s = \bar{x}_s, \quad \tilde{x}_i = S_i(\epsilon) \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_d; \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}_d = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m_d} \end{bmatrix}. \quad (10.2.45)$$

变换后的状态方程为

$$\dot{\tilde{x}}_s = A_{ss}^c \tilde{x}_s + L_{sd} \tilde{y}_d, \quad (10.2.46)$$

对 $i=1, 2, \dots, m_d$,

$$\dot{\tilde{x}}_i = \frac{1}{\epsilon} (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) \tilde{x}_i + \bar{L}_{is} \tilde{x}_s + L_{id} \tilde{y}_d, \quad \tilde{y}_d = C_d \tilde{x}_d. \quad (10.2.47)$$

根据 Kokotovic 等^[75]的奇异摄动方法的标准结果,上述系统的稳定性就很明显了。为了完整起见,令 P_s 和 P_i 为正定矩阵, $i=1, 2, \dots, m_d$, 满足 Lyapunov 方程

$$P_s (A_{ss}^c)' + A_{ss}^c P_s = -I, \quad (10.2.48)$$

对 $i=1, 2, \dots, m_d$,

$$P_i (A_{q_i} - B_{q_i} F_i)' + (A_{q_i} - B_{q_i} F_i) P_i = -I. \quad (10.2.49)$$

因为 A_{ss}^c 和 $A_{q_i} - B_{q_i} F_i$ 是渐近稳定的,所以这样的 P_s 和 P_i 总是存在的。最后定义一个 Lyapunov 函数,

$$V(\tilde{x}) = \tilde{x}'_s P_s \tilde{x}_s + \sum_{i=1}^{m_d} \tilde{x}'_i P_i \tilde{x}_i \geq 0. \quad (10.2.50)$$

在式(10.2.46)和式(10.2.47)所示的轨迹上,计算得到

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{x}_d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -I & X_{sd} \\ X'_{sd} & -I/\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{x}_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{x}_d/\sqrt{\epsilon} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -I & \sqrt{\epsilon}X_{sd} \\ \sqrt{\epsilon}X'_{sd} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{x}_d/\sqrt{\epsilon} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10.2.51)$$

其中, X_{sd} 是具有适当维数的定常矩阵,不依赖 ϵ 。则不难发现,存在一个标量 $\epsilon^* > 0$,使得对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$, $\dot{V} \leq 0$ 。因此,对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$,式(10.2.31)所示的子系统矩阵 A_{smtx} 确实是渐近稳定的。这就完成了定理 10.2.1 的第 1 项证明。

下面开始证明定理 10.2.1 的第 2 项。不失一般性,但从简便起见,我们假设非奇异变换 $\Gamma_s = I$ 和 $\Gamma_d = I$,即假设系统 $(A, B, \Gamma^{-1}C, \Gamma^{-1}D)$ 是特殊坐标基(SCB)形式。根据式(10.2.18),把 $F(\epsilon)$ 划分为

$$F(\epsilon) = \bar{F}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}(\epsilon) \end{bmatrix},$$

其中

$$\bar{F}_0 = - \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0a}^+ + F_{a0}^+ & C_{0b} + F_{b0} & C_{0c} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{F}(\epsilon) = - \begin{bmatrix} E_{da}^- & E_{da}^+ + \tilde{F}_{a1}^+(\epsilon) & E_{db} + \tilde{F}_{b1}(\epsilon) & E_{dc} & \tilde{F}_d(\epsilon) + E_{dd} \\ E_{ca}^- & E_{ca}^+ & 0 & F_c & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.2.52)$$

所以有

$$\bar{C} = C + DF(\epsilon) = \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & -F_{a0}^+ & -F_{b0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{A} = A + B\bar{F}_0, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_c \\ B_d & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.2.53)$$

有了这些定义,可以把 $H(s, \epsilon)$ 写为

$$H(s, \epsilon) = \bar{C}[sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\epsilon)]^{-1}.$$

然后根据式(10.2.52),很容易发现, $\bar{F}(\epsilon)$ 具有形式

$$\bar{F}(\epsilon) = N\Gamma(\epsilon)T(\epsilon) + R,$$

其中

$$\Gamma(\epsilon) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\epsilon^{q_1}}, \frac{1}{\epsilon^{q_2}}, \dots, \frac{1}{\epsilon^{q_{m_d}}} \right\}, \quad N = - \begin{bmatrix} I_{m_d} \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$R = - \begin{bmatrix} E_{da}^- & E_{da}^+ & E_{db} & E_{dc} & E_{dd} \\ E_{ca}^- & E_{ca}^+ & 0 & F_c & 0 \end{bmatrix},$$

而当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $T(\epsilon)$ 满足

$$T(\epsilon) \rightarrow TC_m,$$

其中

$$T = \text{diag} \{ F_{1q_1}, F_{1q_2}, \dots, F_{m_d q_{m_d}} \}$$

和

$$C_m = [0 \quad F_{a1}^+ \quad F_{b1} \quad 0 \quad C_d]. \quad (10.2.54)$$

采用第 8 章定理 8.2.1 证明的对偶形式, 很容易证明三元组 (\bar{A}, \bar{B}, C_m) 是右可逆和最小相位的。所以, 根据引理 10.2.1 可得当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$C_m [sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\epsilon)]^{-1} \rightarrow 0, \quad (10.2.55)$$

在复平面上逐点收敛。接下来, 令

$$\bar{C} = \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ C_m \\ 0 \end{bmatrix} + C_e,$$

其中

$$C_e = \Gamma_0 \begin{bmatrix} 0 & -F_{a0}^+ & -F_{b0} & 0 & 0 \\ 0 & -F_{a1}^+ & -F_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad C_s - D_s F_s \quad 0 \quad 0].$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$H_s(s, \epsilon) \rightarrow C_e [sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\epsilon)]^{-1}, \quad (10.2.56)$$

在复平面上逐点收敛。根据式(10.2.42)和式(10.2.43), 以及一些矩阵求逆等式, 如第 2 章的式(2.3.19), 我们有

$$[sI - \bar{A} - \bar{B}\bar{F}(\epsilon)]^{-1} = \begin{bmatrix} \star & \star & 0 & \star \\ 0 & X_{22}(s, \epsilon) & 0 & X_{24}(s, \epsilon) \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \quad (10.2.57)$$

其中, \star 是一些无关紧要的矩阵, 以及

$$X_{22}(s, \epsilon) = [sI - A_{ss}^c - L_{sd}C_d(sI - A_{dd}^* + B_d \tilde{F}_d(\epsilon) - L_{dd}C_d)^{-1} \bar{L}_{ds}]^{-1}$$

和

$$X_{24}(s, \epsilon) = (sI - A_{ss}^c)^{-1} L_{sd} C_d \cdot [sI - A_{dd}^* + B_d \tilde{F}_d(\epsilon) - L_{dd} C_d - \bar{L}_{ds} (sI - A_{ss}^c)^{-1} L_{sd} C_d]^{-1}.$$

可得

$$X_{24}(s, \epsilon) = (sI - A_{ss}^c)^{-1} L_{sd} C_d [sI - A_{dd}^* + B_d \tilde{F}_d(\epsilon)]^{-1} \cdot \{I - [L_{dd} + \bar{L}_{ds} (sI - A_{ss}^c)^{-1} L_{sd}] C_d [sI - A_{dd}^* + B_d \tilde{F}_d(\epsilon)]^{-1}\}^{-1}.$$

注意到 (A_{dd}^*, B_d, C_d) 是方可逆的, 没有不变零点, 所以是最小相位的。还注意到 $\tilde{F}_d(\epsilon)$ 的结构满足引理 10.2.1 中的所有性质, 则根据引理 10.2.1 可得, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$C_d [sI - A_{dd}^* + B_d \tilde{F}_d(\epsilon)]^{-1} \rightarrow 0, \quad (10.2.58)$$

在复平面上逐点收敛。因此当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $X_{24}(s, \epsilon) \rightarrow 0$ 在复平面上逐点收敛。类似地, 可以证明, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$X_{22}(s, \epsilon) \rightarrow (sI - A_{ss}^c)^{-1} = (sI - A_{ss} + B_s F_s)^{-1}, \quad (10.2.59)$$

在复平面上逐点收敛。很显然, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$H_s(s, \epsilon) \rightarrow C_c [sI - \bar{A} - \bar{B}\tilde{F}(\epsilon)]^{-1} \rightarrow [0 \quad H_s(s) \quad 0 \quad 0], \quad (10.2.60)$$

在复平面上逐点收敛。这就完成了定理 10.2.1 的证明。 ■

10.2.2 H_2 控制、 H_∞ 控制和干扰解耦

在典型的控制系统设计中, 给定的控制要求通常转换成性能指标, 然后就是要寻找极小化某个范数的控制律, 比如 H_2 或 H_∞ 范数。在后面部分, 我们将演示在 ATEA-C 步骤 2 中, 适当地选择子反馈增益矩阵 F_s , ATEA 设计方法能够很容易地实现众所周知的 H_2 和 H_∞ 的控制, 并解决干扰解耦问题。

我们具体考虑的是广义的连续时间系统 Σ , 它的状态空间描述为

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew, \\ y = x, \\ h = Cx + Du, \end{cases} \quad (10.2.61)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动输入, $y = x$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^p$ 是 Σ 的被控输出。假设 (A, B) 是可镇定的, (A, B, C, D) 在虚轴上没有不变零点, 则标准的优化问题是寻找控制律

$$u = Fx, \quad (10.2.62)$$

使得给定系统 (10.2.61) 在该控制作用下的闭环系统是内稳定的, 即 $\lambda(A + BF) \subset \mathbb{C}^-$, 所产生的从扰动输入 w 到被控输出 h 的闭环传递函数

$$H_{hw}(s) = (C + DF)(sI - A - BF)^{-1}E \quad (10.2.63)$$

的某种范数被极小化。我们在这一节中要考虑 H_2 和 H_∞ 最优控制问题。所谓的 H_2 最优控制问题,就是在所有使得闭环系统内稳定的状态反馈控制律中,寻找一个能够极小化 $H_{hw}(s)$ 的 H_2 范数(关于连续时间系统的 H_2 范数,见第 2 章的定义 2.4.5)。为了后面的应用,我们定义

$$\gamma_2^* := \inf\{\|H_{hw}\|_2 \mid u = Fx \text{ 内稳定 } \Sigma\}. \quad (10.2.64)$$

类似地,标准的 H_∞ 控制问题就是在所有使得闭环系统内稳定的状态反馈控制律中,寻找一个能够极小化 $H_{hw}(s)$ 的 H_∞ 范数(关于连续时间系统的 H_∞ 范数定义,见第 2 章的定义 2.4.5)。为了后面的应用,我们定义

$$\gamma_\infty^* := \inf\{\|H_{hw}\|_\infty \mid u = Fx \text{ 内稳定 } \Sigma\}. \quad (10.2.65)$$

注意到 γ_∞^* 的确定是非常繁琐的。对于相当大的一类系统,利用一些数值稳定的算法,可以精确地计算 γ_∞^* 。通常需要用迭代的方法来确定 γ_∞^* 。对这个特别问题的详细处理,感兴趣的读者可以参考 Chen^[22] 的工作。为简单起见,这一节中都假设 γ_∞^* 已经被确定,因此是已知的。

最后,考虑到当 (A, B, C, D) 在虚轴上没有不变零点的情况,干扰解耦问题(在 H_2 或 H_∞ 意义下)就是找到一个适当的状态反馈律(10.2.62),使得 $A + BF$ 是渐近稳定的,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $H_{hw}(s) \rightarrow 0$, 在复平面上逐点收敛。

我们在下面总结 H_2 和 H_∞ 控制以及干扰解耦问题的解。假设 Γ_s, Γ_i 和 Γ_o 是非奇异状态、输入和输出变换,把矩阵四元组 (A, B, C, D) 变换成式(10.2.2)~式(10.2.5)的特殊坐标基(SCB)形式。令

$$\tilde{E} := \Gamma_s^{-1}E = \begin{bmatrix} E_a^- \\ E_a^+ \\ E_b \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad E_s := \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_b \end{bmatrix}. \quad (10.2.66)$$

我们有下面的定理。

定理 10.2.2 考虑由式(10.2.61)所表示的广义连续时间系统 Σ 。ATEA 设计可方便地用来求解 Σ 的 H_2 和 H_∞ 控制以及干扰解耦问题。特别地,

1. 如果把 ATEA-C 步骤 2 的子反馈增益矩阵 F_s 选为

$$F_s = (D'_s D_s)^{-1}(B'_s P_s + D'_s C_s), \quad (10.2.67)$$

其中, $P_s > 0$ 是代数 Riccati 方程

$$P_s A_{ss} + A'_{ss} P_s + C'_s C_s - (P_s B_s + C'_s D_s)(D'_s D_s)^{-1}(B'_s P_s + D'_s C_s) = 0 \quad (10.2.68)$$

的解,则在相应的 ATEA 状态反馈律下,所形成的从 w 到 h 的闭环传递函数当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时具有以下性质:

$$\|H_{hw}\|_2 = \|[C + DF(\epsilon)][sI - A - BF(\epsilon)]^{-1}E\|_2 \rightarrow \gamma_2^*, \quad (10.2.69)$$

即相应的 ATEA 状态反馈律是关于 Σ 的 H_2 次优控制问题的解,而且

$$\gamma_2^* = \sqrt{\text{trace}(E_s' P_s E_s)}. \quad (10.2.70)$$

2. 给定一个标量 $\gamma > \gamma_2^* \geq 0$, 如果 ATEA-C 步骤 2 中的 F_s 选择为

$$F_s = (D_s' D_s)^{-1} (B_s' P_s + D_s' C_s), \quad (10.2.71)$$

其中, $P_s > 0$ 是代数 Riccati 方程

$$\begin{aligned} P_s A_{ss} + A_{ss}' P_s + C_s' C_s + P_s E_s E_s' P_s / \gamma^2 \\ - (P_s B_s + C_s' D_s)(D_s' D_s)^{-1} (B_s' P_s + D_s' C_s) = 0 \end{aligned} \quad (10.2.72)$$

的解,则对于充分小的 ϵ ,在相应的 ATEA 状态反馈律下,所产生的从 w 到 h 的闭环传递函数具有下面的特性:

$$\|H_{hw}\|_\infty = \|[C + DF(\epsilon)][sI - A - BF(\epsilon)]^{-1}E\|_\infty < \gamma, \quad (10.2.73)$$

即相应的 ATEA 状态反馈律是关于 Σ 的 $H_\infty \gamma$ 次优控制问题的解。

3. 如果 $E_s = 0$,这在[22]中已经被证明是关于 Σ 的干扰解耦问题可解性的充分必要条件,则对任意选择的 F_s (要满足 A_{ss}^c 稳定性的约束),ATEA 状态反馈律所产生的闭环传递函数 $H_{hw}(s, \epsilon)$ 满足当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$H_{hw}(s, \epsilon) \rightarrow 0, \quad (10.2.74)$$

在复平面上逐点收敛,即任何 ATEA 状态反馈律可解 Σ 的干扰解耦问题。

证明 根据 ATEA 设计的特性,即式(10.2.24)和式(10.2.66),当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$H_{hw}(s, \epsilon) \rightarrow H_{s,hw}(s) = (C_s - D_s F_s)(sI - A_{ss} + B_s F_s)^{-1} E_s, \quad (10.2.75)$$

在复平面上逐点收敛。则根据众所周知的结果(如参见[50]和[120]),由式(10.2.67)所给出的增益矩阵的状态反馈律所产生的闭环传递函数 $H_{s,hw}(s)$ 满足当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\|H_{s,hw}\|_2 = \gamma_2^* \Rightarrow \|H_{hw}(s, \epsilon)\|_2 \rightarrow \gamma_2^*, \quad (10.2.76)$$

由式(10.2.71)所给增益矩阵的状态反馈律所产生的闭环传递函数 $H_{s,hw}(s)$ 满足对充分小的 ϵ ,

$$\|H_{s,hw}\|_\infty < \gamma \Rightarrow \|H_{hw}(s, \epsilon)\|_\infty < \gamma \quad (10.2.77)$$

总之,只要 $E_s = 0$,任何 ATEA 状态反馈增益所产生的闭环传递函数 $H_{s,hw}(s) = 0$,这表明当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $H_{hw}(s, \epsilon) \rightarrow 0$ 在复平面上逐点收敛。

最后,因为子系统 (A_{ss}, B_s, C_s, D_s) 是左可逆的,没有无限零点,在 $\mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^-$ 上,并且没有不变零点。我们注意到,两个 Riccati 方程(10.2.68)和(10.2.72)有惟一的解 $P_s > 0$ 。这就完成了定理 10.2.2 的证明。 ■

我们用下面的例子来演示上面的结果。

例 10.2.1 考虑系统(10.2.61), 其中

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.2.78)$$

和

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.2.79)$$

四元组 (A, B, C, D) 已经是第5章所给的特殊坐标基(SCB)形式。由于它是可逆的, 所以相关的 χ_b 和 χ_c 不存在。在 $s=1$ 处有两个不稳定的不变零点, 分别有两个1阶和2阶的无限零点。而且有

$$A_{ss} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$C_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因为 $E_s \neq 0$, 给定系统的干扰解耦问题不可解。所以, 我们只关注系统的 H_2 和 H_∞ 次优控制问题的解。根据前一节ATEA算法的构造过程, 得到状态反馈

$$F(\epsilon) = - \begin{bmatrix} F_{s11}/\epsilon + 1 & F_{s12}/\epsilon + 1 & 1/\epsilon + 1 & 1 & 1 \\ 2F_{s21}/\epsilon^2 + 1 & 2F_{s22}/\epsilon^2 + 1 & 1 & 2/\epsilon^2 + 1 & 2/\epsilon + 1 \end{bmatrix}, \quad (10.2.80)$$

其中

$$F_s = \begin{bmatrix} F_{s11} & F_{s12} \\ F_{s21} & F_{s22} \end{bmatrix} \quad (10.2.81)$$

的选择是要求解 H_2 或 H_∞ 控制问题。 $A+BF$ 的闭环特征值分别被渐近地配置在 $\lambda(A_{ss} - B_s F_s)$ 、 $-1/\epsilon$ 和 $-1/\epsilon \pm j/\epsilon$ 。

1. H_2 控制 解式(10.2.68)的 H_2 代数 Riccati 方程, 得到

$$P_s = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

由此给出子反馈增益

$$F_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

和 $\gamma_2^* = \sqrt{\text{trace}(E_s^T P_s E_s)} = \sqrt{6}$ 。这样, 根据式(10.2.80)和式(10.2.81), 可得 H_2 次优控

制律为 $u = F(\epsilon)x$, 其中

$$F(\epsilon) = - \begin{bmatrix} 2/\epsilon + 1 & 1 & 1/\epsilon + 1 & 1 & 1 \\ -4/\epsilon^2 + 1 & 4/\epsilon^2 + 1 & 1 & 2/\epsilon^2 + 1 & 2/\epsilon + 1 \end{bmatrix}.$$

图 10.2.1 显示了所产生的闭环系统 H_2 范数对 $1/\epsilon$ 的变化图。显然, 它表明当 $1/\epsilon \rightarrow \infty$ 时, 闭环系统 H_2 范数趋向 $\gamma_2^* = \sqrt{6} = 2.4495$ 。

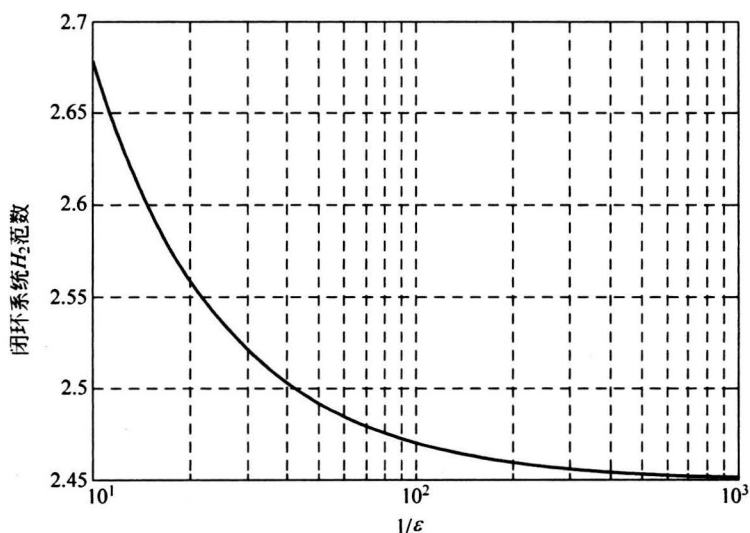


图 10.2.1 闭环系统 H_2 范数关于 $1/\epsilon$ 的变化

2. H_∞ 控制 对于矩阵四元组 (A, B, C, D) 是右可逆的情况, 在 Chen^[22] 中已经证明, 通过解两个 Lyapunov 方程

$$A_{ss}S_s + S_sA'_s = B_sB'_s \quad \text{和} \quad A_{ss}T_s + T_sA'_s = E_sE'_s$$

就可以得到式(10.2.72)所示 H_∞ 代数 Riccati 方程的显式解。解上面两个 Lyapunov 方程可得

$$S_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad T_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

然后根据 Chen^[22], 可得

$$\gamma_\infty^* = \sqrt{\lambda_{\max}(T_s S_s^{-1})} = 1.618034,$$

并对任何 $\gamma > \gamma_\infty^*$, 式(10.2.72)的解可表示为

$$P_s = (S_s - T_s/\gamma^2)^{-1} = \frac{2\gamma^2}{\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1} \begin{bmatrix} 2\gamma^2 - 1 & 1 - \gamma^2 \\ 1 - \gamma^2 & \gamma^2 - 2 \end{bmatrix},$$

子反馈增益矩阵 F_s 为

$$F_s = \frac{2\gamma^2}{\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1} \begin{bmatrix} \gamma^2 & -1 \\ 1 - \gamma^2 & \gamma^2 - 2 \end{bmatrix}.$$

因此, 给定一个 $\gamma > \gamma_*$, 根据式(10.2.80)和式(10.2.81), 可得对于充分小的 ϵ , 控制律 $u = F(\gamma, \epsilon)x$ 是一个 H_∞ γ 次优控制器, 其中

$$F(\gamma, \epsilon) = - \begin{bmatrix} \frac{2\gamma^4}{\epsilon(\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1)} + 1 & \frac{4\gamma^2(1 - \gamma^2)}{\epsilon^2(\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1)} + 1 \\ \frac{-2\gamma^2}{\epsilon(\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1)} + 1 & \frac{4\gamma^2(\gamma^2 - 2)}{\epsilon^2(\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1)} + 1 \\ \frac{1}{\epsilon} + 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{\epsilon^2} + 1 \\ 1 & \frac{2}{\epsilon} + 1 \end{bmatrix}.$$

为表明结果, 我们在图 10.2.2 中绘出了所得闭环系统最大奇异值对应于一组不同 γ 和 ϵ 取值的示意图, 其结果的确验证了我们的推断。

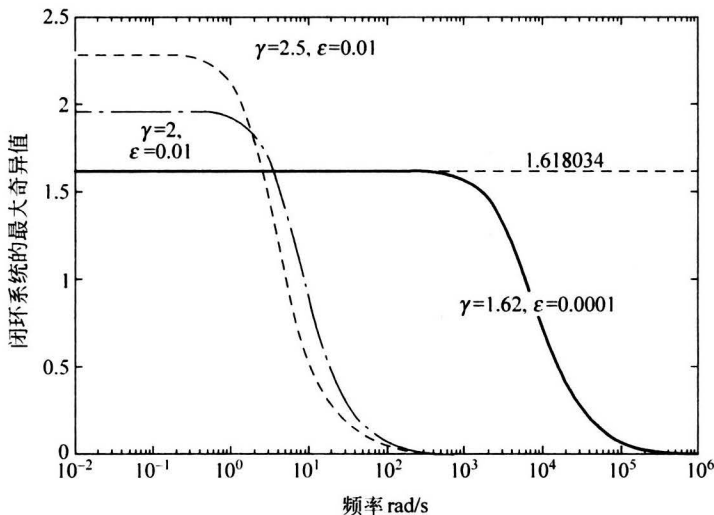


图 10.2.2 闭环系统的最大奇异值

10.3 离散时间系统

我们现在给出离散时间系统特征结构的设计方法。系统 Σ 表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (10.3.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$ 分别是 Σ 的状态、输入和输出。再次假设 (A, B) 是可镇定的, $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 都是满秩的。进一步假设 Σ 没有任何不变零点在单位圆上。

10.3.1 设计步骤和基本特性

和连续时间系统相比较, 离散时间系统的设计要简单得多。因为离散时间系统稳定性的要求不容许我们把闭环特征值放在无穷远处, 所以就没有任何渐近分析过程。因此, 渐近的术语不适用于离散时间系统。然而为了一致性, 我们在离散时间情况下仍然称它 ATEA 方法。

ATEA-D 步骤 1

根据第 5 章的定理 5.7.1 来计算非奇异的状态、输入和输出变换 Γ_s 、 Γ_i 和 Γ_o , 把式(10.3.1)所描述的离散时间系统 Σ 变换到特殊坐标基(SCB)的形式。为了方便参考, 把特殊坐标基(SCB)的简明形式重新安排如下:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{aa}^- & 0 & 0 & L_{ab}^- C_b & L_{ad}^- C_d \\ B_c E_{ca}^- & A_{cc} & B_c E_{ca}^+ & L_{cb} C_b & L_{cd} C_d \\ 0 & 0 & A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_{da}^- & B_d E_{dc} & B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & A_{dd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{0a}^- \\ B_{0c} \\ B_{0a}^+ \\ B_{0b} \\ B_{0d} \end{bmatrix} [C_{0a}^- \ C_{0c} \ C_{0a}^+ \ C_{0b} \ C_{0d}], \quad (10.3.2)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{0a}^- & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0a}^+ & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0b} & B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.3.3)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0c} & C_{0a}^+ & C_{0b} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.3.4)$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3.5)$$

接下来,定义

$$A_{ss} = \begin{bmatrix} A_{aa}^+ & L_{ab}^+ C_b & L_{ad}^+ C_d \\ 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_{da}^+ & B_d E_{db} & A_{dd} \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} B_{0a}^+ & 0 \\ B_{0b} & 0 \\ B_{0d} & B_d \end{bmatrix}. \quad (10.3.6)$$

ATEA-D 步骤 2

让 F_s 的选择满足 $\lambda(A_{ss} - B_s F_s) \subset \mathbb{C}^\circ$, 划分 F_s 为

$$F_s = \begin{bmatrix} F_{a0}^+ & F_{b0} & F_{d0} \\ F_{ad}^+ & F_{bd} & F_{dd} \end{bmatrix}. \quad (10.3.7)$$

ATEA-D 步骤 3

令 F_c 是一个定常矩阵, 满足

$$A_{cc}^c = A_{cc} - B_c F_c \quad (10.3.8)$$

是一个稳定矩阵的约束。注意到特殊坐标基(SCB)的性质, 即 (A_{cc}, B_c) 是可控的, 保证了 F_c 的存在性。

ATEA-D 步骤 4

在这一步中, 把前几步中计算出来的各种增益组合在一起, 形成复合状态反馈增益矩阵 F , 它可被表示为

$$F = -\Gamma_i \begin{bmatrix} C_{0a}^- & C_{0c} & C_{0a}^+ + F_{a0}^+ & C_{0b} + F_{b0} & C_{0d} + F_{d0} \\ E_{da}^- & E_{dc} & F_{ad}^+ & F_{bd} & F_{dd} \\ E_{ca}^- & F_c & E_{ca}^+ & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1}. \quad (10.3.9)$$

这就完成了离散时间系统的 ATEA 算法。

我们有下面的定理。

定理 10.3.1 考虑式(10.3.1)给定的系统 Σ , 则 F 为式(10.3.9)所给, ATEA 状态反馈律 $u(k) = Fx(k)$ 具有下面的性质。

1. 由给定系统 Σ 和 ATEA 状态反馈律所形成的闭环系统是渐近稳定的, 而且闭环特征值为

$$\lambda(A_{aa}^-), \quad \lambda(A_{cc}^c), \quad \lambda(A_{ss}^c). \quad (10.3.10)$$

2. 令

$$C_s = \Gamma_o \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \Gamma_o \begin{bmatrix} I_{m_o} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.3.11)$$

则可得

$$H(z) := (C + DF)(zI - A - BF)^{-1} = [0 \quad 0 \quad H_s(z)] \Gamma_s^{-1}, \quad (10.3.12)$$

其中

$$H_s(z) = (C_s - D_s F_s)(zI - A_{ss} + B_s F_s)^{-1}. \quad (10.3.13)$$

证明 经过直接运算即可证明。 ■

10.3.2 H_2 控制、 H_∞ 控制和干扰解耦

如同连续时间系统一样,通过在 ATEA-D 步骤 2 中选择合适的子状态反馈增益矩阵 F_s ,我们在下面证明 ATEA 设计可以方便地用来求解离散时间 H_2 和 H_∞ 控制以及干扰解耦问题。我们要特别考虑一个广义离散时间系统 Σ ,它的表示为

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k), \\ y(k) = x(k), \\ h(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (10.3.14)$$

和往常一样, $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部干扰输入, $y = x$ 是测量输出, $h \in \mathbb{R}^p$ 是 Σ 的被控输出。假设 (A, B) 是可镇定的, (A, B, C, D) 在单位圆上没有不变零点。我们的注意力放在寻找状态反馈律

$$u(k) = Fx(k), \quad (10.3.15)$$

当把该控制施加在给定系统(10.3.14)时,所产生的系统是内稳定的,即 $\lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}^\circ$ 。所产生的从干扰输入 w 到被控输出 h 的闭环系统传递函数

$$H_{hw}(z) = (C + DF)(zI - A - BF)^{-1}E \quad (10.3.16)$$

的 H_2 或 H_∞ 范数(见第 2 章定义 2.4.6)被极小化。为参考方便,定义

$$\gamma_2^* := \inf\{\|H_{hw}\|_2 \mid u(k) = Fx(k) \text{ 内稳定 } \Sigma\}. \quad (10.3.17)$$

同时定义

$$\gamma_\infty^* := \inf\{\|H_{hw}\|_\infty \mid u(k) = Fx(k) \text{ 内稳定 } \Sigma\}. \quad (10.3.18)$$

关于 γ_∞^* 的计算,感兴趣的读者可以参考 Chen^[22] 的工作。为简单起见,我们在这一节中都假设 γ_∞^* 已经确定,因而是已知的。

最后,对于 (A, B, C, D) 在单位圆上没有不变零点的情况,干扰解耦问题是找到适当的状态反馈律(10.3.15),使得 $\lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}^\circ$ 和 $H_{hw}(z) = 0$ 。

下面假设 Γ_s, Γ_i 和 Γ_o 是非奇异的状态、输入和输出变换,把矩阵四元组 (A, B, C, D) 变换到式(10.3.2)~式(10.3.5)所示的特殊坐标基(SCB)形式。令

$$\tilde{E} := \Gamma_s^{-1}E = \begin{bmatrix} E_a^- \\ E_c \\ E_a^+ \\ E_b \\ E_d \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad E_s := \begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_b \\ E_d \end{bmatrix}. \quad (10.3.19)$$

我们用下面的定理总结离散时间 H_2 和 H_∞ 控制以及干扰解耦问题的解。

定理 10.3.2 考虑式(10.3.14)所表示的广义离散时间系统 Σ 。ATEA 设计可方便地用于求解 Σ 的 H_2 和 H_∞ 控制以及干扰问题的解。特别有:

1. 如果 ATEA-D 步骤 2 中的子反馈增益矩阵选择为

$$F_s = (D_s' D_s + B_s' P_s B_s)^{-1} (B_s' P_s A_s + D_s' C_s), \quad (10.3.20)$$

其中, $P_s > 0$ 是代数 Riccati 方程

$$P_s = A_s' P_s A_s + C_s' C_s - (A_s' P_s B_s + C_s' D_s) (D_s' D_s + B_s' P_s B_s)^{-1} (A_s' P_s B_s + C_s' D_s)' \quad (10.3.21)$$

的解, 则在相应的 ATEA 状态反馈律下, 所产生的从 w 到 h 的闭环传递函数具有特性

$$\|H_{hw}\|_2 = \|(C + DF)(zI - A - BF)^{-1}E\|_2 = \gamma_2^*, \quad (10.3.22)$$

即相应的 ATEA 状态反馈律是 Σ 的一个 H_2 最优控制律, 而且

$$\gamma_2^* = \sqrt{\text{trace}(E_s' P_s E_s)}. \quad (10.3.23)$$

2. 给定一个标量 $\gamma > \gamma_\infty^* \geq 0$, 如果 ATEA-D 步骤 2 中的 F_s 选择为

$$F_s = [B_s' P_s B_s + D_s' D_s - B_s' P_s E_s (E_s' P_s E_s - \gamma^2 I)^{-1} E_s' P_s B_s]^{-1} \cdot [B_s' P_s A_s + D_s' C_s - B_s' P_s E_s (E_s' P_s E_s - \gamma^2 I)^{-1} E_s' P_s A_s], \quad (10.3.24)$$

其中, $P_s > 0$ 是代数 Riccati 方程

$$P_s = A_s' P_s A_s + C_s' C_s - \begin{bmatrix} B_s' P_s A_s + D_s' C_s \\ E_s' P_s A_s \end{bmatrix}' G_s^{-1} \begin{bmatrix} B_s' P_s A_s + D_s' C_s \\ E_s' P_s A_s \end{bmatrix} \quad (10.3.25)$$

的解, 其中

$$G_s = \begin{bmatrix} D_s' D_s + B_s' P_s B_s & B_s' P_s E_s \\ E_s' P_s B_s & E_s' P_s E_s - \gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (10.3.26)$$

则在相应的 ATEA 状态反馈律下, 从 w 到 h 的闭环传递函数具有特性

$$\|H_{hw}\|_\infty = \|(C + DF)(zI - A - BF)^{-1}E\|_\infty < \gamma, \quad (10.3.27)$$

即相应的 ATEA 状态反馈律是 Σ 的一个 $H_\infty \gamma$ 次优控制律。

3. 如果 $E_s = 0$, 这是解关于 Σ 的干扰解耦问题的充分必要条件, 则对任意选择的 F_s (只要满足 A_{ss} 稳定性的约束), ATEA 状态反馈律可以使所产生的闭环传递函数 $H_{hw}(z) = 0$, 即任何 ATEA 状态反馈律可求解 Σ 的干扰解耦问题。

证明 根据定理 10.3.1 及离散时间 H_2 和 H_∞ 控制的标准结果 (参见 [22, 29, 120, 135]) 就可证明。注意, 离散时间 Riccati 方程 (10.3.21) 和 (10.3.25) 可以用 Chen^[22] 的步骤中的非迭代方式求解。 ■

10.4 练习

10.1 考虑式 (10.2.61) 所给系统的 H_∞ 控制。假设 (A, B, C, D) 是右可逆的。根据式 (10.2.23) 可得 $C_{ss} \equiv 0$, 因此相应的 H_∞ ARE (10.2.72) 可被重新写为

$$P_s A_{ss} + A_{ss}' P_s + P_s E_s E_s' P_s / \gamma^2 - P_s B_s (D_s' D_s)^{-1} B_s' P_s = 0.$$

证明：当且仅当

$$\gamma^2 > (\gamma_\infty^*)^2 = \lambda_{\max}(T_s S_s^{-1})$$

时,上述 ARE 具有正定解。其中, $S_s > 0$ 和 $T_s \geq 0$ 分别是 Lyapunov 方程

$$A_{ss} S_s + S_s A'_{ss} = B_s (D'_s D_s)^{-1} B'_s \quad \text{和} \quad A_{ss} T_s + T_s A'_{ss} = E_s E'_s$$

的解。同时证明：对于 $\gamma > \gamma_\infty^*$, H_∞ ARE 的正定解为

$$P_s = (S_s - T_s / \gamma^2)^{-1}.$$

实际上, γ_∞^* 是给定 H_∞ 控制问题的极优值。

10.2 考虑一个连续时间系统(10.2.61), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

和

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = 0.$$

很容易发现, (A, B, C, D) 已经是特殊坐标基(SCB)的形式, 在 1 和 2 有两个不变零点, 相对阶为 2。

(a) 求相应的 H_2 ARE(10.2.68)的解 $P_s > 0$, 计算极优值 γ_2^* 和以 ϵ 为参数的 H_2 次优状态反馈增益矩阵 $F(\epsilon)$ 。

(b) 确定极优值 γ_∞^* 。给定 $\gamma > \gamma_\infty^*$, 求相应的 H_∞ ARE(10.2.72)的解 $P_s > 0$ 。同时计算以 γ 和 ϵ 为参数的 H_∞ 次优状态反馈增益矩阵 $F(\gamma, \epsilon)$ 。

10.3 考虑一个广义的奇异 H_2 或 H_∞ 控制问题, 系统描述为

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew, \\ y = x, \\ h = Cx + Du. \end{cases}$$

这个问题也可以用所谓的摄动方法来解(参见[160]), 此时定义一个新的辅助被控输出

$$h_{\text{aux}, \epsilon} = \begin{bmatrix} h \\ \epsilon x \\ \epsilon u \end{bmatrix} = C_\epsilon x + D_\epsilon u = \begin{bmatrix} C \\ \epsilon I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ \epsilon I \end{bmatrix} u,$$

则对于系统的 H_2 次优控制律, 可通过计算下面的 ϵ 摄动的 H_2 ARE 的解 $P_\epsilon > 0$ 来得到,

$$A' P_\epsilon + P_\epsilon A + C'_\epsilon C_\epsilon - (P_\epsilon B + C'_\epsilon D_\epsilon) (D'_\epsilon D_\epsilon)^{-1} (D'_\epsilon C_\epsilon + B' P_\epsilon) = 0,$$

H_2 次优状态反馈增益矩阵为

$$F(\epsilon) = - (D'_\epsilon D_\epsilon)^{-1} (D'_\epsilon C_\epsilon + B' P_\epsilon).$$

类似地, 对给定的 $\gamma > \gamma_\infty^*$, 系统的 H_∞ 次优控制律可通过下面的 ϵ 摄动 H_∞ ARE 的解 $P_\epsilon > 0$ 而得到,

$$A' P_\epsilon + P_\epsilon A + C'_\epsilon C_\epsilon + P_\epsilon E E' P_\epsilon / \gamma^2$$

$$-(P_\epsilon B + C'_\epsilon D_\epsilon)(D'_\epsilon D_\epsilon)^{-1}(D'_\epsilon C_\epsilon + B'P_\epsilon) = 0,$$

H_∞ 次优状态反馈增益矩阵为

$$F(\gamma, \epsilon) = -(D'_\epsilon D_\epsilon)^{-1}(D'_\epsilon C_\epsilon + B'P_\epsilon).$$

现在考虑练习 10.2 所给的系统。

(a) 验证 ϵ 摄动 H_2 ARE 的解满足当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$P_\epsilon \rightarrow \begin{bmatrix} P_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中, P_s 是练习 10.2(a) 部分的解。

(b) 给定 $\gamma > \gamma_\infty^*$, 验证 ϵ 摄动 H_∞ ARE 的解满足当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$P_\epsilon \rightarrow \begin{bmatrix} P_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中, P_s 是练习 10.2(b) 部分的解。

10.4 考虑式(10.3.14)所表示的离散时间系统, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

和

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad D = 0.$$

注意, (A, B, C, D) 是特殊坐标基(SCB)形式, 在 0 和 0.5 处有两个不变零点, 其相对阶为 2。

(a) 求相应的 H_2 DARE(10.3.21) 的解 $P_s > 0$, 求极优值 γ_2^* 和 H_2 最优状态反馈增益矩阵 F 。

(b) 确定极优值 γ_∞^* 。给定 $\gamma > \gamma_\infty^*$, 求相应的 H_∞ ARE(10.3.25) 的解 $P_s > 0$, 计算 H_∞ 次优状态反馈增益矩阵 $F(\gamma)$ 。

第 11 章 静态输出反馈下的干扰解耦

11.1 导论

无论是否有内部稳定的情形,我们都相当了解状态或输出反馈实现干扰解耦的问题。在过去的 30 年中,有很多文献对此进行了深入的研究。这个问题可以归结为寻找一个反馈控制器,使得从干扰输入到被控输出的闭环传递函数在所有频率上都是零。这项研究实际上推动了线性系统几何方法的发展,它在一系列问题中都发挥了重要作用,如分散控制、无交互(noninteracting)控制、模型参考跟踪控制、 H_2 最优控制和 H_∞ 最优控制。状态反馈下的干扰解耦问题(DDP)已经由 Basile 和 Marro^[9]以及 Wonham 和 Morse^[155]解决,动态测量反馈下的干扰解耦问题(DDPM)已经由 Akashi 和 Imai^[1]以及 Schumacher^[126]解决。再进一步,状态反馈和内部稳定下的干扰解耦问题(DDPS)、动态测量反馈和内部稳定下的干扰解耦问题(DDPMS)分别由 Morse 和 Wonham^[101], Wonham 和 Morse^[155], Imai 和 Akashi^[69], Willems 和 Commault^[153]解决。

至于定常或静态测量反馈下的干扰解耦问题(DDPCM),文献中只有很少的结果。Hamano 和 Furuta^[62]把问题化成为寻找一个几何子空间,但只得到了一些特殊的解。近来,Chen^[20]得到了一组 DDPCM 可解性的显式条件,对一类具有从控制输入到被控输出左可逆的传递函数的系统,给出了所有可能的解。后来,Koumboulis 和 Tzierakis^[76]也给出了关于这类系统的类似结果。最近,Chen 等^[25]考虑了更加一般的系统,并取得了一些有趣的结果。对于不满足可逆条件的系统,文献[25]利用第 5 章的特殊坐标基(SCB)得到一个降阶系统。如果所得降阶系统满足可逆条件,则给定系统的 DDPCM 所有可能解就可显式地得到。文献[25]中所给的解是用一组线性方程来表示的,从而完美地解决了众所周知的 DDPCM 中非线性方程的难题。如果可逆性条件不满足,解就是一组和所得降阶系统相关的多项式方程。降阶的特点是使 DDPCM 求解问题得到简化,降低了计算代价。文献[20]和[25]中的结果是本章的核心。

在这一章中,我们考虑一般的线性、时不变系统的 DDPCM。系统 Σ 的表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + E w, \\ y = C_1 x + D_1 w, \\ h = C_2 x + D_2 u + D_{22} w, \end{cases} \quad (11.1.1)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $y \in \mathbb{R}^l$ 是测量输出, $w \in \mathbb{R}^r$ 是干扰, $h \in \mathbb{R}^p$ 是被控输出, $A, B, E, C_1, D_1, C_2, D_2$ 和 D_{22} 是具有适当维数的定常矩阵。定义 Σ_p 和 Σ_Q 分别表示四元组 (A, B, C_2, D_2) 和 (A, E, C_1, D_1) 。则 DDPCM 就是找定常测量反馈控制律

$$u = Ky, \quad (11.1.2)$$

其中, $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$, 使得闭环系统从 w 到 h 传递函数 $H_{hw}(s)$ 为零, 即

$$H_{hw}(s) = (C_2 + D_2 KC_1)(sI - A - BKC_1)^{-1}(E + BKD_1) + (D_{22} + D_2 KD_1) = 0. \quad (11.1.3)$$

进一步地, 定常测量反馈和具有内部稳定的干扰解耦问题(DDPCMS)就是寻找一个如同式(11.1.2)的定常测量反馈, 使得式(11.1.3)成立, 闭环系统状态矩阵 $A + BKC_1$ 是稳定的。

11.2 左可逆系统

我们在这一节中要给出一类系统的 DDPCM 和 DDPCMS 的结果。该类系统从控制输入到被控输出有左可逆的子系统。具体地说, 就是考虑一个时不变系统 Σ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + E w, \\ y = C_1 x, \\ h = C_2 x + D_2 u, \end{cases} \quad (11.2.1)$$

其中, 四元组 (A, B, C_2, D_2) 或 Σ_p 是左可逆的。对于这类系统, 我们将能够显式地表示出 DDPCM 和 DDPCMS 可解性的条件。实际上, 所有 DDPCM 的解由一些线性方程的解显式地构造出。遗憾的是, 我们仍然无法完全和显式地参数化 DDPCMS 的解。

首先, 利用定理 5.4.1 的特殊坐标基(SCB)结果来寻找 Σ_p 的非奇异变换 Γ_s 、 Γ_i 和 Γ_o 。定义一组新的状态、控制输入和被控输出坐标为

$$x = \Gamma_s \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_d \end{bmatrix}, \quad u = \Gamma_i \begin{pmatrix} u_0 \\ u_d \end{pmatrix}, \quad h = \Gamma_o \begin{bmatrix} h_0 \\ h_d \\ h_b \end{bmatrix}. \quad (11.2.2)$$

则式(11.2.1)所描述的系统可以变换到下面的形式 Σ_s :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \\ \dot{x}_d \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b & L_{ad}C_d \\ 0 & A_{bb} & L_{bd}C_d \\ B_d E_{da} & B_d E_{db} & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_d \end{bmatrix} + A_0 \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_d \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} B_{a0} & 0 \\ B_{b0} & 0 \\ B_{d0} & B_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_d \end{bmatrix} w, \\ y = [C_{1a} \quad C_{1b} \quad C_{1d}] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_d \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} h_0 \\ h_d \\ h_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0a} & C_{0b} & C_{0d} \\ 0 & 0 & C_d \\ 0 & C_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_d \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (11.2.3)$$

其中

$$A_0 := \begin{bmatrix} B_{a0} \\ B_{b0} \\ B_{d0} \end{bmatrix} [C_{0a} \quad C_{0b} \quad C_{0d}], \quad \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_d \end{bmatrix} := \Gamma_s^{-1} E$$

和

$$[C_{1a} \quad C_{1b} \quad C_{1d}] := C_1 \Gamma_s.$$

很容易验证,式(11.2.1)的 DDPCM 等价于式(11.2.3)的 DDPCM。接下来,令 Γ_a 为非奇异变换,使得

$$\Gamma_a^{-1} A_{aa} \Gamma_a = \begin{bmatrix} A_{aa}^{cc} & A_{aa}^{cc} \\ 0 & A_{aa}^{cc} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_a^{-1} E_a = \begin{bmatrix} E_a^c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.2.4)$$

$$\Gamma_a^{-1} B_{a0} = \begin{bmatrix} B_{a0}^c \\ B_{a0}^c \end{bmatrix}, \quad \Gamma_a^{-1} L_{ab} = \begin{bmatrix} L_{ab}^c \\ L_{ab}^c \end{bmatrix}, \quad (11.2.5)$$

$$\Gamma_a^{-1} L_{ad} = \begin{bmatrix} L_{ad}^c \\ L_{ad}^c \end{bmatrix}, \quad C_{0a} \Gamma_a = [C_{0a}^c \quad C_{0a}^c] \quad (11.2.6)$$

和

$$E_{da} \Gamma_a = [E_{da}^c \quad E_{da}^c], \quad C_{1a} \Gamma_a = [C_{1a}^c \quad C_{1a}^c] \quad (11.2.7)$$

其中, (A_{aa}^{cc}, E_a^c) 对是可控的。我们有下面的定理,它的证明给出了对于给定系统的 DDPCM,所有参数化解的构造性算法。

定理 11.2.1 考虑由式(11.2.1)给出的系统 Σ , 其中 (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的。 Σ 的 DDPCM 是可解的, 当且仅当

$$E_b = 0, \quad E_d = 0, \quad \ker(C_{1a}^c) \subset \ker \left\{ \begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} \right\}, \quad (11.2.8)$$

其中, $E_b, E_d, E_{da}^c, C_{0a}^c$ 和 C_{1a}^c 如式(11.2.3)~式(11.2.7)所定义。

证明 不失一般性,假设给定系统是式(11.2.3)的形式,其中 x_a 可以进一步被分解为式(11.2.4)和式(11.2.7)的形式。

(\Rightarrow) 如果 $\ker(C_{1a}^c) \subset \ker \left\{ \begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} \right\}$, 则至少存在一个 $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$, 使得

$$\begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} + KC_{1a}^c = \begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_0 \\ K_d \end{bmatrix} C_{1a}^c = 0. \quad (11.2.9)$$

同样,如果 $E_b = 0$ 和 $E_d = 0$, 不难验证, Σ 在静态测量反馈律 $u_d = Ky$ 下的闭环系统为

$$H_{hw}(s) = (C_2 + D_2 KC_1)(sI - A - BKC_1)^{-1} E$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & C_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_{aa}^{cc})^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a^c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=0, \quad (11.2.10)$$

其中, \star 是一些无关紧要的矩阵。显然, K 满足式(11.2.9)的控制律 $u=Ky$, 可求解 Σ 的 DDPCM。

(\Leftarrow) 反过来, 如果 Σ 的 DDPCM 是可解的, 则存在一个矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$, 使得

$$H_{hw}(s) = (C_2 + D_2 KC_1)(sI - A - BKC_1)^{-1}E = 0. \quad (11.2.11)$$

首先注意到, 所有静态测量反馈律集合是所有静态状态反馈律集合的子集。所以根据 Wonham 和 Morse^[155] 或 Wonham^[154], 可得

$$\text{im}(E) \subset \mathcal{V}^*(A, B, C_2, D_2) = \mathcal{X}_a.$$

根据定理 5.4.1 的特殊坐标基(SCB)性质可得 $E_b=0$ 和 $E_d=0$ 。接下来, 定义

$$\mathcal{W} := \langle A + BKC_1 \mid \text{im}(E) \rangle,$$

即最小的 $(A + BKC_1)$ 不变子空间包含 $\text{im}(E)$ 。所以, 等式(11.2.11)表明 $\mathcal{W} \subset \ker(C_2 + D_2 KC_1)$ 。根据定义, 有

$$\mathcal{W} \subset \mathcal{V}^*(A, B, C_2, D_2) = \mathcal{X}_a = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

因此存在相似变换 T , 使得

$$T^{-1}(A + BKC_1)T = \begin{bmatrix} A^{cc} & A^{cc} \\ 0 & A^{cc} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}E = \begin{bmatrix} E^c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.2.12)$$

和

$$(C_2 + D_2 KC_1)T = [0 \quad C^c], \quad \mathcal{W} = \text{span} \left\{ T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

其中, (A^{cc}, E^c) 是可控的。不难验证, T 的形式可选择为

$$T = \begin{bmatrix} T_* & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (11.2.13)$$

这里, T_* 的维数是 $\dim(\mathcal{X}_a) \times \dim(\mathcal{X}_a)$ 。令

$$K = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_d \end{bmatrix}, \quad (11.2.14)$$

注意, 式(11.2.12)~式(11.2.14)表明

$$T_*^{-1} \begin{bmatrix} A_{aa}^{cc} + B_{a0}^c (C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c) & A_{aa}^{cc} + B_{a0}^c (C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c) \\ B_{a0}^c (C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c) & A_{aa}^{cc} + B_{a0}^c (C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c) \end{bmatrix} T_* = \begin{bmatrix} A^{cc} & A^{cc} \\ 0 & A^{cc} \end{bmatrix}, \quad (11.2.15)$$

$$T_*^{-1} \begin{bmatrix} E_a^c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.2.16)$$

以及

$$\begin{bmatrix} C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c & C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c \\ B_d(E_{da}^c + K_d C_{1a}^c) & B_d(E_{da}^c + K_d C_{1a}^c) \end{bmatrix} T_* = [0 \quad \star], \quad (11.2.17)$$

其中, \star 还是表示无关紧要的矩阵。注意到式(11.2.15)~式(11.2.17)意味着由矩阵三元组

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_{aa}^{cc} & A_{aa}^{cc} \\ 0 & A_{aa}^{cc} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_a^c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c & C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c \\ B_d(E_{da}^c + K_d C_{1a}^c) & B_d(E_{da}^c + K_d C_{1a}^c) \end{bmatrix} \right\}$$

所表示的系统没有无限零点,则 (A_{aa}^{cc}, E_a^c) 的可控性表明

$$C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c = 0 \quad \text{和} \quad B_d(E_{da}^c + K_d C_{1a}^c) = 0. \quad (11.2.18)$$

因为 B_d 的列满秩性(见定理 5.4.1),式(11.2.18)等价于

$$C_{0a}^c + K_0 C_{1a}^c = 0 \quad \text{和} \quad E_{da}^c + K_d C_{1a}^c = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_0 \\ K_d \end{bmatrix} C_{1a}^c = 0 \Rightarrow \ker(C_{1a}^c) \subset \ker \left\{ \begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} \right\}$$

这就完成了定理 11.2.1 的证明。 ■

下面是一个有趣和有用的性质,这是直接从定理 11.2.1 的证明中推导出来的。

性质 11.2.1 在 (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的情况下,如果式(11.2.1)所描述的 Σ 的 DDPCM 是可解的,则所有解 DDPCM 的静态测量增益矩阵可表示为

$$\mathcal{K} := \left\{ \Gamma_1 K \mid K \in \mathbb{R}^{m \times l} \text{ 和 } \begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} + K C_{1a}^c = 0 \right\}, \quad (11.2.19)$$

其中, E_{da}^c 、 C_{0a}^c 和 C_{1a}^c 如式(11.2.7)所定义。

有趣的是,如果 $C_1 = I$,即 Σ 的所有状态都可用于反馈,则 C_{1a}^c 总是列满秩的,这意味着 $\ker(C_{1a}^c) = \{0\}$,定理 11.2.1 的第三个条件,即

$$\ker(C_{1a}^c) \subset \ker \left\{ \begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} \right\}$$

可自动地满足。因此,定理 11.2.1 的条件简化为 $E_b = 0$ 和 $E_d = 0$,这等价于几何条件 $\text{im}(E) \subset \mathcal{V}^*(A, B, C_2, D_2)$,这是众所周知的静态状态反馈(DDP)下的干扰解耦问题可解性的条件。

下面的定理涉及内部稳定下的静态测量反馈干扰解耦问题(DDPCMS)。

定理 11.2.2 考虑由式(11.2.1)给定的系统 Σ ,其中 (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的,则 Σ 的 DDPCMS 是可解的,当且仅当

1. Σ 的 DDPCM 是可解的。
2. A_{aa}^{cc} 的特征值都在开左半平面。
3. 至少存在一个 $K \in \mathcal{K}$,其中 \mathcal{K} 如同式(11.2.19)所定义,使得 $\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}_1$ 是渐近稳

定的,其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{aa}^{cc} & L_{ab}^c C_b & L_{ad}^c C_d \\ 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_{da}^c & B_d E_{db} & A_{dd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{a0}^c \\ B_{b0} \\ B_{d0} \end{bmatrix} [C_{0a}^c \quad C_{0b} \quad C_{0d}]$$

和

$$\tilde{C}_1 = [C_{1a}^c \quad C_{1b} \quad C_{1d}], \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{a0}^c & 0 \\ B_{b0} & 0 \\ B_{d0} & B_d \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1}.$$

这里,所有的子矩阵都如同式(11.2.2)~式(11.2.7)所定义。

证明 不失一般性,我们还是假设给定系统是式(11.2.3)的形式,其中 x_a 进一步被分解为式(11.2.4)和式(11.2.7)的形式。

(\Rightarrow): 如果 Σ 的 DDPCMS 是可解的,则 Σ 的 DDPCM 也是可解的。根据性质 11.2.1, Σ 的 DDPCM 所有解是式(11.2.19)的 \mathcal{K} 。则不难验证,对任何 $K \in \mathcal{K}$,

$$A + BKC_1 = \Gamma_s \begin{bmatrix} A_{aa}^{cc} & \star \\ 0 & \tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}_1 \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1}. \quad (11.2.20)$$

闭环系统的稳定性表明, A_{aa}^{cc} 一定是个稳定的矩阵,而且至少存在一个 $K \in \mathcal{K}$,使得 $\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}_1$ 是渐近稳定的。

(\Leftarrow): 定理的反过来部分只要把上面的论述反过来就可以了。这就完成了定理 11.2.2 的证明。 ■

我们在下面的数值例子中演示这一节所得到的结果。

例 11.2.1 考虑一个式(11.2.1)所表示的系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用[87]的软件工具箱很容易验证, (A, B, C_2, D_2) 已经是定理 5.4.1 的特殊坐标基 (SCB) 形式。而且 (A, B, C_2, D_2) 是左可逆的, 在 $s = -1$ 和 $s = -2$ 处分别有两个不变零点, 有两个 1 阶和 2 阶的无限零点。另外, $E_b = 0$ 和 $E_d = 0$ 。

$$A_{aa} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad E_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

和

$$C_{0a} = [1 \quad 1], \quad E_{da} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_{1a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

很容易验证, (A_{aa}, E_a) 是可控的, 以及

$$\ker \left\{ \begin{bmatrix} C_{0a} \\ E_{da} \end{bmatrix} \right\} = \ker(C_{1a}).$$

根据定理 11.2.1, 可得该系统的 DDPCM 是可解的。从性质 11.2.1 可知, 给定系统 DDPCM 的所有静态测量增益矩阵表示为

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & k_0 \\ -1 & k_1 \\ -2 & k_2 \end{bmatrix} \mid k_0 \in \mathbb{R}, k_1 \in \mathbb{R} \text{ 和 } k_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

即任何 $K \in \mathcal{K}$ 的 $u = Ky$ 都可以求解给定系统的 DDPCM, 任何使得 $u = Ky$ 求解给定系统 DDPCM 的 K 都必须属于 \mathcal{K} 。

接下来, 很容易观察到

$$\tilde{A} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \right\}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

经过几步迭代, 我们发现, 静态测量反馈增益

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & -15 \\ -2 & -20 \end{bmatrix},$$

可以实现 Σ 的完全干扰解耦, 保证闭环系统的内稳定。 $A + BKC_1$ 的闭环极点实际上在 $-1, -2, -11.276, -4.8372$ 和 $-0.9434 \pm j1.0786$ 。因此, Σ 的 DDPCM 得到解决。

11.3 一般多变量系统

在这一节中, 我们处理一般系统的 DDPCM。我们将首先给出问题可解性的必要条件。

定理 11.3.1 考虑由式(11.1.1)给定的系统 Σ 。如果 Σ 的 DDPCMS 是可解的, 则 Σ 必须满足下面的条件:

1. $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S := -(D_2' D_2)^+ D_2' D_{22} D_1' (D_1 D_1')^+$
2. $\text{im}(E + B S D_1) \subseteq \mathcal{V}^*(\Sigma_P) + B \ker(D_2)$
3. $\ker(C_2 + D_2 S C_1) \supseteq \mathcal{S}^*(\Sigma_Q) \cap C_1^{-1} \{\text{im}(D_1)\}$
4. $\mathcal{S}^*(\Sigma_Q) \subseteq \mathcal{V}^*(\Sigma_P)$

注意, 子空间 \mathcal{V}^* 和 \mathcal{S}^* 已经在第 3 章中定义了。

证明 首先, 如果 Σ 的 DDPCM 是可解的, 则从式(11.1.3)显然可得 $D_{22} + D_2 S D_1 = 0$, 其中 $S = -(D_2' D_2)^+ D_2' D_{22} D_1' (D_1 D_1')^+$ 。接下来, 对给定系统(11.1.1)应用预输出反馈律

$$u = S y + v \quad (11.3.1)$$

我们得到一个新系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B S C_1) x + B v + (E + B S D_1) w, \\ y = C_1 x + D_1 w, \\ h = (C_2 + D_2 S C_1) x + D_2 v + 0 w. \end{cases} \quad (11.3.2)$$

则根据[136]的结果, 可以证明, 对于式(11.3.2)所示的系统, 在一般的正则动态测量反馈下, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{cmp}} = A_{\text{cmp}} x_{\text{cmp}} + B_{\text{cmp}} y, \\ v = C_{\text{cmp}} x_{\text{cmp}} + N y, \end{cases} \quad (11.3.3)$$

不具有稳定性的干扰解耦问题是可解的, 当且仅当下面的条件得到满足:

1. $\text{im}(E + B S D_1) \subseteq \mathcal{V}^*(\tilde{\Sigma}_P) + B \ker(D_2)$
2. $\ker(C_2 + D_2 S C_1) \supseteq \mathcal{S}^*(\tilde{\Sigma}_Q) \cap C_1^{-1} \{\text{im}(D_1)\}$
3. $\mathcal{S}^*(\tilde{\Sigma}_Q) \subseteq \mathcal{V}^*(\tilde{\Sigma}_P)$

这里, $\tilde{\Sigma}_P$ 和 $\tilde{\Sigma}_Q$ 分别表示 $(A + B S C_1, B, C_2 + D_2 S C_1, D_2)$ 和 $(A + B S C_1, E + B S D_1, C_1, D_1)$ 。在第 3 章中已经证明, 在任何状态反馈和输出反馈下, \mathcal{V}^* 和 \mathcal{S}^* 都是不变的, 即引理 3.8.1 和引理 3.8.2。所以就有 $\mathcal{V}^*(\Sigma_P) = \mathcal{V}^*(\tilde{\Sigma}_P)$, $\mathcal{S}^*(\Sigma_Q) = \mathcal{S}^*(\tilde{\Sigma}_Q)$, 因此, 上面的 3 个条件就等价于定理 11.3.1 的条件 2 ~ 4。因为静态输出反馈只是一般动态测量反馈的一种特殊情况, 很显然, 条件 1 ~ 4 是给定系统 Σ 的 DDPCM 可解性的必要条件。注意, 对于 $D_{22} = 0$ 的情形, 定理 11.3.1 的第一个条件自动得到满足, 并且 $S = 0$ 。■

定理 11.3.2 考虑由式(11.1.1)给定的系统 Σ 。令 X 和 Y 是任何使得 $\ker(X) = \mathcal{V}^*(\Sigma_P)$ 和 $\text{im}(Y) = \mathcal{S}^*(\Sigma_Q)$ 的满秩定常矩阵。如果 Σ 的 DDPCM 是可解的, 则下面的方程至少有一个解 N ,

$$\begin{bmatrix} X B \\ D_2 \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} C_1 Y & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X A Y & X E \\ C_2 Y & D_{22} \end{bmatrix} = 0. \quad (11.3.4)$$

令 \mathcal{N} 是式 (11.3.4) 所有解的集合, 则任何可解 Σ 的 DDPCM 的定常测量反馈律 $u = Ky$ 满足 $K \in \mathcal{N}$, 即 K 是式 (11.3.4) 的解。

证明 如果系统 (11.1.1) 的 DDPCM 是可解的, 定理 11.3.1 的条件 1~4 必须满足。利用 [136] 的结果, 我们可以证明, 定理 11.3.1 的条件 1~4 等价于下面的条件: $\mathcal{S}^*(\Sigma_Q) \subseteq \mathcal{V}^*(\Sigma_P)$ 和存在一个矩阵 N , 使得

$$\left(\begin{bmatrix} A & E \\ C_2 & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ D_2 \end{bmatrix} N [C_1 \quad D_1] \right) (\mathcal{S}^*(\Sigma_Q) \oplus \mathbb{R}^q) \subseteq (\mathcal{V}^*(\Sigma_P) \oplus \{0\}), \quad (11.3.5)$$

这等价于方程 (11.3.4) 存在一个解 N 。而且, Σ 的任何没有内部稳定性的干扰解耦问题的动态测量反馈律

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{cmp}} = A_{\text{cmp}} x_{\text{cmp}} + B_{\text{cmp}} y, \\ u = C_{\text{cmp}} x_{\text{cmp}} + N y, \end{cases} \quad (11.3.6)$$

都必须有一个满足条件 (11.3.5) 的直接传输矩阵 N 。因为任何静态测量反馈律 $u = Ky$ 可被改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{cmp}} = \star x_{\text{cmp}} + \star y, \\ u = 0 \quad x_{\text{cmp}} + Ky, \end{cases} \quad (11.3.7)$$

其中, \star 是一些无关紧要的矩阵。因此, 如果 $u = Ky$ 可解 Σ 的 DDPCM, 则 $K \in \mathcal{N}$ 。

最后, 我们要提示, 对于任何 $N \in \mathcal{N}$, 有

$$(A + BNC_1) \mathcal{S}^*(\Sigma_Q) \subseteq \mathcal{V}^*(\Sigma_P), \quad D_{22} + D_2 ND_1 = 0,$$

$\text{im}(E + BND_1) \subseteq \mathcal{V}^*(\Sigma_P)$ 和 $(C_2 + D_2 NC_1) \mathcal{S}^*(\Sigma_Q) = \{0\}$ 。这就完成了定理 11.3.2 的证明。■

定理 11.3.1 和定理 11.3.2 给出了 DDPCM 解的存在性的必要条件。我们现在利用这些结果给出一类特殊系统 DDPCM 和 DDPCMS 可解性的必要和充分条件。

推论 11.3.1 考虑由式 (11.1.1) 给定的系统 Σ 。假设 $[C_1 \quad D_1]$ 和 $[B' \quad D_2']$ 都是满秩的, Σ_P 左可逆, Σ_Q 右可逆。则 Σ 在定常测量反馈下的干扰解耦问题 (DDPCM) 是可解的, 当且仅当

$$(C_2 + D_2 NC_1)(sI - A - BNC_1)^{-1}(E + BND_1) + (D_{22} + D_2 ND_1) \equiv 0, \quad (11.3.8)$$

其中, N 是已知的定常矩阵, 表示为

$$N = -(B'X'XB + D_2'D_2)^{-1} [B'X' \quad D_2'] \begin{bmatrix} XAY & XE \\ C_2Y & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y'C_1' \\ D_1' \end{bmatrix} (C_1YY'C_1' + D_1D_1')^{-1}. \quad (11.3.9)$$

同时, 给定系统 Σ 的 DDPCMS 是可解的, 当且仅当式 (11.3.8) 成立且 $A + BNC_1$ 是稳定的。给定系统 Σ 的 DDPCM 和 DDPCMS 的解如果存在的话, 则两者相等, 由 $u = Ny$ 唯一地确定。

证明 我们首先证明 DDPCM 情况。如果条件(11.3.8)成立,则很容易看出 $u = Ny$ 可解 Σ 的 DDPCM。反过来,如果 Σ 的 DDPCM 是可解的,则根据定理 11.3.2 可得存在一个非空集合 \mathcal{N} ,可解 Σ 的 DDPCM 的任意定常测量反馈律 $u = Ky$ 都必须满足 $K \in \mathcal{N}$ 。 Σ_P 是左可逆, $[B' \ D_2']$ 是满秩的条件下,根据第 5 章的结构分解可知,存在非奇异的变换 Γ_s 、 Γ_o 和 Γ_i ,使得

$$\Gamma_s^{-1} B \Gamma_i = \begin{bmatrix} B_{0a} & 0 \\ B_{0b} & 0 \\ B_{0d} & B_d \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o^{-1} D_2 \Gamma_i = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.3.10)$$

和

$$\mathcal{V}^*(\Sigma_P) = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (11.3.11)$$

因而有

$$X = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Gamma_s^{-1} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} XB \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{0b} & 0 \\ B_{0d} & B_d \\ D_{0*} & 0 \end{bmatrix} \Gamma_i^{-1}, \quad (11.3.12)$$

其中, B_d 和 D_{0*} 都是满秩的。所以, $[B'X' \ D_2']'$ 是列满秩的。类似地,在 Σ_Q 是右可逆, $[C_1 \ D_1]$ 是满秩的条件下,可以证明 $[C_1Y \ D_1]$ 是最大行秩的。把等式(11.3.4)重新写为

$$\begin{bmatrix} XB \\ D_2 \end{bmatrix} N [C_1Y \ D_1] = - \begin{bmatrix} XAY & XE \\ C_2Y & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (11.3.13)$$

不难看出,上面的方程至少有一个解,而且是惟一的,并由式(11.3.9)给出,所以 \mathcal{N} 中只有一个元素,因此有 $K = N$,条件(11.3.8)成立。

因为闭环系统的稳定性是由 $A + BNC_1$ 的特征值决定的,所以 DDPCMS 的结果是很明显的。 ■

下面我们要考虑给定系统不满足推论 11.3.1 中条件的情况。我们将用第 5 章的结构分解技术(SCB)把式(11.1.1)给定的系统 Σ 分解到子系统。从现在起,我们将假设定理 11.3.1 中的 DDPCM 可解性的必要条件是满足的。以下就是逐步算法。

DDPCM-R. O. S. 步骤 1

计算

$$N = - (B'X'XB + D_2'D_2)^{-1} [B'X' \ D_2'] \begin{bmatrix} XAY & XE \\ C_2Y & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y'C_1' \\ D_1' \end{bmatrix} (C_1YY'C_1' + D_1D_1')^{-1}, \quad (11.3.14)$$

然后对给定系统 Σ 应用预输出反馈 $u = Ny + v$,产生一个新的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BNC_1) x + Bv + (E + BND_1)w, \\ y = C_1x + D_1w, \\ h = (C_2 + D_2NC_1)x + D_2v + 0w. \end{cases}$$

而且有 $\text{im}(E+BND_1) \subseteq \mathcal{V}^*(\Sigma_P)$ 。

DDPCM-R. O. S. 步骤 2

找一个非奇异变换 Γ_m , 使得

$$y = \Gamma_m y_m = \Gamma_m \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

和

$$C_{1m} := \Gamma_m^{-1} C_1 = \begin{bmatrix} C_{1,0} \\ C_{1,1} \end{bmatrix}, \quad D_{1m} := \Gamma_m^{-1} D_1 = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中, $D_{1,0}$ 有最大行秩。

DDPCM-R. O. S. 步骤 3

利用第 5 章的特殊坐标基(SCB)寻找非奇异变换 Γ_s 、 Γ_i 和 Γ_o , 即令

$$x = \Gamma_s \begin{pmatrix} x_c \\ x_a \\ x_b \\ x_d \end{pmatrix}, \quad v = \Gamma_i \begin{pmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_c \\ v_* \end{pmatrix}, \quad h = \Gamma_o \begin{pmatrix} h_0 \\ h_d \\ h_b \\ h_* \end{pmatrix}, \quad (11.3.15)$$

得到变换后的系统为

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \\ \dot{x}_d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{cc} & B_c E_{ca} & L_{cb} C_b & L_{cd} C_d \\ 0 & A_{aa} & L_{ab} C_b & L_{ad} C_d \\ 0 & 0 & A_{bb} & L_{bd} C_d \\ B_d E_{dc} & B_d E_{da} & B_d E_{db} & A_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ x_a \\ x_b \\ x_d \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} x_c \\ x_a \\ x_b \\ x_d \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{c0} & 0 & B_c & 0 \\ B_{a0} & 0 & 0 & 0 \\ B_{b0} & 0 & 0 & 0 \\ B_{d0} & B_d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_c \\ v_* \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} E_c \\ E_a \\ E_b \\ E_d \end{bmatrix} w, \\ y_m &= \begin{bmatrix} C_{1,0c} & C_{1,0a} & C_{1,0b} & C_{1,0d} \\ C_{1,1c} & C_{1,1a} & C_{1,1b} & C_{1,1d} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ x_a \\ x_b \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} w, \\ \begin{pmatrix} h_0 \\ h_d \\ h_b \\ h_* \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{0c} & C_{0a} & C_{0b} & C_{0d} \\ 0 & 0 & 0 & C_d \\ 0 & 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ x_a \\ x_b \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_c \\ v_* \end{pmatrix}, \end{aligned} \right. \quad (11.3.16)$$

其中

$$A_0 := \begin{bmatrix} B_{c0} \\ B_{a0} \\ B_{b0} \\ B_{d0} \end{bmatrix} [C_{0c} \quad C_{0a} \quad C_{0b} \quad C_{0d}], \quad \begin{bmatrix} E_c \\ E_a \\ E_b \\ E_d \end{bmatrix} := \Gamma_s^{-1} (E + BND_1)$$

和

$$[C_{1c} \quad C_{1a} \quad C_{1b} \quad C_{1d}] := C_1 \Gamma_s. \quad (11.3.17)$$

令 Σ_N 表示 $(A + BNC_1, B, C_2 + DNC_1, D_2)$ 。我们进一步注意到, 式(11.3.16)中的分解具有下面的特性: (A_{cc}, B_c) 对是可控的, 如果 x_c 不存在的话, Σ_N 是左可逆的; (A_{bb}, C_b) 是可观的, 如果 x_b 不存在的话, Σ_N 是右可逆的; 如果 x_c 和 x_b 都不存在的话, Σ_N 是可逆的; (A_{dd}, B_d, C_d) 是方可逆的, 没有不变零点; A_{aa} 的特征值是 Σ_N 的不变零点。最后有

$$\mathcal{V}^*(\Sigma_N) = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{和} \quad \mathcal{S}^*(\Sigma_N) = \text{im} \left\{ \Gamma_s \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\}.$$

很容易验证, 在定理 11.3.1 的条件下有 $E_b = 0$ 和 $E_d = 0$ 。而且式(11.1.1)和变换后的系统(11.3.16)的 DDPCM 等价。

DDPCM-R. O. S. 步骤 4

令 Γ_a 是一个非奇异变换, 使得

$$\Gamma_a^{-1} A_{aa} \Gamma_a = \begin{bmatrix} A_{aa}^{cc} & A_{aa}^{cc} \\ 0 & A_{aa}^{cc} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_a^{-1} E_a = \begin{bmatrix} E_a^c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.3.18)$$

$$\Gamma_a^{-1} B_{a0} = \begin{bmatrix} B_{a0}^c \\ B_{a0}^c \end{bmatrix}, \quad \Gamma_a^{-1} L_{ab} = \begin{bmatrix} L_{ab}^c \\ L_{ab}^c \end{bmatrix}, \quad (11.3.19)$$

$$\Gamma_a^{-1} L_{ad} = \begin{bmatrix} L_{ad}^c \\ L_{ad}^c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_{1,0a} \\ C_{1,1a} \end{bmatrix} \Gamma_a = \begin{bmatrix} C_{1,0a}^c & C_{1,0a}^c \\ C_{1,1a}^c & C_{1,1a}^c \end{bmatrix} \quad (11.3.20)$$

和

$$C_{0a} \Gamma_a = [C_{0a}^c \quad C_{0a}^c], \quad (11.3.21)$$

$$E_{da} \Gamma_a = [E_{da}^c \quad E_{da}^c], \quad E_{ca} \Gamma_a = [E_{ca}^c \quad E_{ca}^c], \quad (11.3.22)$$

其中, (A_{aa}^{cc}, E_a^c) 是可控的。

DDPCM-R. O. S. 步骤 5

定义降阶辅助系统 Σ_R 为

$$\begin{cases} \dot{x}_R = A_R x_R + B_R u_R + E_R w, \\ y_R = C_{1R} x_R + D_{1R} w, \\ h_R = C_{2R} x_R + D_{2R} u_R, \end{cases} \quad (11.3.23)$$

其中

$$A_R = \begin{bmatrix} A_{cc} & B_c E_{ca}^c \\ 0 & A_{aa}^{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{c0} \\ B_{a0}^c \end{bmatrix} [C_{0c} \quad C_{0a}^c], \quad E_R = \begin{bmatrix} E_c \\ E_a^c \end{bmatrix},$$

$$B_R = \begin{bmatrix} B_{c0} & 0 & B_c & 0 \\ B_{a0}^c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_i^{-1}, \quad D_{2R} = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_d} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_i^{-1}$$

和

$$C_{1R} = \Gamma_m \begin{bmatrix} C_{1,0c} & C_{1,0a}^c \\ C_{1,1c} & C_{1,1a}^c \end{bmatrix}, \quad D_{1R} = \Gamma_m \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{2R} = \begin{bmatrix} C_{0c} & C_{0a}^c \\ E_{dc} & E_{da}^c \end{bmatrix}.$$

这就完成了算法。

令 n_x 为 x_R 所张成空间的维数。显然, n_x 通常比原系统(11.1.1)的维数 n 小得多。而且很容易看出, $(A_R, B_R, C_{2R}, D_{2R})$ 是右可逆的, 没有无限零点。对于由式(11.1.1)给定的系统 Σ 和由式(11.3.23)给定的降阶系统 Σ_R , 我们定义

$$\mathcal{K} := \{K \mid u = Ky \text{ 解 } \Sigma \text{ 的 DDPCM}\} \quad (11.3.24)$$

和

$$\mathcal{K}_R := \{K_R \mid u_R = K_R y_R \text{ 解 } \Sigma_R \text{ 的 DDPCM}\}. \quad (11.3.25)$$

我们在下面的定理中建立由式(11.1.1)给定的系统 Σ 和降阶系统 Σ_R 之间 DDPCM 的等价性。

定理 11.3.3 考虑由式(11.1.1)给定的系统 Σ 。假设定理 11.3.1 的条件 1~4 得到满足, 我们有

$$\mathcal{K} = \{K_R + N \mid K_R \in \mathcal{K}_R\}, \quad (11.3.26)$$

其中, N 由式(11.3.14)给出。则式(11.1.1)的 Σ 和式(11.3.23)的 Σ_R 的 DDPCM 可解性是等价的。

证明 为简单起见而不失一般性, 假设非奇异变换 $\Gamma_s = I, \Gamma_i = I, \Gamma_o = I$ 和 $\Gamma_m = I$, 这是由于它们对 DDPCM 的解没有任何影响。我们分两步来证明定理。

第一步 假设反馈 $u_R = K_R y_R$ 是系统 Σ_R 的 DDPCM 的解。把 K_R 分块为

$$K_R = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{d0} & K_{d1} \\ K_{c0} & K_{c1} \\ K_{*0} & K_{*1} \end{bmatrix},$$

则 $K_R \in \mathcal{K}_R$ 意味着 $D_{2R} K_R D_{1R} = 0$, 这表明 $K_{00} = 0$ 和 $K_{d0} = 0$ 。所以有

$$A_{RX} := A_R + B_R K_R C_{1R} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ B_{a0}^c (C_{0c} + K_{01} C_{1,1c}) & A_{aa}^{cc} + B_{a0}^c (C_{0a}^c + K_{01} C_{1,1a}^c) \end{bmatrix}, \quad (11.3.27)$$

其中

$$X_1 := A_{cc} + B_c (K_{c0} C_{1,0c} + K_{c1} C_{1,1c}) + B_{c0} (C_{0c} + K_{01} C_{1,1c})$$

和

$$X_2 := B_{c0}(C_{0a}^c + K_{01}C_{1,1a}^c) + B_c(E_{ca}^c + K_{c0}C_{1,0a}^c + K_{c1}C_{1,1a}^c),$$

还有

$$E_{RX} := E_R + B_R K_R D_{1R} = \begin{bmatrix} E_c + B_c K_{c0} D_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.3.28)$$

和

$$C_{RX} := \begin{bmatrix} C_{RX0} \\ C_{RXd} \end{bmatrix} := C_{2R} + D_{2R} K_R C_{1R} = \begin{bmatrix} C_{0c} + K_{01} C_{1,1c} & C_{0a}^c + K_{01} C_{1,1a}^c \\ E_{dc} + K_{d1} C_{1,1c} & E_{da}^c + K_{d1} C_{1,1a}^c \end{bmatrix}. \quad (11.3.29)$$

注意, $K_R \in \mathcal{K}_R$ 表明对所有的 s , 有

$$C_{RX}(sI - A_{RX})^{-1} E_{RX} \equiv 0,$$

或等价地, 对 $i=0, 1, \dots, n-1$, 有

$$C_{RX} A_{RX}^i E_{RX} = \begin{bmatrix} C_{RX0} \\ C_{RXd} \end{bmatrix} A_{RX}^i E_R = 0.$$

因为 $E_b=0$ 和 $E_d=0$, 我们有

$$E_x := E + BND_1 + BK_R D_1 = \begin{bmatrix} E_{RX} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

对系统(11.3.16), 应用定常测量反馈 $u = K_R y$ 而得到

$$A_x := A + BNC_1 + BK_R C_1 = \begin{bmatrix} A_{RX} & \star & \star & \star \\ B_{a0}^c C_{RX0} & \star & \star & \star \\ B_{b0} C_{RX0} & \star & \star & \star \\ B_{d0} C_{RX0} + B_d C_{RXd} & \star & \star & \star \end{bmatrix}$$

和

$$C_x := C_2 + D_2 N C_1 + D_2 K_R C_1 = \begin{bmatrix} C_{RX0} & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \end{bmatrix},$$

其中, \star 是一些无关紧要的矩阵。现在很容易验证

$$C_x E_x = \begin{bmatrix} C_{RX0} E_{RX} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

和

$$C_x A_x E_x = C_x \begin{bmatrix} A_{RX} E_{RX} \\ B_{a0}^c C_{RX0} E_{RX} \\ B_{b0} C_{RX0} E_{RX} \\ B_{d0} C_{RX0} E_{RX} + B_d C_{RXd} E_{RX} \end{bmatrix} = C_x \begin{bmatrix} A_{RX} E_{RX} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{RX0} A_{RX} E_{RX} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

由此可得

$$C_x A_x^i E_x = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1.$$

所以, 对于所有的 s , 有

$$C_x (sI - A_x)^{-1} E_x \equiv 0.$$

而且很容易检验出 $D_x := D_{22} + D_2(N + K_R)D_1 = 0$ 。因此, $u = (N + K_R)y$ 是原系统 Σ 的 DDPCM 的解, $N + K_R$ 是 \mathcal{K} 中的一个元素, 或等价地,

$$\{K_R + N \mid K_R \in \mathcal{K}_R\} \subseteq \mathcal{K}. \quad (11.3.30)$$

第二步 假设 $u = Ky$ 是原系统 Σ 的 DDPCM 的解, 使得

$$\begin{aligned} H_{hw}(s) &= (C_2 + D_2 K C_1)(sI - A - B K C_1)^{-1}(E + B K D_1) \\ &\quad + (D_{22} + D_2 K D_1) = 0. \end{aligned} \quad (11.3.31)$$

显然

$$D_{22} + D_2 K D_1 = 0. \quad (11.3.32)$$

定义包含 $\text{im}(E + B K D_1)$ 的最小 $(A + B K C_1)$ 不变子空间为

$$\mathcal{W} := \langle A + B K C_1 \mid \text{im}(E + B K D_1) \rangle.$$

由于 $A + B K C_1$ 和 $E + B K D_1$ 都是定常矩阵, 所以子空间 \mathcal{W} 的定义是合适的。那么, 方程 (11.3.31) 和方程 (11.3.32) 意味着 $\mathcal{W} \subset \ker(C_2 + D_2 K C_1)$, 而根据定义可得

$$\mathcal{W} \subset \mathcal{V}^*(\Sigma_P) = \mathcal{V}^*(\Sigma_N) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

因此, 存在相似变换 T , 使得

$$T^{-1}(A + B K C_1)T = \begin{bmatrix} A^{cc} & A^{cc} \\ 0 & A^{cc} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}(E + B K D_1) = \begin{bmatrix} E^c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.3.33)$$

和

$$(C_2 + D_2 K C_1)T = [0 \quad C^c], \quad \mathcal{W} = \text{span} \left\{ T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

其中, (A^{cc}, E^c) 是可控的。现在很容易验证, 可选择 T 的形式为

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (11.3.34)$$

其中, T_1 的维数是 $n_x \times n_x$ 。接下来, 令 $K_R := K - N$ 。显然, K_R 是式 (11.3.16) 中系统的 DDPCM 的解。我们进一步把和 x_n 相关联的子系统分解到式 (11.3.18)~式 (11.3.22) 中的形式, 划分 K_R 为

$$K_R = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{d0} & K_{d1} \\ K_{e0} & K_{e1} \\ K_{*0} & K_{*1} \end{bmatrix}. \quad (11.3.35)$$

很容易验证, $D_{22} + D_2 K D_1 = 0$ 意味着 $K_{00} = 0$, $\text{im}(E + B K D_1) \subseteq \mathcal{V}^*(\Sigma_P)$ 意味着 $K_{d0} = 0$. 所以我们有 $D_{2R} K_R D_{1R} = 0$. 同时, 式(11.3.33)~式(11.3.35)表明

$$T_*^{-1} A_{RX} T_* = \begin{bmatrix} A_*^{cc} & A_*^{c*} \\ 0 & A_*^{cc} \end{bmatrix}, \quad T_*^{-1} E_{RX} = \begin{bmatrix} E_*^c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.3.36)$$

和

$$\begin{bmatrix} C_{RX0} \\ B_d C_{RXd} \end{bmatrix} T_* = \begin{bmatrix} 0 & \star \\ 0 & \star \end{bmatrix}, \quad (11.3.37)$$

其中, A_{RX} 、 E_{RX} 、 C_{RX0} 和 C_{RXd} 如同式(11.3.27)~式(11.3.29)所定义的, \star 表示无关紧要的矩阵. 因为 (A_{dd}, B_d, C_d) 是可逆的, 表明 B_d 是列满秩的, 式(11.3.37)等价于

$$C_{RX} T_* = \begin{bmatrix} C_{RX0} \\ C_{RXd} \end{bmatrix} T_* = [0 \quad \star]. \quad (11.3.38)$$

注意, 式(11.3.36)和式(11.3.38)一起可得对于所有的 s , 有

$$C_{RX}(sI - A_{RX})^{-1} E_{RX} \equiv 0.$$

因此, $u_R = K_R y_R$ 是降阶系统 Σ_R 的 DDPCM 的解, 这表明

$$\mathcal{K} \subseteq \{K_R + N \mid K_R \in \mathcal{K}_R\}. \quad (11.3.39)$$

从方程(11.3.30)和(11.3.39)可得 $\mathcal{K} = \{K_R + N \mid K_R \in \mathcal{K}_R\}$. ■

下面的推论涉及一些特殊情况, 即我们能够得到 DDPCM 的完全解. 推论 11.3.2 再现在 11.2 节中得到的结果.

推论 11.3.2 考虑由式(11.1.1)给定的系统 Σ , 其中矩阵四元组 (A, B, C_2, D_2) 或 Σ_P 是左可逆的. 则 Σ 在定常测量反馈下的干扰解耦问题是可解的, 当且仅当定理 11.3.1 的条件 1~4 得到满足, 并且

$$\ker(C_{i,1a}^c) \subset \ker \left\{ \begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} \right\}, \quad (11.3.40)$$

这类系统 DDPCM 的所有解可表示为

$$\mathcal{K} := \left\{ \Gamma_i \begin{bmatrix} 0 & K_{01} \\ 0 & K_{d1} \\ K_{*0} & K_{*1} \end{bmatrix} \Gamma_m^{-1} + N \left[\begin{bmatrix} C_{0a}^c \\ E_{da}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{01} \\ K_{d1} \end{bmatrix} C_{i,1a}^c = 0 \right] \right\}, \quad (11.3.41)$$

其中, K_{*0} 和 K_{*1} 是任何具有适当维数的定常矩阵.

现在, 再来看由式(11.1.1)给定的系统 Σ . 定义系统 Σ 的转置为

$$\begin{cases} \dot{x} = A'x + C'_1 u + C'_2 w, \\ y = B'x + D'_2 w, \\ h = E'x + D'_1 u + D'_{22} w. \end{cases} \quad (11.3.42)$$

很显然,当且仅当转置系统的 DDPCM 是可解时, Σ 的 DDPCM 才是可解的。而且,如果 Σ_Q 是右可逆的话,转置系统满足推论 11.3.2 的条件。所以有下面的推论。

推论 11.3.3 考虑由式(11.1.1)给定的系统 Σ 。如果 Σ_Q 是右可逆的,则 Σ 的 DDPCM 所有可能的解可通过对转置系统(11.3.42)应用推论 11.3.2 的结果得到。

根据推论 11.3.2 和推论 11.3.3,我们看出,如何在 Σ_P 是左可逆,或者 Σ_Q 是右可逆,或者两者都是的情况下解 Σ 的 DDPCM 问题。非常有趣的是,通过解一组如式(11.3.41)所示形式的线性方程,就可以得到答案。因此,解是很容易计算的。

我们现在进一步处理 Σ_P 不是左可逆, Σ_Q 不是右可逆的情形。此时,利用下面的算法得到一个不可简约(irreducible)降阶系统,它可以大大地简化 DDPCM 的解。基本思想如下:从定理 11.3.3 可以清楚地知道,原系统的 DDPCM 等价于一个维数小许多的辅助系统 Σ_R 的 DDPCM,它是取自原系统 \mathcal{V}' 的一个子集。然后,对偶该辅助系统,对它利用类似的降阶,得到一个新的辅助系统,它的动态阶数被进一步降低了。我们不断地重复此过程,直到系统不可简约。有下面的逐步算法。

R. R. O. S 步骤 1

对于给定系统 Σ ,它的 Σ_P 不是左可逆的, Σ_Q 不是右可逆的,应用 DDPCM. R. O. S 步骤 1~DDPCM. R. O. S 步骤 5,得到一个定常矩阵 N 和一个降阶系统 Σ_R 。令 $\Sigma_{\alpha,R} := \Sigma_R$ 和 $N_\alpha := N$,其中 $\alpha=1$ 。对 $\Sigma_{\alpha,R}$ 的所有矩阵增加一个下标 α 。

R. R. O. S 步骤 2

对于 $\Sigma_{\alpha,R}$,定义一个辅助系统 $\Sigma_{\alpha,R}^*$ 为

$$\begin{cases} \dot{x}_{\alpha,R} = A'_{\alpha,R} x_{\alpha,R} + C'_{\alpha,1R} u_{\alpha,R} + C'_{\alpha,2R} w_{\alpha,R}, \\ y_{\alpha,R} = B'_{\alpha,R} x_{\alpha,R} + D'_{\alpha,2R} w_{\alpha,R}, \\ h_{\alpha,R} = E'_{\alpha,R} x_{\alpha,R} + D'_{\alpha,1R} u_{\alpha,R}. \end{cases} \quad (11.3.43)$$

如果上面的系统 $\Sigma_{\alpha,R}^*$ 不满足定理 11.3.1 的条件 1~4,则 Σ 的 DDPCM 没有解,过程终止。如果上面的系统 $\Sigma_{\alpha,R}^*$ 不能被进一步降阶,令 $\tilde{\alpha} := \alpha, \tilde{n}_x$ 为 $\Sigma_{\alpha,R}$ 的动态阶次,并停止算法。否则转到 R. R. O. S 步骤 3。

R. R. O. S 步骤 3

对 $\Sigma_{\alpha,R}^*$ 应用 DDPCM. R. O. S 步骤 1~DDPCM. R. O. S 步骤 5,找到另一个矩阵 N (为后面的应用,重新命名为 $N_{\alpha+1}$),以及另一个降阶系统,比如说是 $\Sigma_{\alpha+1,R}$,表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_{\alpha+1,R} = A_{\alpha+1,R} x_{\alpha+1,R} + B_{\alpha+1,R} u_{\alpha+1,R} + E_{\alpha+1,R} w_{\alpha+1,R}, \\ y_{\alpha+1,R} = C_{\alpha+1,1R} x_{\alpha+1,R} + D_{\alpha+1,1R} w_{\alpha+1,R}, \\ h_{\alpha+1,R} = C_{\alpha+1,2R} x_{\alpha+1,R} + D_{\alpha+1,2R} u_{\alpha+1,R}. \end{cases} \quad (11.3.44)$$

如果 $(A_{\alpha+1,R}, B_{\alpha+1,R}, C_{\alpha+1,2R}, D_{\alpha+1,2R})$ 也是可逆的(它总是右可逆的),令 $\tilde{\alpha} := \alpha + 1$,

\tilde{n}_x 是 $\Sigma_{\alpha+1,R}$ 动态阶, 停止算法。否则令 $\alpha := \alpha + 1$, 然后返回到 R. R. O. S 步骤 2。

考虑给定系统(11.1.1), 其中 Σ_p 不是左可逆, Σ_Q 不是右可逆, 假设定理 11.3.1 的条件 1~4 是满足的。利用定理 11.3.3、推论 11.3.2 和推论 11.3.3 的结果得到下面的定理。

定理 11.3.4 如果四元组 $(A_{\tilde{\alpha},R}, B_{\tilde{\alpha},R}, C_{\tilde{\alpha},2R}, D_{\tilde{\alpha},2R})$ 是可逆的, 则应用推论 11.3.2 的结果可以解 Σ 的 DDPCM。具体地说, 如果令 $\mathcal{K}_{\tilde{\alpha},R}$ 为 $\Sigma_{\tilde{\alpha},R}$ 的 DDPCM 所有解的集合, 则 Σ 的 DDPCM 所有的解在 $\tilde{\alpha}$ 为奇整数时为

$$\mathcal{K} = \{K_{\tilde{\alpha},R} + \tilde{N} \mid K_{\tilde{\alpha},R} \in \mathcal{K}_{\tilde{\alpha},R}, \tilde{N} = N_1 + N'_2 + \cdots + N_{\tilde{\alpha}}\}, \quad (11.3.45)$$

$\tilde{\alpha}$ 是偶整数时为

$$\mathcal{K} = \{K'_{\tilde{\alpha},R} + \tilde{N} \mid K_{\tilde{\alpha},R} \in \mathcal{K}_{\tilde{\alpha},R}, \tilde{N} = N_1 + N'_2 + \cdots + N'_{\tilde{\alpha}}\}, \quad (11.3.46)$$

很显然, 如果 $\mathcal{K}_{\tilde{\alpha},R}$ 是空的, 则 \mathcal{K} 是空的, 即 Σ 的 DDPCM 没有任何解。

我们用下面的例子来演示上面的结果。

例 11.3.1 考虑由式(11.1.1)给定的系统, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用[87]的软件工具箱很容易验证, Σ_p 既不是左可逆也不是右可逆的, Σ_Q 不是右可逆的, 而且定理 11.3.1 的条件 1~4 是满足的。根据 DDPCM, R. O. S. 步骤 1~DDPCM, R. O. S. 步骤 5, 我们得到

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

和一个降阶系统 $\Sigma_{1,R}$, 表示为

$$A_{1,R} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{1,R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.2361 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{1,R} = \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{1,1R} = \begin{bmatrix} -0.4472 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{1,1R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_{1,2R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.2236 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad D_{1,2R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

接下来,对 $\Sigma_{1,R}$ 的对偶系统 $\Sigma_{1,R}^*$ 应用 DDPCM. R. O. S. 步骤 1~DDPCM. R. O. S. 步骤 5, 得到

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

和另一个降阶系统 $\Sigma_{2,R}$, 表示为

$$A_{2,R} = -1.5, \quad B_{2,R} = [0 \ 0], \quad E_{2,R} = [0 \ 0.5477]$$

和

$$C_{2,1R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9129 \end{bmatrix}, \quad D_{2,1R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{2,2R} = -0.9129, \quad D_{2,2R} = [2 \ 0].$$

因为它的特殊坐标基(SCB)没有 \mathcal{X}_b 、 \mathcal{X}_c 和 \mathcal{X}_d 分量,显然 $(A_{2,R}, B_{2,R}, C_{2,2R}, D_{2,2R})$ 是可逆的。利用推论 11.3.2 的结果,我们得到一个参数化的增益矩阵

$$\mathcal{K}_{2,R} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

因而有

$$\mathcal{K} = \left\{ K'_{2,R} + N_1 + N'_2 = \begin{bmatrix} -1 & k_1 \\ -0.5 & k_2 \\ 0.5 & k_3 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (11.3.47)$$

给定系统 DDPCM 的任何 $u = Ky$ 的解满足 $K \in \mathcal{K}$, 任何 $K \in \mathcal{K}$ 的 $u = Ky$ 是系统 Σ 的 DDPCM 解。遗憾的是,系统的 DDPCMS 是不可解的,这是因为对任何式(11.3.47)所示的 $K \in \mathcal{K}$, 可以验证, $A + BKC_1$ 只是在 0 有一个固定的特征值。

下面的定理涉及 DDPCM 的解不能通过线性方程的解得到的情形。

定理 11.3.5 如果四元组 $(A_{\bar{\alpha},R}, B_{\bar{\alpha},R}, C_{\bar{\alpha},2R}, D_{\bar{\alpha},2R})$ 是不可逆的,则由式(11.1.1)给定的系统 Σ 的 DDPCM 是可解的,当且仅当对下面的一组多元多项式方程存在一个解 $\tilde{K}_{\bar{\alpha},R}$:

$$\left. \begin{aligned} & D_{\bar{\alpha},2R} K_{\bar{\alpha},R} D_{\bar{\alpha},1R} = 0, \\ & (C_{\bar{\alpha},2R} + D_{\bar{\alpha},2R} K_{\bar{\alpha},R} C_{\bar{\alpha},1R})(E_{\bar{\alpha},R} + B_{\bar{\alpha},R} K_{\bar{\alpha},R} D_{\bar{\alpha},1R}) = 0, \\ & (C_{\bar{\alpha},2R} + D_{\bar{\alpha},2R} K_{\bar{\alpha},R} C_{\bar{\alpha},1R})(A_{\bar{\alpha},R} + B_{\bar{\alpha},R} K_{\bar{\alpha},R} C_{\bar{\alpha},1R}) \\ & \quad \times (E_{\bar{\alpha},R} + B_{\bar{\alpha},R} K_{\bar{\alpha},R} D_{\bar{\alpha},1R}) = 0, \\ & \quad \vdots \\ & (C_{\bar{\alpha},2R} + D_{\bar{\alpha},2R} K_{\bar{\alpha},R} C_{\bar{\alpha},1R})(A_{\bar{\alpha},R} + B_{\bar{\alpha},R} K_{\bar{\alpha},R} C_{\bar{\alpha},1R})^{\bar{n}_x} \\ & \quad \times (E_{\bar{\alpha},R} + B_{\bar{\alpha},R} K_{\bar{\alpha},R} D_{\bar{\alpha},1R}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.3.48)$$

而且,如果 Σ 的 DDPCM 的解存在的话,当 $\bar{\alpha}$ 是奇整数时,可表示为

$$\mathcal{K} = \{K_{\tilde{\alpha},R} + \tilde{N} \mid K_{\tilde{\alpha},R} \text{ 是(11.3.48)的解, } \tilde{N} = N_1 + N'_2 + \cdots + N'_\alpha\}, \quad (11.3.49)$$

当 $\tilde{\alpha}$ 是偶整数时,

$$\mathcal{K} = \{K'_{\tilde{\alpha},R} + \tilde{N} \mid K_{\tilde{\alpha},R} \text{ 是(11.3.48)的解, } \tilde{N} = N_1 + N'_2 + \cdots + N'_\alpha\}. \quad (11.3.50)$$

显然,如果式(11.3.48)没有解的话,给定系统 Σ 的 DDPCM 就没有解。

不同于推论 11.3.2 和推论 11.3.3 所得到的解,式(11.3.48)是关于 $K_{\tilde{\alpha},R}$ 的非线性多项式方程。原则上,可以从方程(11.3.48)中消去 $K_{\tilde{\alpha},R}$,只要从系统数据 $A_{\tilde{\alpha},R}, B_{\tilde{\alpha},R}, E_{\tilde{\alpha},R}, C_{\tilde{\alpha},1R}, D_{\tilde{\alpha},1R}, C_{\tilde{\alpha},2R}$ 和 $D_{\tilde{\alpha},2R}$ 能够决定实际的解的 $K_{\tilde{\alpha},R}$ 存在条件,只要利用 Collins^[39,40] 中的 QEPCAD 就可以完成这项工作。这只是有限步计算问题,但却很难解释所得到的条件。如果我们只对单纯的数值计算感兴趣,那么只要采用把 Grobner 基和 QEPCAD 相结合的方法,就可以找到所有多项式方程的解(见 Cox 等^[42])。这个计算上的优势在寻找 $\Sigma_{\tilde{\alpha},R}$ 的解中是明显的。

我们注意到,求解 DDPCM 的降阶特性,可用于产生数值技术,以此得到具有内稳定的定常测量反馈干扰解耦问题(DDPCMS)的解。原则上,DDPCMS 的解可通过 Collins^[39,40] 的 QEPCAD 解得,这是因为稳定性条件可通过一组有限的多项式不等式来表示。

11.4 练习

11.1 验证系统(11.1.1)的 DDPCM 是可解的,其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_2 = [0 \ 0 \ 1], \quad D_2 = 0, \quad D_{22} = 0.$$

找出所有的解,证明给定系统的 DDPCMS 也是可解的。

11.2 设系统(11.1.1)的不可简约的降阶系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_{\tilde{\alpha},R} = A_{\tilde{\alpha},R}x_{\tilde{\alpha},R} + B_{\tilde{\alpha},R}u_{\tilde{\alpha},R} + E_{\tilde{\alpha},R}w_{\tilde{\alpha},R}, \\ y_{\tilde{\alpha},R} = C_{\tilde{\alpha},1R}x_{\tilde{\alpha},R} + D_{\tilde{\alpha},1R}w_{\tilde{\alpha},R}, \\ h_{\tilde{\alpha},R} = C_{\tilde{\alpha},2R}x_{\tilde{\alpha},R} + D_{\tilde{\alpha},2R}u_{\tilde{\alpha},R}, \end{cases}$$

其中

$$A_{\bar{a},R} = -1.5, \quad B_{\bar{a},R} = [0 \quad 1], \quad E_{\bar{a},R} = [0 \quad 0.5477],$$

$$C_{\bar{a},1R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9129 \end{bmatrix}, \quad D_{\bar{a},1R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C_{\bar{a},2R} = -0.9129, \quad D_{\bar{a},2R} = [2 \quad 0].$$

注意,子系统 $(A_{\bar{a},R}, B_{\bar{a},R}, C_{\bar{a},2R}, D_{\bar{a},2R})$ 是不可逆的。证明:相应的多元非线性多项式方程(11.3.48)有一个解。因此,根据定理 11.3.5,该系统的 DDPCM 是可解的。找出这组多项式方程的所有可能解。

第 12 章 软件工具箱

12.1 导论

本书中的所有算法都已在 MATLAB 下实现了,并收集在一个名为线性系统工具箱 (Linear Systems Toolkit) 的软件包中。目前,该工具箱的试用版可以通过因特网网站 <http://linearsystemskit.net> (或 <http://hdd.ece.nus.edu.sg/~bmchen/>) 下载。读者可以通过该网页注册他们的姓名、单位和电子邮件地址,然后就可通过电子邮件收到这个工具箱中所有 m 函数的压缩文件。已注册的用户也会通过电子邮件自动地收到工具箱的更新版本。然而,工具箱的版权为作者所有。用户应当明白从网上下载的,或通过电子邮件接收到的工具箱只能用于科研工作。严禁在未经作者许可的情况下进行商业开发和商业销售。

当前版本的工具箱由以下一些内含帮助文件的 m 函数所组成:

线性系统工具箱——版本 0.99

2004 年 8 月发布

自治系统的分解

ssd——连续时间稳定性结构分解

dssd——离散时间稳定性结构分解

jcf——Jordan 规范分解

rjd——实 Jordan 分解

无驱动和无检测系统分解

osd——可观测结构分解

obidx——观测性指数

bdosd——分块对角可观测结构分解

csd——可控结构分解

ctridx——可控结构分解

bdcscd——分块对角可控结构分解

正则系统的分解和结构特性

scbraw——没有积分器链的初步分解
 scb——连续时间系统分解
 ds cb——离散时间系统分解
 kcf——系统矩阵的 Kronecker 规范形分解
 morseidx——Morse 不变指数
 blkz——阻塞零点
 invz——不变零点结构
 infz——无限零点结构
 l_invt——左可逆性
 r_invt——右可逆性
 normrank——常态秩
 v_star——弱不可观子空间
 v_minus——稳定的弱不可观子空间
 v_plus——不稳定的弱不可观子空间
 s_star——强可控子空间
 s_minus——稳定的强可控子空间
 s_plus——不稳定强可控子空间
 r_star——可控的弱不可观子空间
 n_star——分布的弱不可观子空间
 s_lambda——几何子空间 $S_{\{\lambda\}}$
 v_lambda——几何子空间 $V_{\{\lambda\}}$

矢量子空间的运算

ssorder——矢量子空间排序
 ssintsec——矢量子空间之交
 ssadd——矢量子空间之和

奇异系统的分解和特性

ea_ds——矩阵束 (E, A) 的分解
 sd_ds——奇异系统分解
 invz_ds——奇异系统不变零点结构
 infz_ds——奇异系统无限零点结构
 l_invt_ds——奇异系统左可逆结构
 r_invt_ds——奇异系统右可逆结构

系统因子分解

mpfact——连续最小相位/全通因子分解
 iofact——连续时间内外分解因子分解
 gcfact——连续广义串级因子分解
 dmpfact——离散最小相位/全通因子分解
 diofact——离散时间内外因子分解

通过传感器/执行器选择的结构配置

sa_sen——通过传感器选择的结构配置
 sa_act——通过执行器选择的结构配置

渐近时标和特征结构配置(ATEA)

atea——连续时间 ATEA
 gm2star——连续时间 H_2 控制极优值
 h2care——连续时间 H_2 ARE 的解
 h2state——连续时间 H_2 控制的解
 gm8star——连续时间 H_∞ 控制的极优值
 h8care——连续时间 H_∞ ARE 的解
 h8state——连续时间 H_∞ 控制的解
 addps——连续时间干扰解耦的解
 datea——离散时间 ATEA
 dare——一般离散时间 ARE 的解
 dgm2star——离散时间 H_2 控制极优值
 h2dare——离散时间 H_2 ARE 的解
 dh2state——离散时间 H_2 控制的解
 dgm8star——离散时间 H_∞ 控制极优值
 h8dare——离散时间 H_∞ ARE 的解
 dh8state——离散时间 H_∞ 控制的解
 daddps——离散时间干扰解耦的解

静态输出反馈下的干扰解耦

ddpcm——静态输出反馈下的干扰解耦问题(DDPCM)的解
 rosys4ddp——可用于解 DDPCM 的不可简约降阶系统

以上的线性系统工具箱共包含有 66 个 m 函数。其中一些 m 函数是交互式的,在执行过程中需要用户输入其他参数。一些函数的返回结构可以是符号,也可以是数值。

12.2 m 函数描述

我们在这一节中要详细地给出所有线性系统工具箱中所列 m 函数的描述。本节可作为工具箱的用户手册,其风格和其他与 MATLAB 相关的文档是一致的。我们会不时增加新的东西,用户可以从网上得到工具箱的最新版本。

12.2.1 自治系统的分解

SSD 稳定性结构分解

$$[D, T, nn, no, np] = \text{SSD}(A)$$

对一个方的矩阵,给出下面的块对角形式:

$$D = \text{inv}(T) * A * T = \begin{bmatrix} A- & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A+ \end{bmatrix} \begin{matrix} nn \\ no \\ np \end{matrix}$$

其中, $A-$ 、 A_0 和 $A+$ 的特征值分别在开左半平面、虚轴上和开右半平面。

也参见 DSSD。

DSSD 离散时间稳定结构分解

$$[D, T, nn, no, np] = \text{DSSD}(A)$$

对一个方的矩阵给出下面的块对角形式:

$$D = \text{inv}(T) * A * T = \begin{bmatrix} A- & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A+ \end{bmatrix} \begin{matrix} nn \\ no \\ np \end{matrix}$$

其中, $A-$ 、 A_0 和 $A+$ 的特征值分别在复平面单位圆内、单位圆上和单位圆外。

也参见 SSD。

JCF Jordan 规范分解

$$[J, T] = \text{JCF}(A)$$

产生一个可以把方的矩阵变成 Jordan 规范形的变换,即

$$\text{inv}(T) * A * T = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

其中,每个块 J_i , $i = 1, 2, \dots, k$ 具有下面的形式:

$$J_i = \begin{bmatrix} \text{eig}_i & & 1 & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \text{eig}_i & & 1 \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \text{eig}_i \end{bmatrix}$$

也参见 RJD。

RJD 实 Jordan 分解

$$[J, T] = \text{RJD}(A)$$

产生一个可以把方的矩阵变成实 Jordan 规范形的变换, 即

$$\text{inv}(T) * A * T = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

其中, 每个块 $J_i, i = 1, 2, \dots, k$ 对实的 eig_i 或 $\text{eig}_i = \mu_i + j * \omega_i$ 具有下面的形式:

$$J_i = \begin{bmatrix} \text{eig}_i & & 1 & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \text{eig}_i & & 1 \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \text{eig}_i \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} \text{Eig}_i & & I & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \text{Eig}_i & & I \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \text{Eig}_i \end{bmatrix}$$

其中

$$\text{Eig}_i = \begin{bmatrix} \mu_i & \omega_i \\ -\omega_i & \mu_i \end{bmatrix}$$

也参见 JCF。

12.2.2 无驱动和无检测系统的分解

OSD 无驱动系统的可观结构分解

$$[At, Ct, Ts, To, uom, oidx] = \text{OSD}(A, C)$$

返回(A, C)的可观结构分解。

输入参数:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

输出参数:

$$A_t = \text{inv}(T_s) * A * T_s = \begin{bmatrix} A_0 & \star & 0 & \cdots & \star & 0 \\ 0 & \star & I_{\{k_1-1\}} & \cdots & \star & 0 \\ 0 & \star & 0 & \cdots & \star & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \star & 0 & \cdots & \star & I_{\{k_p-1\}} \\ 0 & \star & 0 & \cdots & \star & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_t = \text{inv}(T_o) * C * T_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

uom = 不可观模态, oidx = (C,A) 的可观指数

参见 OBVIDX、BDOSD 和 CSD。

OBVIDX 矩阵对(A,C)的观测性指数

oidx= OBVIDX(A,C)

返回一个无驱动系统的可观指数。

输入参数:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

输出参数:

oidx = (A,C) 的可观指数

也参见 OSD 和 CTRIDX。

BDOSD 块对角可观结构分解

[At,Ct,Ts,To,ks]= BDOSD(A,C)

把可观对(A,C)变换到块对角可观测结构分解形。

输入参数:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

输出参数:

$$A_t = \text{inv}(T_s) * A * T_s = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

$$C_t = \text{inv}(T_o) * C * T_s = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & C_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \star & \cdots & C_k \\ \star & \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} \star & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \star & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_i = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

ks: 块 A_1, A_2, \dots, A_k 的大小。

也参见 OSD 和 BDCSD。

CSD 无检测系统可控结构分解

$$[At, Bt, Ts, Ti, ucm, Cidx] = \text{CSD}(A, B)$$

返回(A, B)的可控结构分解。

输入参数:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

输出参数:

$$At = \text{inv}(Ts) * A * Ts = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\{k_1-1\}} & \cdots & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{\{k_p-1\}} \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}$$

$$Bt = \text{inv}(Ts) * B * Ti = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ucm= 不可控模态, Cidx= 可控性指数

也参见 BDCSD、CTRIDX 和 OSD。

CTRIDX 矩阵对(A, B)的可控性指数

$$Cidx = \text{CTRIDX}(A, B)$$

返回一个无检测系统的可控性指数。

输入参数:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

输出参数:

Cidx = (A,B) 的可控指数

也参见 CSD 和 OBVIDX。

BDCSD 块对角可控结构分解

$$[At, Bt, Ts, Ti, ks] = \text{BDCSD}(A, B)$$

把可控对(A,B)变换成块对角可控结构分解形。

输入参数:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

输出参数:

$$At = \text{inv}(Ts) * A * Ts = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

$$Bt = \text{inv}(Ts) * B * To = \begin{bmatrix} B_1 & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & B_2 & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & B_3 & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_k & \star \end{bmatrix}$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \star & \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ks: 块 A₁, A₂, ..., A_k 的大小。

也参见 CSD 和 BDOSD。

12.2.3 正则系统的分解和性质

SCBRAW 初始形式的特殊坐标基(见 Chu 等^[36])

$$[At, Bt, Ct, Dt, Gms, Gmo, Gmi, dim] = \text{SCBRAW}(A, B, C, D)$$

把由(A,B,C,D)表示的正则系统分解到没有把状态子空间 x_d 分离到积分器链的初步 SCB 形式。

输入参数:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

输出参数：

$$\dot{x}_t = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t + Du_t$$

其中, $x_t = [x_a \ x_b \ x_c \ x_d]'$, 维数分别是 $\dim = [n_a, n_b, n_c, n_d]$ 。 Gms, Gmo 和 $Gmi =$ 状态、输出和输入变换。

也参见 SCB 和 DSCB。

SCB 连续时间系统特殊坐标

$$[As, Bt, Ct, Dt, Gms, Gmo, Gmi, \dim] = SCB(A, B, C, D)$$

把由 (A, B, C, D) 表示的连续时间系统分解成标准的 SCB 形式, 其中状态子空间 x_a 被分解成稳定、临界稳定和不稳定部分(在连续时间意义上), x_d 被分解成积分器链的形式。

输入参数：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

输出参数(见第 5 章)：

$$\dot{x}_t = (As + B_{OC_0})x_t + Btu_t, \quad y_t = Ctx_t + Dtu_t$$

其中, $x_t = [x_a^- \ x_a^0 \ x_a^+ \ x_b \ x_c \ x_d]'$

$$\dim = [n_a^-, n_a^0, n_a^+, n_b, n_c, n_d],$$

Gms, Gmo 和 $Gmi =$ 状态、输出和输入变换。

也参见 SCBRAW、DSCB 和 SSD。

DSCB 离散时间特殊坐标基

$$[As, Bt, Ct, Dt, Gms, Gmo, Gmi, \dim] = DSCB(A, B, C, D)$$

把由 (A, B, C, D) 表示的离散时间系统分解成标准的 SCB 形式, 其中状态子空间 x_a 被分解成稳定、临界稳定和不稳定部分(在离散时间意义上), x_d 被分解成延迟元链的形式。

输入参数：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

输出参数：

$$x_t(k+1) = (As + B_{OC_0})x_t(k) + Btu_t(k)$$

$$y_t(k) = Cx_t(k) + Dtu_t(k)$$

其中, $x_t = [x_a^- \ x_a^0 \ x_a^+ \ x_b \ x_c \ x_d]'$

$$\dim = [n_a^-, n_a^0, n_a^+, n_b, n_c, n_d],$$

Gms, Gmo 和 $Gmi =$ 状态、输出和输入变换。

也参见 SCBRAW、SCB 和 DSSD。

KCF 系统矩阵的 Kronecker 规范形分解

$$[Ks, U, V, \dim] = KCF(A, B, C, D)$$

返回系统矩阵的 Kronecker 规范形, 系统由 (A, B, C, D) 描述, 即

$$Ks = U \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} V$$

其中, 符号变量 Ks 是 Kronecker 形式。

$$\text{dims} = \begin{bmatrix} na & na \\ nb + pb & nb \\ nc & nc + mc \\ nd + md & nd + md \\ m0 & m0 \\ r0 & c0 \end{bmatrix}$$

包含了和 x_a, x_b, x_c, x_d, I 和 0 相关联的 Kronecker 块的维数 (见第 3 章和第 5 章)。

也参见 SCB、DSCB 和 MORSEIDX。

MORSEIDX 正则系统的 Morse 不变指数

$$[I1, I2, I3, I4] = \text{MORSEIDX}(A, B, C, D)$$

对以 (A, B, C, D) 所表示的系统, 返回 Morse 结构不变列。

$I1 =$ Jordan 形中的零动态矩阵

$I2 = I_2$ 列 = 右可逆结构

$I3 = I_3$ 列 = 左可逆结构

$I4 = I_4$ 列 = 不变零点结构

注意, 正式的列应该包括不变零点和 Jordan 块的大小。

也参见 INVZ、INFZ、L_INVZ 和 R_INVZ。

BLKZ 多变量系统的阻塞零点

$$\text{bzero} = \text{BLKZ}(A, B, C, D)$$

返回由 (A, B, C, D) 所表示系统的阻塞零点, 一个如 'alpha' 的阻塞零点就是

$$H(\alpha) = C(\alpha I - A)^{-1} B + D = 0$$

阻塞零点也是不变零点。

也参见 INVZ。

INVZ 不变零点和正则系统的结构

$$\text{zrs} = \text{INVZ}(A, B, C, D)$$

返回由 (A, B, C, D) 所表示系统的不变零点和结构。

$\text{zrs} =$ 系统的所有不变零点

注意, 不变零点有时也称为传输零点。然而, 后者只是对可控和可观系统定义的 (译者注: 确切地应为非退化系统)。

也参见 BLKZ、INFZ 和 MORSEIDX。

INFZ 正则系统的无限零点结构

infzs= INFZ(A,B,C,D)

返回由(A,B,C,D)所表示系统的无限零点结构。

infzs= Morse 指数的 I_4 列

也参见 INVZ、L_INVNT、R_INVNT 和 MORSEIDX。

L_INVNT 正则系统的左可逆性结构

lefts= L_INVNT(A,B,C,D)

返回由(A,B,C,D)所表示的多变量系统的左可逆性。

lefts= Morse 指数的 I_3 列

也参见 INVZ、INFZ、R_INVNT 和 MORSEIDX。

R_INVNT 正则系统的右可逆性

rights= R_INVNT(A,B,C,D)

返回由(A,B,C,D)所表示的多变量系统的右可逆性。

rights= Morse 指数的 I_2 列

也参见 INVZ、INFZ、R_INVNT 和 MORSEIDX。

NORMRANK 正则系统的常态秩

NR= NORMRANK(A,B,C,D)

返回由(A,B,C,D)所表示线性系统的常态秩。

也参见 INVZ。

V_STAR 弱不可观几何子空间

V= V_STAR(A,B,C,D)

计算出一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 V^{\star} 。

注意:它对连续系统和离散时间系统都是适用的。

也参见 V_MINUS、V_PLUS 和 S_STAR。

V_MINUS 稳定的弱不可观几何子空间

V= V_MINUS(A,B,C,D[,dc])

计算出一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 V^{-} 。

注意,默认或 dc= 0 时,函数返回一个连续时间系统的子空间;否则在 dc= 1 时,计算离散时间系统的子空间。

也参见 V_STAR、V_PLUS 和 S_MINUS。

V_PLUS 不稳定的弱不可观几何子空间

V= V_PLUS(A,B,C,D[,dc])

计算出一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 V^{+} 。

注意,默认或 dc= 0 时,函数返回连续时间系统的子空间;否则在 dc= 1 时,计算离散时间系统的子空间。

也参见 V_STAR、V_MINUS 和 S_PLUS。

S_STAR 强可控几何子空间

S= S_STAR(A,B,C,D)

计算出一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 $S^{\wedge}\{\star\}$ 。

注意,这个函数对连续时间系统和离散时间系统都是适用的。

也参见 S_MINUS、S_PLUS 和 V_STAR。

S_MINUS 稳定的强可控几何子空间

S= S_MINUS(A,B,C,D[,dc])

计算出一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 $S^{\wedge}\{-\}$ 。

注意,默认或 dc= 0 时,函数返回连续时间系统的子空间;否则 dc= 1 时,计算离散时间系统子空间。

也参见 S_STAR、S_PLUS 和 V_MINUS。

S_PLUS 不稳定强可控几何子空间

S= S_PLUS(A,B,C,D[,dc])

计算一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 $S^{\wedge}\{+\}$ 。

注意,默认或 dc= 0 时,函数返回连续时间系统的子空间;否则在 dc= 1 时,计算离散时间系统的子空间。

也参见 S_STAR、S_MINUS 和 V_PLUS。

R_STAR 可控的弱不可观几何子空间

R= R_STAR(A,B,C,D)

计算一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 $R^{\wedge}\{\star\}$ 。

注意,这个函数对连续时间系统和离散时间系统都适用。

也参见 S_STAR、V_STAR 和 N_STAR。

N_STAR 分布的弱不可观几何子空间

N= N_STAR(A,B,C,D)

计算一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的几何子空间 $N^{\wedge}\{\star\}$ 。

注意,这个函数对连续时间系统和离散时间系统都适用。

也参见 R_STAR、V_STAR 和 S_STAR。

S_LAMBDA 几何子空间 S_lambda(见第 3 章的定义)

S= S_LAMBDA(A,B,C,D,lambda)

计算一个矩阵,它的列张成由(A,B,C,D)所表示系统的 $S_{\{\lambda\}}$,其中 'lambda'是实的或复的标量。

注意,这个函数对连续时间系统和离散时间系统都适用。

也参见 V_LAMBDA。

V_LAMBDA 几何子空间 V_lambda(见第 3 章的定义)

$V = V_LAMBDA(A, B, C, D, \lambda)$

计算一个矩阵, 它的列张成由 (A, B, C, D) 所表示系统的 $V_{\{\lambda\}}$, 其中 ' λ ' 是实的或复的标量。

注意, 这个函数对连续时间系统和离散时间系统都适用。

也参见 S_LAMBDA 。

12.2.4 向量空间的运算

SSORDER 矢量子空间排序

$SS = SSORDER(X, Y)$

确定两个分别由矩阵 X 和 Y 的列所张成的向量空间的排序。

输出参数:

如果 $SS = -1$, X 张成的子空间 $<$ Y 张成的子空间

如果 $SS = 0$, X 张成的子空间 $=$ Y 张成的子空间

如果 $SS = 1$, X 张成的子空间 $>$ Y 张成的子空间

如果 $SS = j = \sqrt{-1}$, 它们完全不相关。

也参见 $SSINTSEC$ 和 $SSADD$ 。

SSINTSEC 矢量子空间之交

$V = SSINTSEC(X, Y)$

计算两个分别由矩阵 X 和 Y 的列所张成的向量空间的交。

V 的列形成了交的基。

也参见 $SSORDER$ 和 $SSADD$ 。

SSADD 矢量子空间之和

$V = SSADD(X, Y)$

计算两个分别由矩阵 X 和 Y 的列所张成的向量空间的和。

V 的列形成了和的基。

也参见 $SSORDER$ 和 $SSINTSEC$ 。

注意, 上面的函数尽管简单, 但在各种控制问题中, 验证各几何条件, 产生文献中引入的其他几何子空间是特别有用的。

12.2.5 奇异系统的分解和性质

EA_DS 分解一对方的矩阵 (E, A)

$[Et, At, P, Q, n1, n2] = EA_DS(E, A)$

把由 (E, A) 构成的奇异系统

$$E \dot{x} = Ax + \dots$$

分解成下面的特殊形式:

$$\begin{aligned} E_t &= PEQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \\ A_t &= PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

其中, N 是一个幂零矩阵, P 和 Q 是非奇异的。

也参见 SD_DS。

SD_DS 连续时间奇异系统的结构分解

$$\begin{aligned} & [Es, As, Bs, Cs, Ds, Ez, Psi, Psc, Psd, Psr, Gme, Gms, Gmo, iGmi, dim] \\ & = SD_DS(E, A, B, C, D) \end{aligned}$$

产生由 (E, A, B, C, D) 所表示奇异系统的结构分解。

输入参数:

$$E \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$$

输出参数:

$$Es \dot{x}_t = Asx_t + Bs u_t, y_t = Cs x_t + Ds u_t$$

其中,

$$\begin{aligned} x_t &= [x_z \ x_e \ x_a \ x_b \ x_c \ x_d]' \\ dim &= [n_z, n_e, n_a, n_b, n_c, n_d], \end{aligned}$$

(Es, As, Bs, Cs, Ds) 和原系统具有同样的传递函数。 Ez, Psi, Psc, Psd 和 Psr 是一些矩阵或矢量, 它们的元素是 s 的多项式或有理函数。特别地,

$$Psc^* x_t + Psd^* u_t = Pst^* x_z$$

Gms, Gmo 和 $iGmi =$ 状态、输出变换和输入变换的逆。最后, Gme 是对矩阵 E 的一个非奇异变换, Gme 和 $iGmi$ 的元素都是一些 s 的多项式。

注意, 对离散时间奇异系统也是适用的。

也参见 EA_SD、SCB 和 DSCB。

INVZ_DS 奇异系统的不变零点和结构

$$zrs = INVZ_DS(E, A, B, C, D)$$

给出由 (E, A, B, C, D) 所表示的奇异系统的不变零点和它们的结构。

$zrs =$ 系统的所有不变零点

也参见 INVZ。

INFZ_DS 奇异系统的无限零点结构

$$infz_s = INFZ_DS(E, A, B, C, D)$$

返回由 (E, A, B, C, D) 所表示奇异系统的无限零点结构。

也参见 INFZ。

- L_INVDT_DS** 奇异系统的左可逆性
 $\text{lefts} = \text{L_INVDT_DS}(E, A, B, C, D)$
 返回由 (E, A, B, C, D) 所表示奇异系统的左可逆性。
 也参见 **L_INVDT**。
- R_INVDT_DS** 奇异系统的右可逆性
 $\text{rights} = \text{R_INVDT_DS}(E, A, B, C, D)$
 给出由 (E, A, B, C, D) 所表示奇异系统的右可逆性。
 也参见 **R_INVDT**。

12.2.6 系统因子分解

- MPFACT** 连续系统最小相位/全通因子分解
 $[\text{Am}, \text{Bm}, \text{Cm}, \text{Dm}, \text{Av}, \text{Bv}, \text{Cv}, \text{Dv}] = \text{MPFACT}(A, B, C, D)$
 计算具有传递函数矩阵 $G(s)$ 的可检测系统 (A, B, C, D) 的最小相位/全通因子分解, 假设 $[\text{B}' \ \text{D}']$ 和 $[\text{C} \ \text{D}]$ 都是满秩的, (A, B, C, D) 在虚轴上没有不变零点。
 最小相位/全通因子分解表示为

$$G(s) = G_m(s)V(s)$$

其中,

$$G_m(s) = \text{Cm}(sI - \text{Am})^{-1} \text{Bm} + \text{Dm}$$

是最小相位和左可逆的, 而

$$V(s) = \text{Cv}(sI - \text{Av})^{-1} \text{Bv} + \text{Dv}$$

是满足 $V(s)V'(-s) = I$ 的全通因子。

也参见 **IOFACT**、**GCFACT** 和 **DMPFACT**。

- IOFACT** 连续时间系统的内外因子分解
 $[\text{Ai}, \text{Bi}, \text{Ci}, \text{Di}, \text{Ao}, \text{Bo}, \text{Co}, \text{Do}] = \text{IOFACT}(A, B, C, D)$
 计算具有实现 (A, B, C, D) 的稳定正则传递函数矩阵 $G(s)$ 的内外因子分解, 其中的 $[\text{B}' \ \text{D}']$ 和 $[\text{C} \ \text{D}]$ 都假设是满秩的。
 内外因子分解表示为

$$G(s) = G_i(s)G_o(s)$$

其中,

$$G_i(s) = \text{Ci}(sI - \text{Ai})^{-1} \text{Bi} + \text{Di}$$

是内的, 而

$$G_o(s) = \text{Co}(sI - \text{Ao})^{-1} \text{Bo} + \text{Do}$$

是外的。

也参见 **MPFACT**、**GCFACT** 和 **DIOFACT**。

GCTFACT 连续系统广义串级因子分解

$$[A_m, B_m, C_m, D_m, A_u, B_u, C_u, D_u] = \text{GCTFACT}(A, B, C, D)$$

对具有传递函数 $G(s)$ 的系统 (A, B, C, D) 产生广义串级因子分解, 假设 $[B' \ D']$ 和 $[C \ D]$ 都是满秩的, (A, B, C, D) 所有“不好”的不变零点都是可检测的。

广义串级因子表示为

$$G(s) = G_m(s)U(s)$$

其中,

$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m + D_m$$

是最小相位和左可逆的, 而

$$U(s) = C_u(sI - A_u)^{-1}B_u + D_u$$

是稳定、右可逆和渐近全通的, 即

$$\text{当 } |s| \rightarrow \infty \text{ 时, } U(s)U'(-s) \rightarrow I$$

我们建议用户给出期望的零点位置来代替这些“不好”的不变零点。

也参见 MPFACT 和 IOFACT。

DMPFACT 离散系统最小相位/全通因子分解

$$[A_m, B_m, C_m, D_m, A_v, B_v, C_v, D_v] = \text{DMPFACT}(A, B, C, D)$$

对具有传递函数矩阵 $G(z)$ 的可检测系统 (A, B, C, D) 计算最小相位/全通因子分解, 系统在单位圆上没有不变零点。

最小相位/全通因子表示为

$$G(z) = G_m(z)V(z)$$

其中,

$$G_m(z) = C_m(zI - A_m)^{-1}B_m + D_m$$

是最小相位和左可逆的, 没有无限零点, 而

$$V(z) = C_v(zI - A_v)^{-1}B_v + D_v$$

是满足 $V(z)V'(1/z) = I$ 的全通因子。

也参见 DIOFACT 和 MPFACT。

DIOFACT 离散时间系统内外因子分解

$$[A_i, B_i, C_i, D_i, A_o, B_o, C_o, D_o] = \text{DIOFACT}(A, B, C, D)$$

计算具有实现 (A, B, C, D) , 稳定正则传递函数 $G(z)$ 的内外因子分解。

内外因子分解表示为

$$G(z) = G_i(z)G_o(z)$$

其中,

$$G_i(z) = C_i(zI - A_i)^{-1}B_i + D_i$$

是内的, 而

$$Go(z) = Co(zI - Ao)^{-1}Bo + Do$$

是外的。

也参见 DMPFACT 和 DIOFACT。

12.2.7 通过选择传感器/执行器实现结构配置

下面的两个函数需要用户在执行过程中输入参数,它只有在评估系统特性后才能确定。函数实际上是相互对偶的。第一个是关于传感器的选择,第二个是关于执行器的选择。

SA_SEN 通过传感器选择的结构配置

$$C = SA_SEN(A, B)$$

对于给定的无检测系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

该函数找到一个测量输出矩阵 C,使得所产生的系统(A, B, C)具有期望的结构特性。

注意,在给定(A, B)对的特性被评估以后,用户需要输入期望的结构参数。

也参见 SA_ACT。

SA_ACT 通过执行器选择的结构配置

$$B = SA_ACT(A, C)$$

对于给定的无驱动系统

$$dx/dt = Ax, \quad y = Cx$$

该函数找到一个输入矩阵,使得所产生的系统(A, B, C)具有期望的结构特性。

注意,在给定(A, C)对的特性被评估以后,用户需要输入期望的结构参数。

也参见 SA_SEN。

12.2.8 具有特征结构配置的状态反馈控制

ATEA 渐近时标和特征结构配置

$$F = ATEA(A, B, C, D[, option])$$

对以

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

所表示的连续时间系统,利用渐近时标结构和特征结构配置设计方法产生状态反馈律 $u = Fx$ 。用户可以利用'option'来选择数值结果,或通过调整参数'epsilon'来得到参数化的符号结果。后者在解控制问题时特别有用,如 H_2 和 H_∞ 次最优控制问题,以及干扰解耦问题。在默认情况下或 option= 0 时,程序将要求用户输

入'epsilon'值,并返回数值解。否则,如果 option= 1,F 将是一个以'epsilon'为参数的符号解。

注意,用户在执行过程中需要输入期望的特征结构。时标是通过调整参数'epsilon'来参数化的。

也参见 H2STATE、H8STATE、ADDPS 和 DATEA。

GM2STAR 连续时间 H2 控制极优值或最佳值

gms2= GM2STAR(A,B,C,D,E)

在所有可镇定的状态反馈控制器中,对系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$h = Cx + Du$$

计算 H2 次最优控制问题的极优值或最佳可达性能。

也参见 H2STATE、GM8STAR 和 DGM2STAR。

H2CARE 连续时间 H2 代数 Riccati 方程的解

P= H2CARE(A,B,C,D)

对于下面连续时间系统的 H2 最优控制代数 Riccati 方程

$$0 = PA + A'P + C'C - (PB + C'D)(D'D)^{-1}(PB + C'D)',$$

如果解存在的话,返回一个正半定解。

注意,当且仅当四元组(A,B,C,D)在虚轴上没有不变零点,D 是列满秩的情况下,正半定稳定解是存在的。

也参见 H2STATE、H8CARE 和 H2DARE。

H2STATE 利用 ATEA 方法的连续时间 H2 控制

F= H2STATE(A,B,C,D[,option])

产生状态反馈律 $u = Fx$,它可求解下面系统的 H2 次最优控制问题,

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$h = Cx + Du$$

即从干扰 w 到被控输出的 h 闭环传递函数矩阵的 H2 范数被极小化。利用 GM2STAR,来计算极优值或最佳可达 H2 性能,即 γ_{2^*} 。

用户可利用'option'来选择数值结果,或通过调整参数'epsilon'得到参数化符号形式。在默认情况下或选择 option= 0,程序需要用户输入'epsilon'值,并返回数值解。否则,如果 option= 1,F 将是以'epsilon'为参数的符号形式。

也参见 GM2STAR、DH2STATE、ATEA、H8STATE 和 ADDPS。

GM8STAR 连续时间 H_{∞} 控制的极优值或最佳值

gms8= GM8STAR(A,B,C,D,E)

在所有可镇定的状态反馈控制器中,对系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$h = Cx + Du$$

计算 H^∞ 次最优控制问题的极优值或最佳可达性能。

也参见 H8STATE、GM2STAR 和 DGM8STAR。

H8CARE H^∞ 连续代数 Riccati 方程的解

$$P = \text{H8CARE}(A, B, C, D, E, \text{gamma})$$

对于下面的连续时间系统 H^∞ 控制代数 Riccati 方程

$$0 = PA + A'P + C'C - \begin{bmatrix} B'P + D'C \\ E'P \end{bmatrix} G^{-1} \begin{bmatrix} B'P + D'C \\ E'P \end{bmatrix},$$

如果解存在的话, 返回一个正半定解。其中,

$$G = \begin{bmatrix} D'D & 0 \\ 0 & -\text{gamma}^2 I \end{bmatrix}$$

该 CARE 对应了系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$h = Cx + Du$$

的 H^∞ 控制。

注意, 当且仅当四元组 (A, B, C, D) 在虚轴上没有不变零点, D 是列满秩的, 且 $\text{gamma} > \text{gamma_infty}^*$ 时(利用 GM8STAR 可以发现), 正半定稳定解是存在的。

也参见 H2CARE、H8STATE、H8DARE 和 GM8STAR。

H8STATE 利用 ATEA 方法的连续时间系统 H^∞ 控制

$$F = \text{H8STATE}(A, B, C, D, E, \text{gamma}[, \text{option}])$$

产生一个状态反馈增益律 $u = Fx$, 它是关于系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$h = Cx + Du$$

的 H^∞ γ 次最优问题的解, 即从干扰 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 H^∞ 范数小于给定的 ' gamma '. ' gamma ' 值的选取必须大于极优值 gamma_infty^* , 这可以利用 GM8STAR 预先确定。

用户可以利用 ' option ' 来选择数值结果, 或通过调整参数 ' epsilon ' 得到参数化的符号形式。在默认情况下或选择 $\text{option} = 0$, 程序将要求用户输入 ' epsilon ' 值, 并返回数值解。否则, 如果 $\text{option} = 1$, F 将是以 ' epsilon ' 为参数的符号形式。

也参见 GM8STAR、DH8STATE、ATEA、H2STATE 和 ADDPS。

ADDPS 连续时间干扰解耦问题的解

$$F = \text{ADDPS}(A, B, C, D, E[, \text{option}])$$

产生状态反馈增益律 $u = Fx$, 它可求解系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$h = Cx + Du$$

的几乎干扰解耦问题, 即所产生的从干扰 w 到被控输出 h 的闭环传递函数矩阵几乎是零。如果给定的系统是不可解的, 函数将返回一个空的解。

用户可以利用 'option' 来选择数值结果, 或通过调整参数 'epsilon' 得到参数化的符号形式。在默认情况下或选择 option = 0, 程序将要求用户输入 'epsilon' 值并返回数值解。否则, 如果 option = 1, F 将是以 'epsilon' 为参数的符号形式。

也参见 ATEA、H2STATE、H8STATE 和 DADDPS。

DATEA 离散时间系统的特征结构配置

$$F = \text{DATEA}(A, B, C, D)$$

对以下的离散时间系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

利用特征结构配置设计方法产生一个状态反馈控制律 $u(k) = Fx(k)$ 。

注意, 这个函数是半交互式的。用户在执行过程中需要输入期望的特征结构设计。

也参见 DH2STATE、DH8STATE、DADDPS 和 ATEA。

DARE 离散时间系统代数 Riccati 方程的解

$$[P, \text{err}] = \text{DARE}(A, M, N, R, Q)$$

对下面的一般离散时间系统的代数 Riccati 方程

$$P = A'PA - (A'PM + N)(R + M'PM)^{-1}(M'PA + N') + Q,$$

如果解存在的话, 利用 Chen 的 "Robust and H-infinity Control, Springer, London, 2000" 中的非迭代方法返回一个正半定解。

err 是定义为

$$\text{err} = |A'PA - (A'PM + N)(R + M'PM)^{-1}(M'PA + N') + Q - P|$$

的解误差。它可以用来验证 DARE 解的精确性。

也参见 H2DARE 和 H8DARE。

DGM2STAR 离散时间控制极优值或最佳值

$$\text{gms2} = \text{DGM2STAR}(A, B, C, D, E)$$

在所有可能稳定的状态反馈控制器中, 对系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k)$$

$$h(k) = Cx(k) + Du(k)$$

计算 H_2 次最优控制问题的极优值或最佳可达性能。

也参见 DH2STATE、DGM8STAR 和 GM2STAR。

H2DARE 离散时间系统 H2 代数 Riccati 方程的解

$$P = \text{H2DARE}(A, B, C, D)$$

对于下面的离散时间系统 H2 最优控制代数 Riccati 方程

$$P = A'PA + C'C - (A'PB + C'D)(D'D + B'PB)^{-1}(A'PB + C'D)'$$

如果解存在的话,返回一个正半定的解。

注意,当且仅当四元组(A, B, C, D)是左可逆的,在单位圆上没有不变零点时,正半定解是存在的。

也参见 DARE、H8DARE 和 H2CARE。

DH2STATE 利用 ATEA 方法的离散时间控制

$$F = \text{DH2STATE}(A, B, C, D)$$

产生一个状态反馈增益律 $u(k) = Fx(k)$, 它可求解下面系统的 H2 最优控制问题,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ h(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

即干扰 w 到被控输出 h 的闭环传递函数矩阵的 H2 范数等于最优值 γ_{opt} , 这可以利用 DGM2STAR 预先计算出来。

也参见 DGM2STAR、H2STATE、DATEA、DH8STATE 和 DADDPS。

DGM8STAR 离散 H_{∞} 控制极优值或最佳值

$$\text{gms8} = \text{DGM8STAR}(A, B, C, D, E)$$

在所有的状态反馈可稳定的控制器中,对系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ h(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

计算 H_{∞} 次最优控制问题的极优值或最佳可达性能。

也参见 DH8ARE、DH8STATE、DGM2STAR 和 GM8STAR。

H8DARE 离散 H_{∞} 代数 Riccati 的解

$$P = \text{H8DARE}(A, B, C, D, E, \gamma)$$

对于下面的离散时间系统 H_{∞} 控制代数 Riccati 方程

$$P = A'PA + C'C - \begin{bmatrix} B'PA + D'C \\ E'PA \end{bmatrix}' G^{-1} \begin{bmatrix} B'PA + D'C \\ E'PA \end{bmatrix}$$

如果解存在的话,返回一个正半定解。其中,

$$G = \begin{bmatrix} D'D + B'PB & B'PE \\ E'PB & E'PE - \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

这个 DARE 产生于以下离散时间系统的 H_{∞} 控制

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Ew(k) \\ h(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

注意,当且仅当四元组(A,B,C,D)是左可逆的,在单位圆上没有不变零点,并且 $\gamma > \gamma_{\infty}^*$ (可利用 DGM8STAR 计算)时,正半定稳定解是存在的。

也参见 DARE、H2DARE、H8CARE 和 DGM8STAR。

DH8STATE 利用 ATEA 方法的离散时间系统 H_{∞} 控制

F= DH8STATE(A,B,C,D,E,gamma)

产生一个状态反馈增益律 $u(k) = Fx(k)$,它可求解系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k)$$

$$h(k) = Cx(k) + Du(k)$$

的 H_{∞} γ 次最优控制问题,即从干扰 w 到被控输出 h 的闭环传递矩阵的 ∞ 范数小于给定的 'gamma'。'gamma' 值的选取必须大于极优值 γ_{∞}^* ,可利用 DGM8STAR 来确定这个值。

也参见 DGM8STAR、H8STATE、DATEA、DH2STATE 和 DADDPS。

DADDPS 离散时间系统干扰解耦问题的解

F= DADDPS(A,B,C,D,E)

产生一个状态反馈增益律 $u(k) = Fx(k)$,它可求解系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k)$$

$$h(k) = Cx(k) + Du(k)$$

的干扰解耦问题。即从干扰 w 到被控输出 h 的闭环传递函数矩阵可以始终为零。如果给定系统的问题是 不可解的,函数将返回一个空解。

也参见 DATEA、DH2STATE、DH8STATE 和 ADDPS。

12.2.9 静态输出反馈下的干扰解耦

DDPCM 静态输出反馈下的干扰解耦

K= DDPCM(A,B,E,C1,D1,C2,D2,D22)

对下面的系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$y = C1x + D1w$$

$$h = C2x + D2u + D22w$$

如果解是存在的,计算出一个定常(静态)测量输出反馈下的干扰解耦问题的解;否则,程序将返回一个空的矩阵 K。

也参见 ROSYS4DDP。

ROSYS4DDP 静态输出反馈下,干扰解耦的不简约降阶系统

[Ar,Br,Er,C1r,D1r,C2r,D2r]

= ROSYS4DDP(A, B, E, C1, D1, C2, D2, D22)

从原系统

$$\dot{x} = A x + B u + E w$$

$$y = C_1 x + D_1 w$$

$$h = C_2 x + D_2 u + D_{22} w$$

产生一个不可简约的降阶系统,降阶系统表示为

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r u_r + E_r w_r$$

$$y_r = C_1 r x_r + D_1 r w_r$$

$$h_r = C_2 r x_r + D_2 r u_r$$

通过一些数值计算软件包,如 QEPCAD,求解原系统的静态输出干扰解耦问题。

如果原系统的问题是不可解的,程序将返回一个空的结果。

也参见 DDPCM。

在本书的结尾,我们要强调的是,以上的工具箱仍然在扩展中,还有许多新的素材我们会不时地添加进去。感兴趣的读者可以通过网址 <http://www.bmchen.net/> (或 <http://hdd.ece.nus.edu.sg/~bmchen/>) 获得工具箱的最新信息,或者将疑问以及建议用电子邮件发送到 bmchen@nus.edu.sg, zl5y@virginia.edu, 或 yshamash@notes.cc.sunysb.edu。到本译著完成为止,该工具箱已有来自中、美、德、法、英、俄以及新加坡等 39 个国家的 130 多个注册用户。

参考文献

- [1] H. Akashi and H. Imai, "Disturbance localization and output deadbeat control through an observer in discrete-time linear multivariable systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, pp. 621-627, 1979.
- [2] H. Aling and J. M. Schumacher, "A nine-fold canonical decomposition for linear systems," *International Journal of Control*, vol. 39, pp. 779-805, 1984.
- [3] A. C. Antoulas (ed.), *Mathematical System Theory: The Influence of R. E. Kalman*, Springer, Berlin, 1991.
- [4] P. J. Antsaklis and A. N. Michel, *Linear Systems*, McGraw Hill, New York, 1997.
- [5] J. D. Aplevich, *The Essentials of Linear State Space Systems*, Wiley, New York, 2000.
- [6] K. J. Aström, P. Hagander and J. Sternby, "Zeros of sampled systems," *Automatica*, vol. 20, pp. 21-38, 1984.
- [7] K. J. Aström and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [8] S. Barnett, *Matrices in Control Theory*, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1984.
- [9] G. Basile and G. Marro, "Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 3, pp. 306-315, 1968.
- [10] J. S. Bay, *Fundamentals of Linear State Space Systems*, McGraw Hill, New York, 1999.
- [11] V. Belevitch, *Classical Network Theory*, Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [12] S. Bingulac and D. W. Luse, "Computation of generalized eigenvectors," *Computers & Electrical Engineering*, vol. 15, pp. 29-32, 1989.
- [13] P. F. Blackman, *Introduction to State Variable Analysis*, Macmillan, London, 1977.
- [14] R. W. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*, Wiley, New York, 1970.
- [15] P. Brunovsky, "A classification of linear controllable systems," *Kybernetika (Praha)*, vol. 3, pp. 173-187, 1970.
- [16] F. M. Callier and C. A. Desoer, *Linear System Theory*, Springer, New York, 1991.
- [17] B. M. Chen, *Software Manual for the Special Coordinate Basis of Multivariable Linear Systems*, Washington State University Technical Report No: ECE 0094, Pullman, Washington, 1988.
- [18] B. M. Chen, *Theory of Loop Transfer Recovery for Multivariable Linear Systems*, Ph. D. Dissertation, Washington State University, Pullman, Washington, 1991.
- [19] B. M. Chen, "A simple algorithm for the stable/unstable decomposition of a linear discrete-time system," *International Journal of Control*, vol. 61, pp. 255-260, 1995.
- [20] B. M. Chen, "Solvability conditions for the disturbance decoupling problems with static measurement feedback," *International Journal of Control*, vol. 68, pp. 51-60, 1997.

- [21] B. M. Chen, "On properties of the special coordinate basis of linear systems," *International Journal of Control*, vol. 71, pp. 981-1003, 1998.
- [22] B. M. Chen, *Robust and H_∞ Control*, Springer, New York, 2000.
- [23] B. M. Chen, Z. Lin and C. C. Hang, "Design for general H_∞ almost disturbance decoupling problem with measurement feedback and internal stability-An eigenstructure assignment approach," *International Journal of Control*, vol. 71, pp. 653-685, 1998.
- [24] B. M. Chen, X. Liu and Z. Lin, "Interconnection of the Kronecker canonical form and special coordinate basis of general multivariable linear systems," Submitted for publication.
- [25] B. M. Chen, I. M. Y. Mareels, Y. Zheng and C. Zhang, "Solutions to disturbance decoupling problem with constant measurement feedback for linear systems," *Automatica*, vol. 36, pp. 1717-1724, 2000.
- [26] B. M. Chen, A. Saberi and P. Sannuti, "Explicit expressions for cascade factorization of general non-minimum phase systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 358-363, 1992.
- [27] B. M. Chen, A. Saberi and P. Sannuti, "Loop transfer recovery for general nonminimum phase non-strictly proper systems, Part 2: Design," *Control-Theory and Advanced Technology*, vol. 8, pp. 101-144, 1992.
- [28] B. M. Chen, A. Saberi and P. Sannuti, "On blocking zeros and strong stabilizability of linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 28, pp. 1051-1055, 1992.
- [29] B. M. Chen, A. Saberi, P. Sannuti and Y. Shamash, "Construction and parameterization of all static and dynamic H_2 -optimal state feedback solutions, optimal fixed modes and fixed decoupling zeros," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, pp. 248-261, 1993.
- [30] B. M. Chen and S. R. Weller, "Mappings of the finite and infinite zero structures and invertibility structures of general linear multivariable systems under the bilinear transformation," *Automatica*, vol. 34, pp. 111-124, 1998.
- [31] B. M. Chen and D. Z. Zheng, "Simultaneous finite and infinite zero assignments of linear systems," *Automatica*, vol. 31, pp. 643-648, 1995.
- [32] C. T. Chen, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.
- [33] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 2nd Edn., Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [34] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Edn., Oxford University Press, New York, 1999.
- [35] T. Chen and B. A. Francis, "Spectral and inner-outer factorizations of rational matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 10, pp. 1-17, 1989.
- [36] D. L. Chu, X. Liu and R. C. E. Tan, "On the numerical computation of a structural decomposition in systems and control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, pp. 1786-1799, 2002.
- [37] D. L. Chu and V. Mehrmann, "Disturbance decoupling for descriptor systems by state feedback," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, pp. 1830-1858, 2000.
- [38] D. L. Chu and D. W. C. Ho, "Necessary and sufficient conditions for the output feedback regularization of descriptor systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 405-412, 1999.

- [39] G. E. Collins, "Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition," *Lecture Notes on Computing Science*, Volume 33, pp. 194-183, Springer, Berlin, 1975.
- [40] G. E. Collins, *Quantifier Elimination by Cylindrical Algebraic Decomposition-Twenty Years of Progress*, Springer, Berlin, 1996.
- [41] C. Commault and J. M. Dion, "Structure at infinity of linear multivariable systems: A geometric approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-27, pp. 693-696, 1982.
- [42] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, Berlin, 1992.
- [43] L. Dai, *Singular Control System*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [44] E. J. Davison and S. H. Wang, "Properties and calculation of transmission zeros of linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 10, pp. 643-658, 1974.
- [45] E. J. Davison and S. H. Wang, "Remark on multiple transmission zeros of a system," *Automatica*, vol. 12, p. 195, 1976.
- [46] R. A. DeCarlo, *Linear Systems: A State Variable Approach with Numerical Implementation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [47] P. M. DeRusso, R. J. Roy and C. M. Close, *State Variables for Engineers*, Wiley, New York, 1965.
- [48] P. M. DeRusso, R. J. Roy, C. M. Close and A. A. Desrochers, *State Variables for Engineers*, 2nd Edn., Wiley, New York, 1998.
- [49] C. A. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.
- [50] J. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 831-847, 1989.
- [51] A. Emami-Naeini and P. Van Dooren, "Computation of zeros of linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 18, pp. 415-430, 1982.
- [52] C. Fama and K. Matthews, *Linear Algebra*, Lecture Notes MP274, Department of Mathematics, The University of Queensland, 1991.
- [53] M. Fliess, "Some basic structural properties of generalized linear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 15, pp. 391-396, 1990.
- [54] B. A. Francis, *A Course in H_∞ Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Volume 88, Springer, Berlin, 1987.
- [55] G. F. Franklin, J. D. Powell and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.
- [56] F. R. Gantmacher, *Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1959.
- [57] T. Geerts, "Invariant subspaces and invertibility properties for singular systems: The general case," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 183, pp. 61-88, 1993.
- [58] E. G. Gilbert, "Controllability and observability in multivariable control systems," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics-Control*, vol. 1, pp. 128-151, 1963.
- [59] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
- [60] J. W. Grizzle and M. H. Shor, "Sampling, infinite zeros and decoupling of linear systems," *Automatica*, vol. 24, pp. 387-396, 1988.
- [61] Y. Halevi and Z. J. Palmor, "Extended limiting forms of optimum observers and LQG regulators,"

- International Journal of Control*, vol. 43, pp. 193-212, 1986.
- [62] F. Hamano and K. Furuta, "Localization of disturbances and output decomposition in decentralized linear multivariable systems," *International Journal of Control*, vol. 22, pp. 551-562, 1975.
- [63] M. L. J. Hautus, "Controllability and observability conditions of linear autonomous systems," *Ned. Akad. Wetenschappen, Proc. Ser. A*, vol. 72, pp. 443-448, 1969.
- [64] M. He and B. M. Chen, "Structural decomposition of linear singular systems: The single-input and single-output case," *Systems & Control Letters*, vol. 47, pp. 327-334, 2002.
- [65] M. He, B. M. Chen and Z. Lin, "Structural decomposition and its properties of general multivariable linear singular systems," *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, Denver, Colorado, pp. 4494-4499, 2003.
- [66] Y. C. Ho, "What constitutes a controllable system," *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. 7, p. 76, 1962.
- [67] T. Hu and Z. Lin, *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [68] L. Huang, *Linear Algebra for Systems and Control Theory*, Science Press, Beijing, 1984 (in Chinese).
- [69] H. Imai and H. Akashi, "Disturbance localization and pole shifting by dynamic compensation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 226-235, 1981.
- [70] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [71] R. E. Kalman, "Canonical structure of linear dynamical systems," *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 184, pp. 596-600, 1962.
- [72] R. E. Kalman, "Mathematical description of linear dynamical systems," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics-Control*, vol. 1, pp. 152-192, 1963.
- [73] R. E. Kalman, Y. C. Ho and K. S. Narendra, "Controllability of linear dynamical systems," *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, pp. 189-213, 1963.
- [74] N. Karcanias, B. Laidis and C. Ginnakopoulos, "Decentralized determinantal assignment problem: Fixed and almost fixed modes and zeros," *International Journal of Control*, vol. 48, pp. 129-147, 1988.
- [75] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press, London, 1986.
- [76] F. N. Koumboulis and K. G. Tzierakis, "Meeting transfer function requirement via static measurement output feedback," *Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, vol. 335B, pp. 661-677, 1998.
- [77] B. Kouvaritakis and A. G. I. MacFarlane, "Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Part 1: Square systems & Part 2: Non-square systems," *International Journal of Control*, vol. 23, pp. 149-181, 1976.
- [78] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1989.
- [79] M. Kuijper, *First Order Representation of Linear Systems*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [80] F. L. Lewis, "A survey of linear singular systems," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 5, pp. 3-36, 1986.
- [81] F. L. Lewis, "Computational geometry for design in singular systems," in *Modelling and*

- Simulation of Systems*, edited by P. Breedveld *et al.*, pp. 381-383, J. C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co., Basel, 1989.
- [82] F. L. Lewis, "A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems," *Automatica*, vol. 28, pp. 119-137, 1992.
- [83] F. L. Lewis and K. Ozcaldiran, "Geometric structures and feedback in singular systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 450-455, 1989.
- [84] Z. Lin, *The Implementation of Special Coordinate Basis for Linear Multivariable Systems in MATLAB*, Washington State University Technical Report No: ECE0100, Pullman, Washington, 1989.
- [85] Z. Lin, *Low Gain Feedback*, Springer, New York, 1998.
- [86] Z. Lin and B. M. Chen, "Solutions to general H_∞ almost disturbance decoupling problem with measurement feedback and internal stability for discrete-time systems," *Automatica*, vol. 36, pp. 1103-1122, 2000.
- [87] Z. Lin, B. M. Chen and X. Liu, *Linear Systems Toolkit*, Software Package, <http://linearsystemskit.net>, 2004.
- [88] Z. Lin, B. M. Chen and A. Saberi, "Explicit expressions for cascade factorizations of general non-strictly proper systems," *Control-Theory and Advanced Technology*, vol. 9, pp. 501-515, 1993.
- [89] Z. Lin, B. M. Chen, A. Saberi and Y. Shamash, "Input-output factorization of discrete-time transfer matrices," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 43, pp. 941-945, 1996.
- [90] Z. Lin, A. Saberi and B. M. Chen, *Linear Systems Toolbox*, Washington State University Technical Report No: EE/CS 0097, Pullman, Washington, 1991.
- [91] X. Liu, B. M. Chen and Z. Lin, "Computation of structural invariants of singular linear systems," *Proceedings of the 2002 Information, Decision and Control Symposium*, Adelaide, Australia, pp. 35-40, 2002.
- [92] X. Liu, B. M. Chen and Z. Lin, "On the problem of general structural assignments or sensor selection of linear systems," *Automatica*, vol. 39, pp. 233-241, 2003.
- [93] J. J. Loiseau, "Some geometric considerations about the Kronecker normal form," *International Journal of Control*, vol. 42, pp. 1411-1431, 1985.
- [94] D. G. Luenberger, "Observers for linear multivariable systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, pp. 190-197, 1966.
- [95] D. G. Luenberger, "Canonical forms for linear multivariable systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 12, pp. 290-293, 1967.
- [96] A. G. J. MacFarlane and N. Karcanias, "Poles and zeros of linear multivariable systems: A survey of the algebraic, geometric and complex variable theory," *International Journal of Control*, vol. 24, pp. 33-74, 1976.
- [97] M. Malabre, "Generalized linear systems: Geometric and structural approaches," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 122-123, pp. 591-621, 1989.
- [98] N. H. McClamroch, *State Models of Dynamical Systems: A Case Study Approach*, Springer, New York, 1980.
- [99] P. Misra, P. Van Dooren and A. Varga, "Computation of structural invariants of generalized state-

- space systems," *Automatica*, vol. 30, pp. 1921-1936, 1994.
- [100] A. S. Morse, "Structural invariants of linear multivariable systems," *SIAM Journal on Control*, vol. 11, pp. 446-465, 1973.
- [101] A. S. Morse and W. M. Wonham, "Decoupling and pole assignment by dynamic compensation," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 8, pp. 317-337, 1970.
- [102] P. Moylan, "Stable inversion of linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 74-78, 1977.
- [103] D. S. Naidu, "Featured review of books on linear systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, pp. 555-560, 2002.
- [104] K. Ogata, *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.
- [105] D. H. Owens, "Invariant zeros of multivariable systems: A geometric analysis," *International Journal of Control*, vol. 28, pp. 187-198, 1978.
- [106] H. K. Ozcetin, A. Saberi and P. Sannuti, "Design for H_∞ almost disturbance decoupling problem with internal stability via state or measurement feedback-singular perturbation approach," *International Journal of Control*, vol. 55, pp. 901-944, 1993.
- [107] H. K. Ozcetin, A. Saberi and Y. Shamash, " H_∞ -almost disturbance decoupling for non-strictly proper systems-A singular perturbation approach," *Control-Theory & Advanced Technology*, vol. 9, pp. 203-245, 1993.
- [108] R. V. Patel, "On transmission zeros and dynamic output compensators," *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 23, pp. 741-742, 1978.
- [109] V. M. Popov, *Hyperstability of Control Systems*, Springer, Berlin, 1973 (translation of Romanian edition, 1966).
- [110] A. C. Pugh and P. A. Ratcliffe, "On the zeros and poles of a rational matrix," *International Journal of Control*, vol. 30, pp. 213-227, 1979.
- [111] T. J. Richardson and R. H. Kwong, "On positive definite solutions to the algebraic Riccati equation," *Systems & Control Letters*, vol. 7, pp. 99-104, 1986.
- [112] H. H. Rosenbrock, *State Space and Multivariable Theory*, Nelson, London, 1970.
- [113] H. H. Rosenbrock and C. Storey, *Mathematics of Dynamical Systems*, Wiley, New York, 1970.
- [114] W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd Edn., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [115] A. Saberi, B. M. Chen and P. Sannuti, "Theory of LTR for nonminimum phase systems, recoverable target loops, recovery in a subspace-Part 1: Analysis," *International Journal of Control*, vol. 53, pp. 1067-1115, 1991.
- [116] A. Saberi, B. M. Chen and P. Sannuti, *Loop Transfer Recovery: Analysis and Design*, Springer, London, 1993.
- [117] A. Saberi and P. Sannuti, "Time-scale structure assignment in linear multivariable systems using high-gain feedback," *International Journal of Control*, vol. 49, pp. 2191-2213, 1989.
- [118] A. Saberi and P. Sannuti, "Observer design for loop transfer recovery and for uncertain dynamical systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp. 878-897, 1990.
- [119] A. Saberi and P. Sannuti, "Squaring down of non-strictly proper systems," *International Journal of Control*, vol. 51, pp. 621-629, 1990.

- [120] A. Saberi, P. Sannuti and B. M. Chen, *H₂ Optimal Control*, Prentice Hall, London, 1995.
- [121] P. Sannuti, "A direct singular perturbation analysis of high-gain and cheap control problems," *Automatica*, vol. 19, pp. 41-51, 1983.
- [122] P. Sannuti and A. Saberi, "A special coordinate basis of multivariable linear systems-Finite and infinite zero structure, squaring down and decoupling," *International Journal of Control*, vol. 45, pp. 1655-1704, 1987.
- [123] P. Sannuti and H. S. Wason, "A singular perturbation canonical form of invertible systems: Determination of multivariable root-loci," *International Journal of Control*, vol. 37, pp. 1259-1286, 1983.
- [124] C. Scherer, "*H_∞*-control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 30, pp. 123-142, 1992.
- [125] C. Scherer, "*H_∞*-optimization without assumptions on finite or infinite zeros," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 30, pp. 143-166, 1992.
- [126] J. M. Schumacher, "Compensator synthesis using (C, A, B) pairs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 1133-1138, 1980.
- [127] U. Shaked, "An explicit expression for the minimum-phase image of transfer function matrices," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 1290-1293, 1989.
- [128] U. Shaked, "Nearly singular filtering for uniform and nonuniform rank linear continuous systems," *International Journal of Control*, vol. 38, pp. 811-830, 1983.
- [129] U. Shaked, "The all-pass property of optimal open loop tracking systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-29, pp. 465-467, 1984.
- [130] U. Shaked and E. Soroka, "Explicit solution to the unstable stationary filtering problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, pp. 185-189, 1986.
- [131] L. M. Silverman, "Inversion of multivariable linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14, pp. 270-276, 1969.
- [132] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer, New York, 1990.
- [133] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2nd Edn., Springer, New York, 1998.
- [134] E. Soroka and U. Shaked, "The properties of reduced-order minimum variance filters for systems with partially perfect measurements," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 1022-1034, 1988.
- [135] A. A. Stoorvogel, *The H_∞ Control Problem: A State Space Approach*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- [136] A. A. Stoorvogel and J. W. van der Woude, "The disturbance decoupling problem with measurement feedback and stability for systems with direct feedthrough matrices," *Systems & Control Letters*, vol. 17, pp. 217-226, 1991.
- [137] M. G. Strintzis, "A solution to the matrix factorization problem," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-18, pp. 225-232, 1972.
- [138] N. Suda, S. Kodama and M. Ikeda, *Matrix Theory in Automatic Control*, (Translated by C.-X. Cao), Science Press, Beijing, 1979 (in Chinese).

- [139] V. L. Syrmos, "On the finite transmission zero assignment problem," *Automatica*, vol. 29, pp. 1121-1126, 1993.
- [140] V. L. Syrmos and F. L. Lewis, "Transmission zero assignment using semistate descriptions," *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 38, pp. 1115-1120, 1993.
- [141] H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel and M. L. J. Hautus, *Control Theory for Linear Systems*, Springer, New York, 2001.
- [142] W. G. Tuel, Jr., "Computer algorithm for spectral factorization of rational matrices," *IBM Journal*, pp. 163-170, 1968.
- [143] P. Van Dooren, "The generalized eigenstructure problem in linear system theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 111-129, 1981.
- [144] P. Van Dooren, "The eigenstructure of an arbitrary polynomial matrix: Computational aspects," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50, pp. 545-579, 1983.
- [145] A. I. G. Vardulakis, "Zero placement and the 'squaring down' problem: A polynomial approach," *International Journal of Control*, vol. 31, pp. 821-832, 1980.
- [146] G. Verghese, *Infinite Frequency Behavior in Generalized Dynamical Systems*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, 1978.
- [147] S. Weiland and J. C. Willems, "Almost disturbance decoupling with internal stability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 277-286, 1989.
- [148] M. Weiss, "Spectral and inner-outer factorizations through the constrained Riccati equation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 677-681, 1994.
- [149] B. Wie and D. Bernstein, "A benchmark problem for robust control design," *Proceedings of the 1990 American Control Conference*, pp. 23-25, 1990.
- [150] H. Wielandt, "On the eigenvalues of $A + B$ and AB ," *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B. Mathematical Sciences*, vol. 77B, pp. 61-63, 1973.
- [151] J. C. Willems, "Almost invariant subspaces: An approach to high gain feedback design-Part I: Almost controlled invariant subspaces," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, pp. 235-252, 1981.
- [152] J. C. Willems, "Almost invariant subspaces: An approach to high gain feedback design-Part II: Almost conditionally invariant subspaces," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-27, pp. 1071-1085, 1982.
- [153] J. C. Willems and C. Commault, "Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole-placement," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 19, pp. 490-504, 1981.
- [154] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer, New York, 1979.
- [155] W. M. Wonham and A. S. Morse, "Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: A geometric approach," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 8, pp. 1-18, 1970.
- [156] D. C. Youla, J. J. Bongiorno, Jr., and C. N. Lu, "Single loop feedback stabilization of linear multivariable plants," *Automatica*, vol. 10, pp. 159-173, 1974.
- [157] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory*, McGraw Hill, New York, 1963.
- [158] D. Z. Zheng, *Linear System Theory*, Tsinghua University Press, Beijing, 1990 (in Chinese).

-
- [159] Z. Zhang and J. S. Freudenberg, "Loop transfer recovery for nonminimum phase plants," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp. 547-553, 1990.
- [160] K. Zhou and P. Khargonekar, "An algebraic Riccati equation approach to H_∞ -optimization," *Systems & Control Letters*, vol. 11, pp. 85-91, 1988.
- [161] Z. Zhou, M. A. Shayman and T. J. Tarn, "Singular systems: a new approach in the time domain," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, pp. 42-50, 1987.

索引

- 执行器选择, 241
- 全通因子分解, 216
- 全通因子, 217, 219
- 自治系统, 2, 24, 53
- 双线性变换, 3, 22, 191
 - 连续时间到离散时间, 191
 - 可控性, 23, 29
 - 离散时间到连续时间, 197
 - 几何子空间, 45, 47
 - 无限零点结构, 42, 46
 - 不变零点结构, 23, 39
 - 可逆性, 35, 36
 - 非奇异变换, 171, 181
 - 可观性, 33, 35
 - 输出馈入, 180, 204
 - 状态反馈, 24, 32
 - 结构映射,
 - 系统因子分解, 216
- 块对角可控结构分解, 53, 84
- 块对角可观结构分解, 3, 74
- 阻塞零点, 37
- Brunovsky 规范形, 75
- 串级因子分解, 3, 216, 217
- Cayley-Hamilton 定理, 12
- 可控性, 30
 - 可控模态, 32
 - Grammian, 49
 - 矩阵, 5
 - PBH(Popov-Belevitch-Hautus)检测,
 - 不可控模态, 30
- 可控性指数, 1, 76, 107, 174, 310
- 可控性结构分解, 3, 76
- 可控规范形, 1
- 解耦零点, 38
- 奇异系统, 23, 158
 - 可检测性, 172
 - 离散时间情况, 277
 - EA 分解, 162
 - 无限零点结构, 42
 - 不变零点, 143
 - 可逆结构, 39
 - Kronecker 规范形, 23
 - MIMO 情况, 201
 - Morse 指数, 204
 - 常态秩, 131
 - 特性, 131
 - 正规性非奇异, 190, 221
 - SISO 情况, 193
 - 稳定性, 59
 - 能稳定性, 206
 - 结构分解, 1-3
 - 系统矩阵, 37
- 离散时间系统, 3, 6, 22, 24, 29
- 干扰解耦, 279
 - H_∞ 意义, 272
 - 连续时间系统, 191
 - 离散时间系统, 191
 - 特征结构配置, 261
 - 静态输出反馈, 283
- 动态响应, 24
- EA 分解, 162
- 特征结构配置, 261
 - H_2 控制, 279
 - H_∞ 控制, 279
 - 连续时间系统, 191
 - 设计步骤, 262, 277
 - 离散时间系统, 191
 - 干扰解耦, 158
 - 特性, 195

- 电路, 48, 259
- 有限零点(参见不变零点), 37, 42
- 函数
- 绝对连续, 29
 - 范数, 7
 - 一致连续, 29
- 广义特征矢量, 82
- 广义系统(参见奇异系统), 189
- 几何子空间, 3, 23, 42
- S_1 , 45
 - \mathcal{V}_1 , 45
 - 双线性变换, 22, 191
 - 弱可控不可观子空间, \mathcal{R}^* , 58
 - 分布弱不可观子空间, \mathcal{N}^* , 44
 - 强可控子空间, \mathcal{S}^* , \mathcal{S}^- , \mathcal{S}^+ , 6
 - 弱不可观子空间, \mathcal{V}^* , \mathcal{V}^- , \mathcal{V}^+ , 56, 57
- H_2 控制
- 连续时间系统, 197
 - 离散时间系统, 192
 - 特征结构配置, 261
 - 极优值, 281
 - 摄动方法, 261
 - Riccati 方程, 191
- H_∞ 控制
- 连续时间系统, 154
 - 离散时间系统, 154
 - 特征结构配置, 261
 - 极优值, 281
 - 摄动方法, 261
 - Riccati 方程, 191
- Hölder 不等式, 20
- 无限零点结构, 2, 6, 23, 39
- 双线性变换, 22, 191
- 内因子, 217, 225, 233, 235
- 内外因子分解, 281
- 不变子空间, 8, 141
- 不变零点, 37
- 双线性变换, 22, 191
 - 输入零点方向, 38
 - 结构重数, 37
 - 代数重数, 40, 52
 - 几何重数, 40, 52
 - 简单不变零点, 40
 - 状态零点方向, 38
- Jordan 规范形, 13, 26, 54, 58, 60, 79
- 实型式, 99
- Kalman 分解, 2
- Kronecker 规范分解, 31, 52, 174, 178, 190
- Laplace 变换, 161
- Luenberger 观测器, 47
- Lyapunov 方程, 22, 27, 28, 218, 268, 275, 281
- Lyapunov 函数, 268
- Lyapunov 稳定性, 37, 39
- 矩阵
- Cayley-Hamilton 定理, 12
 - 特征多项式, 12
 - 条件数, 5
 - 共轭转置, 5
 - 行列式, 5
 - 求导, 10
 - 特征值, 12
 - 特征矢量, 12
 - 特征矢量矩阵, 12
 - Hermitian, 14
 - 幂等, 14
 - 不定, 15
 - 逆, 5
 - Jordan 规范形, 79
 - Moore-Penrose 逆, 19
 - 负定, 15
 - 负半定, 19
 - 幂零, 14
 - 非奇异, 10
 - 范数, 19
 - 正交, 14
 - 置换, 14
 - 正定, 14
 - 正半定, 321
 - 伪逆, 18
 - 秩, 2

- Sherman-Morrison 公式, 10
- Sherman-Morrison-Woodbury 公式
- 奇异, 10
- 奇异值分解, 16
- 奇异值, 16
- 旋转对称, 14
- 谱半径, 5
- 对称, 14
- 迹, 5
- 转置, 5
- 单模, 150
- 酉, 14
- 最小相位系统, 217
- 最小相位/全通因子分解, 216
- Moore-Penrose 逆, 19
- Morse 指数, 204
- 奇异系统, 3
- I_1 列, 40, 108, 173
- I_2 列, 40, 108, 195, 199, 250
- I_3 列, 108, 195, 199, 250
- I_4 列, 108, 250
- 九重分解, 3
- 非最小相位系统, 216
- 非严格正则系统, 127, 136
- 常态秩, 37, 131
- 范数
- H_2 范数, 6, 21
- H_∞ 范数, 6, 21
- L_p 范数, 20
- l_p 范数, 6
- p 范数, 6
- 连续时间信号, 20
- 连续时间系统, 21
- 离散时间信号, 21
- 离散时间系统, 152
- Euclidean 范数, 20
- Frobenius 范数, 6
- Hölder 不等式, 21
- 矩阵, 19
- 谱范数, 20
- 矢量, 7
- 可观测性, 47, 157
- Grammian, 49
- 矩阵, 19
- 可观测模态, 34
- 不可观测模态, 34
- 可观测指数, 2, 80
- 可观测结构分解, 304
- 可观测规范形, 2
- 观测器(估计器), 34
- 外因子, 217, 225, 233, 237
- 输出馈入, 24, 47
- PBH(Popov-Belevitch-Hautus) 检测, 32
- PID 控制器, 223
- QEPCAD, 302
- 实 Jordan 分解, 3, 53
- 实 Schur 分解, 54
- 相对阶, 37, 86, 92, 131
- Riccati 方程
- H_2 控制, 279
- H_∞ 控制, 279
- 传感器选择, 240
- Sherman-Morrison 公式, 10
- Sherman-Morrison-Woodbury 公式, 10, 220
- 同时有限和无限零点配置, 289
- 奇异摄动, 322
- 奇异值分解, 12
- SISO 系统, 38, 85, 241
- Smith 型, 79, 135
- Smith-McMillan 描述, 39
- 软件工具箱, 304
- 内容, 193
- m 函数, 304
- ADDPS, 321
- ATEA, 261
- BDCSD, 3
- BDOSD, 53
- BLKZ, 313
- CSD, 3
- CTRIDX, 309
- DADDPS, 323
- DARE, 282

- DATEA, 321
DDPCM, 283
DGM2STAR, 321
DGM8STAR, 322
DH2STATE, 317
DH8STATE, 322
DIOFACT, 318
DMPFACT, 318
DSCB, 312
DSSD, 307
EA_DS, 316
GCFACT, 318
GM2STAR, 321
GM8STAR, 321
H2CARE, 321
H2DARE, 317
H2STATE, 317
H8CARE, 321
H8DARE, 322
H8STATE, 321
INFZ_DS, 317
INFZ, 313
INVZ_DS, 317
IOFACT, 318
JCF, 307
KCF, 312
L_INV_T_DS, 318
L_INV_T, 313
MORSEIDX, 313
MPFACT, 318
NORMRANK, 314
N_STAR, 315
OBVIDX, 309
OSD, 308
RJD, 308
ROSYS4DDP, 325
R_INV_T_DS, 318
R_INV_T, 314
R_STAR, 315
SA_ACT, 320
SA_SEN, 320
SCBRAW, 311
SCB, 312
SD_DS, 317
SSADD, 316
SSD, 307
SSINTSEC, 316
SSORDER, 316
S_LAMBDA, 315
S_MINUS, 315
S_PLUS, 315
S_STAR, 315
V_LAMBDA, 315
V_MINUS, 314
V_PLUS, 314
V_STAR, 314
特殊坐标基(SCB), 2, 3, 85, 108, 127, 136, 283
 简约型, 156
 离散时间系统, 152
 特性, 195
 阻塞零点, 37
 可控性, 30
 可检测性, 33
 几何子空间, 45
 无限零点, 37
 不变零点, 37, 143
 可逆, 158
 最小相位, 130
 非最小相位, 130
 常态秩, 5
 可观测性, 157
 稳定性, 267
 状态空间分解, 85
 变换, 26, 40, 54
稳定性结构分解, 3, 53
状态反馈, 47, 48
 特征结构配置, 261
静态输出反馈干扰解耦, 341
 广义系统, 158
 不可约降阶系统, 361
 左可逆系统, 284
 多项式方程, 283

- 降阶系统, 283, 299
- 稳定性, 267, 290
- 严格正则系统, 93, 127
- 强可稳定, 50
- 系统(Rosenbrock)矩阵, 146
- 系统可检测性, 46, 157
- 系统因子分解, 3
 - 全通因子, 224
 - 双线性变换, 191
 - 串级因子分解, 217
 - 离散时间系统, 152
 - 内因子, 225
 - 内外因子分解, 281
 - 最小相位/全通因子分解, 216, 217
 - 最小相位/全通因子, 233
 - 外因子, 217, 225, 233, 237
 - 严格正则系统, 3, 85
- 系统可逆性, 3, 24, 35, 37
 - 退化, 36, 131
 - 可逆, 158
 - 左可逆结构, 40
 - 左可逆, 3, 40
 - 右可逆结构, 40
 - 右可逆, 36
- 系统稳定性, 24
 - 渐近稳定, 26, 29
 - 连续时间系统, 3
 - 离散时间系统, 152
 - 临界稳定, 29
 - Lyapunov 意义下的稳定, 26, 39
- 系统可稳定性, 43, 157
- 系统结构配置, 240
 - I_1 列, 108
 - I_2 列, 108
 - I_3 列, 250
 - I_4 列, 250
 - 完全配置, 297
 - 有限和无限零点配置, 289
 - 挠性机械系统, 254
 - 图示总结, 299
 - MIMO 情况, 201
 - SISO 情况, 193
- 系统零点, 38
- 时间尺度配置(参见特征结构配置), 313
- 传递函数, 7
- 传输零点(参见不变零点), 49, 50
- Tustin 近似, 192
- 无驱动系统, 3, 33
- 一致秩, 131
- 单模矩阵, 149
- 无检测系统, 2, 53, 75
- 矢量空间, 7
 - 基, 7
 - 维, 8
 - 直和, 8
 - 商空间, 8
 - 像, 8
 - 独立性, 9
 - 不变子空间, 141
 - 逆像, 8
 - 核, 8
 - 零空间, 8
 - 正交补, 8
 - 商空间, 8
 - 值域空间, 50
 - 子空间, 5
 - 和, 2
- Woodbury 公式, 10
- 零点配置, 216
 - 对偶情况, 266
 - MIMO 情况, 201
 - SISO 情况, 193
- ZOH 变换, 215

本书是首部全面研究各种类型线性系统结构分解的专著，其中包括自治系统、无驱动或无检测系统、严格正则系统、非严格正则系统和奇异系统。结构特性对研究线性系统至关重要，它能够使我们更深入地理解许多控制问题（如镇定、干扰解耦、鲁棒和最优控制等问题）之解的内在特性。其应用涵盖工业过程控制、飞行器和船舶控制、生产过程自动控制以及许多其它工程系统。

作者应用独特的结构分解方法，把一个完整的系统分解成各具不同特征的子系统。当我们在设计反馈控制系统时，这些子系统的简洁性和它们之间的相互关系可以让我们更深地洞察到所设计的闭环系统性能、稳定性和鲁棒性的本质特性。书中的结果和实例包含连续和离散系统。为了加强和演示书中所涉及的概念，本书还收集了大量习题以及利用MATLAB和线性系统工具箱所设计的算法。

主题内容包括：

- 线性系统理论的基本概念
- 无驱动或无检测系统、正则系统的分解及性质
- 奇异系统的分解及性质
- 串级和内外因子分解
- 选择传感器（或执行器）来配置系统结构
- 状态反馈控制中的时标和特征结构配置
- 静态输出反馈的干扰解耦

《线性系统理论：结构分解法》一书可作为航空航天、应用数学、化工、电气和机械工程等专业的高年级本科生和研究生教材，对系统和控制相关领域中的研究和工程实践人员也是一本有价值的自学参考书。

ISBN 978-7-302-16367-1



9 787302 163671 >

定价：39.00元